

博士論文

交代符号行列と数理物理モデルとの  
関係および組み合わせゲーム理論へ  
の応用

2025年9月

大本豊数

岡山大学大学院自然科学研究科  
数理物理科学専攻  
(博士後期課程)



# 目次

0.1	はじめに	5
<b>第1章 交代符号行列, 六頂点モデルおよび高さ関数の間の全単射</b>		7
1.1	交代符号行列と六頂点モデル	7
1.1.1	交代符号行列 (ASM)	7
1.1.2	六頂点モデルと fully packed loop モデル	8
1.1.3	六頂点モデルと交代符号行列の間の対応	11
1.2	高さ関数	17
1.2.1	六頂点モデルの境界条件の性質	17
1.2.2	六頂点モデルから行列へのもう一つの対応	18
1.2.3	高さ関数	21
1.2.4	交代符号行列と高さ関数の間の全単射	22
<b>第2章 交代符号行列に関連した半順序集合上のコイン裏返しゲーム</b>		25
2.1	ニム和	25
2.2	有限不偏ゲーム	28
2.2.1	有限不偏ゲーム	28
2.2.2	ゲームの和	30
2.2.3	石取りゲーム (ニム)	31
2.3	半順序集合	32
2.3.1	半順序集合	32
2.3.2	交代符号行列に関連した半順序集合	34
2.4	半順序集合上のコイン裏返しゲーム	37
2.4.1	$(X, \mathcal{T})$ -ゲーム	37
2.4.2	ポセットゲームの性質	39
2.4.3	ポセットゲームの基本定理	41
2.4.4	ポセットゲームの例	42

2.5 交代符号行列に関する半順序集合上のポセットゲーム . . . . . 43  
 参考文献 . . . . . 49

## 0.1 はじめに

本論文は二部構成である. 第1章では, Math. J. Okayama Univ. に掲載されている単著論文 “The characterizations of an alternating sign matrices using a triplet” [13] に基づいて交代符号行列および六頂点モデルと呼ばれる2種類の対象の間の全単射について述べる. 特に, 六頂点モデルを用いることで交代符号行列のグラフ的表記を与えている. 第2章では, 現在投稿準備中である, 高山義輝氏との共著論文 “A coin turning game on a partially ordered set related to alternating sign matrices” [14] に基づいて半順序集合上のコイン裏返しゲームと呼ばれる題材について取り扱う. 特に, 交代符号行列に関連して定義されるある半順序集合の上のコイン裏返しゲームを考える. 第1章, 第2章ではそれぞれ, グラフ的表記によるアプローチ, 半順序集合としての側面からのアプローチを用いて交代符号行列について考察する.

交代符号行列は 1980 年代に Mills-Robbins-Rumsey [11] によって, 整数の平面分割の文脈で数え上げ問題が提唱された正方行列であり, 彼らの論文 [12] では,  $n$  次の交代符号行列の個数は  $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(3k+1)!}{(n+k)!}$  と表されることが予想された. 交代符号行列は, 対称群の表現論に深く関連した組み合わせ論的対象として盛んに研究されてきており, 実際に Bressoud [3] においては, 置換行列と呼ばれる対称群の各元と 1 対 1 に対応する行列のひとつの一般化として説明される. 定義自体は組合せ論的に明快であるが, その数え上げ問題は 1990 年代に Kuperberg [8], Zeilberger [24] らによってそれぞれ独立に証明されるまで 10 年以上もの長い間, 未解決問題であった. 特に, Kuperberg による証明では, それまでの文脈とは全く異なる背景を持つ統計物理学に由来した六頂点モデルを用いることで数え上げ問題が解決され, 多くの関心を集めた. Kuperberg の証明を発端に, 数え上げ問題の解決後も, 表現論・組み合わせ論・統計物理学等の見地から盛んに研究され, Razumov-Stroganov 予想 [15] 等の研究につながっている. 特に, Cantini-Sportiello による Razumov-Stroganov 予想の証明では, Wieland [23] によって定義された gyration と呼ばれる操作が重要な役割を果たす.

さて, 六頂点モデルとは, 格子状に配置された水の分子の状態を記述するための模型であり, 格子状のグラフを用いて説明される. 水の分子が 6 種類の状態のいずれかをとることから六頂点モデルと名付けられている. Kuperberg の証明において, 六頂点モデルから交代符号行列への写像が全単射であることが重要な役割を果たすが, 全単射であることの証明は数学的に明確な形では述べられていない. 本論文の第1章では逆写像, 即ち, 交代符号行列から六頂点モデルへの対応を具体的に構成することが一番の主題である. 六頂点モデルから交代符号行列への写像では, 各分子の状態ごとにそれぞれ, 3 種類の整数の中からひとつ値を割り当て, 行列の成分を与えることで行列が構成される. 本論文では, 逆写像

を構成するために, 3つの整数から構成される或る組を定義する. この3つ組は6種類のいずれかの値をとり, それらの値と分子の6種類の状態を1対1に対応させることで逆写像を構成する. この3つ組を用いることが本論文の第1章における最も重要なポイントである. 一方で, 交代符号行列は高さ関数と呼ばれる別のクラスの行列との間に全単射が存在することが知られている. 第1章の後半では, 上記の交代符号行列から六頂点モデルへの写像を経由する形で, 高さ関数への全単射について説明を述べる.

第2章では、有限不偏ゲームと呼ばれる組合せ論的ゲームについて取り扱う。二ムやコイン裏返しゲームが代表的な例として挙げられる。通常のコイン裏返しゲームは、横一列に並べられたコインを特定のルールに基づいてコインを裏返し、局面を移行していくゲームである。そのひとつ的一般化として、半順序集合上のコイン裏返しゲームが定義される[10]。このゲームは、半順序集合が与えられた際に、その半順序集合の各元とコインを対応させ、半順序構造に基づいて定められるルールに従って進行していくゲームである。このゲームはポセットゲームという名前で呼ばれることがある。さて、有限不偏ゲームにおいては、各局面は先手必勝局面と後手必勝局面のいずれかに分類することができ、必勝判定を行うことができるが知られている。その必勝判定は、各局面に対して非負整数を定めるSprague-Grundy関数と呼ばれる関数を用いることで行うことができる。そのため、Sprague-Grundy関数の値を明示的に与えることが有限不偏ゲーム理論における大きな目的のひとつとされている。

ここで,  $n$  を正の整数とする. 第 1 章で示した交代符号行列と高さ関数の間の対応を用いて,  $n$  次の交代符号行列全体の成す集合  $\mathcal{A}_n$  には自然な半順序構造が定まる. Lascoux [9] では,  $\mathcal{A}_n$  の半順序が対称群  $\mathfrak{S}_n$  の Strong Bruhat order の Dedekind-MacNeille completion であることが示された. また, Brualdi-Schroeder [4] や J. Striker [22] によって, その半順序構造に関する研究がなされている. 特に, J. Striker [22] は,  $\mathcal{A}_n$  の半順序構造に関連して,  $J(\mathbb{A}_n) \cong \mathcal{A}_n$  となるようなもうひとつの半順序集合  $\mathbb{A}_n$  を定義し, gyration を半順序集合論の見地から記述し直している.

第2章では、交代符号行列の半順序集合としての側面からのアプローチとして、半順序集合  $\mathbb{A}_n$  上のコイン裏返しゲームについて主に記述していく。一般に、半順序集合  $(X, \leq)$  上のコイン裏返しゲームは、半順序集合  $(X, \leq)$  と、ある条件を満たす  $X$  の部分集合の族  $\mathcal{T}$  の組  $(X, \mathcal{T})$  をひとつ固定し、その組に対して定義される。族  $\mathcal{T}$  の固定の仕方により、コイン裏返しゲームにはいくつかのバリエーションが存在する。本論文では、その中でも特に、order ideal game と名付けられるゲームを定義し、そのゲームにおける Sprague-Grundy 関数の値に関する明示的な結果を与える。

# 第 1 章

## 交代符号行列, 六頂点モデルおよび 高さ関数の間の全単射

### 1.1 交代符号行列と六頂点モデル

この節では, 交代符号行列と六頂点モデルの間の関係について述べる.

#### 1.1.1 交代符号行列 (ASM)

$n$  を正の整数とする.  $n$  次対称群  $\mathfrak{S}_n$  の元  $\sigma$  に対して, 置換行列  $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$  が対応することはよく知られている. 例えば, 5 次の置換  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_5$  に対して, 以下の 5 次正方行列が対応している:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

交代符号行列とは, 対称群の各元に対して定まる置換行列のひとつ的一般化として定義される正方行列である. まず, 置換行列の特徴について見ていく. サイズ  $n$  の置換行列  $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  は次の特徴をみたす:  $1 \leq i, j \leq n$  に対して,

- (i)  $a_{i,j} \in \{0, 1\}$ ,
- (ii)  $\sum_{k=1}^n a_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} = 1$ .

$n$  次の交代符号行列は 0, 1 あるいは  $-1$  を成分とする  $n$  次正方行列で, 上記の性質をもつ置換行列のひとつの一般化として定義される.

**Definition 1.1.1** (交代符号行列).  $n$  を正の整数とする.  $n$  次正方行列  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  がサイズ  $n$  の交代符号行列 (alternating sign matrix) であるとは, 以下の条件を満たすことである:

$$a_{i,j} \in \{0, 1, -1\} \quad (1 \leq i, j \leq n), \quad (1.1.1a)$$

$$\sum_{k=1}^j a_{i,k}, \sum_{k=1}^i a_{k,j} \in \{0, 1\} \quad (1 \leq i, j \leq n), \quad (1.1.1b)$$

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} = \sum_{k=1}^n a_{k,j} = 1 \quad (1 \leq i, j \leq n). \quad (1.1.1c)$$

交代符号行列を略して ASM と呼ぶこともある. サイズ  $n$  の交代符号行列全体の成す集合を  $\mathcal{A}_n$  と表す.

例えば, 次の行列がサイズ 4 の交代符号行列の例として挙げられる:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

各行および各列において, 0 を除いて 1 と  $-1$  が交互に現れることから交代符号行列と名付けられている. 特に, 0 を除いて初めに現れる成分と最後に現れる成分は 1 であり, 1 行目と  $n$  行目および 1 列目と  $n$  列目には 1 がちょうど 1 回, 0 がちょうど  $(n-1)$  回現れる.

### 1.1.2 六頂点モデルと fully packed loop モデル

この節では六頂点モデルおよび fully packed loop モデルについて述べる. これらを定義するために, 格子状の無向平面グラフ  $L_{m,n} = (V(L_{m,n}), E(L_{m,n}))$  を定義する. まず,  $m$  および  $n$  を正の整数とする. 頂点集合  $V(L_{m,n}) = V_0(m, n) \sqcup V_1(m, n)$  および辺集合  $E(L_{m,n}) = E_0(m, n) \sqcup E_1(m, n)$  はそれぞれ, 2 種類の集合によって構成される. 頂点の集合  $V_0(m, n)$  および  $V_1(m, n)$  を以下で定める:

$$\begin{aligned} V_0(m, n) &:= \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}, \\ V_1(m, n) &:= \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq m, j \in \{0, n+1\}\} \\ &\quad \sqcup \{(i, j) \mid i \in \{0, m+1\}, 1 \leq j \leq n\}. \end{aligned}$$

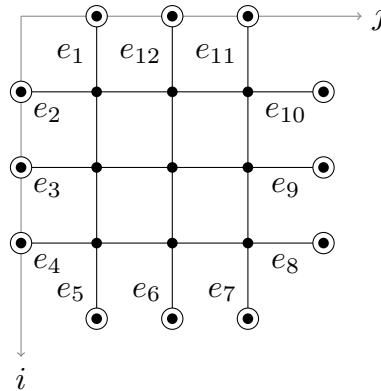
$V_0(m, n)$  の元を内部頂点 (interior vertex),  $V_1(m, n)$  の元を境界点 (boundary vertex) と呼ぶ. 次に, 辺集合  $E(L_{m,n})$  を以下で定める:

$$\begin{aligned} E(L_{m,n}) &:= \{(i, j), (i, j+1) \mid 1 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\} \\ &\quad \sqcup \{(i, j), (i+1, j) \mid 0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}. \end{aligned}$$

特に,  $\{(i, j), (i, j+1)\}$  の形で表される辺を**水平な辺** (horizontal edge),  $\{(i, j), (i+1, j)\}$  の形で表される辺を**垂直な辺** (vertical edge) と呼ぶ. また, 境界点に接続する辺を**境界辺** (boundary edge) と呼ぶ. 両端が内部頂点であるような辺全体の成す集合を  $E_0(m, n)$  と表し, 境界辺全体の成す集合を  $E_0(m, n)$  と表す. より詳しく書くと, 以下の通りである:

$$\begin{aligned} E_0(m, n) &:= \{\{(i, j), (i, j+1)\} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j < n\} \\ &\quad \sqcup \{\{(i, j), (i+1, j)\} \mid 1 \leq i < m, 1 \leq j \leq n\}, \\ E_1(m, n) &:= \{\{(i, j), (i, j+1)\} \mid 1 \leq i \leq m, j \in \{0, n\}\} \\ &\quad \sqcup \{\{(i, j), (i+1, j)\} \mid i \in \{0, n\}, 1 \leq j \leq n\}. \end{aligned}$$

特に,  $m = n$  であるようなとき,  $L_{n,n}$  を  $L_n$  と書き,  $E_i(n, n)$  および  $V_i(n, n)$  をそれぞれ  $E_i(n)$ ,  $V_i(n)$  と書くことがある ( $i = 0, 1$ ). また,  $L_{m,n}$  において, 任意の内部頂点にはちょうど 4 本の辺が接続していることに注意. 図 1.1 において,  $L_3$  を図示する. 内部頂点を黒丸  $\bullet$  で表し, 境界点を白丸  $\circ$  で囲まれた点で表す. また, 境界辺を  $e_1 = \{(1, 0), (1, 1)\}$ ,  $e_2 = \{(0, 1), (1, 1)\}$ , … のように,  $e_1$  を基準にして反時計回りにラベリングする.

図 1.1:  $L_3$ 

## 六頂点モデル

六頂点モデルは統計物理学に由来する格子模型のひとつであり, 格子状に配置された水の分子の状態を記述する模型である. 水の分子が取り得る 6 種類の状態 (state) に由来して六頂点モデルと呼ばれる. 六頂点モデルの state は, 先ほど定義した格子状のグラフ  $L_{m,n}$  の各辺に向きを与えることで得られる. 本論文では, 無向グラフの辺を非順序対  $\{u, v\}$  の形で表していたが, 頂点  $u$  から  $v$  に向かう有向辺を順序対  $(u, v)$  で表す. さて, グラフ  $E(L_{m,n})$  の各辺  $\{u, v\}$  に対して, 有向辺  $(u, v)$  または  $(v, u)$  のいずれかを対応させる写像  $\varphi: E(L_{m,n}) \rightarrow \bigsqcup_{\{u, v\} \in E(L_{m,n})} \{(u, v), (v, u)\}$  をグラフ  $L_{m,n}$  の**向き**

付け (orientation) と呼ぶ. グラフ  $L_{m,n}$  の向き付け  $\varphi$  において,  $\varphi(\{u, v\}) = (u, v)$  のとき, 辺  $\{u, v\}$  は  $u$  を始点 (source),  $v$  を終点 (sink) としているという. また, 水平な辺  $\{(i, j), (i+1, j)\}$  が  $(i, j)$  を始点とするとき東向き,  $(i, j)$  を終点とするとき西向きであるといい, 垂直な辺  $\{(i, j), (i, j+1)\}$  が  $(i, j)$  を始点とするとき南向き,  $(i, j)$  を終点とするとき北向きであるという. 向き付け  $\varphi$  において, 内部頂点  $v \in L_{m,n}$  に接続する 4 本の辺のうちちょうど 2 本が  $v$  を始点とするとき,  $v$  は 2-in-2-out であるという. また, 任意の内部頂点が 2-in-2-out のとき, 向き付け  $\varphi$  を  $L_{m,n}$  上の六頂点モデルの state という. 向き付け  $\varphi$  に対して,  $\varphi|_{E_1(m,n)}$  を  $\varphi$  の境界条件 (boundary condition) と呼び, 六頂点モデルを扱う際にはしばしば境界条件を固定して考える. 特に, 図 1.2 のように垂直な境界辺は境界点を終点とし, 水平な境界辺は境界点を始点とするような境界条件を domain-wall boundary condition と呼ぶ.  $L_n$  上の六頂点モデルの state のうち, domain-wall boundary condition を持つような state 全体の成す集合を  $\mathcal{SV}(n)$  とおく. 図 1.3 において,  $\mathcal{SV}(3)$  に属する六頂点モデルの state の例を図示する.

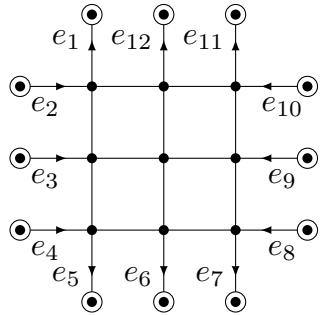
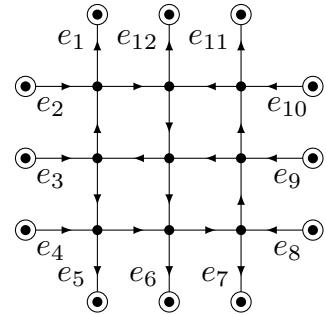


図 1.2: open boundary condition

図 1.3:  $\mathcal{SV}(3)$  に属する state の例

### Fully packed loop モデル

先ほどはグラフ  $L_{m,n}$  の各辺に向きを与えることで六頂点モデルの state を定義したが, 向きの変わりに 2 色のいずれかを対応させることによって別のモデルを定める. 写像  $\psi: E(L_{m,n}) \rightarrow \{b, w\}$  において, 内部頂点  $v$  に接続する 4 本の辺のうちちょうど 2 本が  $b$  のとき,  $v$  は 2-2-colored という. 任意の内部頂点が 2-2-colored のとき,  $\psi$  は  $L_{m,n}$  上の fully-packed-loop モデルの state であるという. また, fully-packed-loop モデルは FPL と略されることがある. 六頂点モデルと同様に境界辺の像を固定して取り扱うことが多い. 写像  $\psi: E(L_{m,n}) \rightarrow \{b, w\}$  に対して, 制限写像  $\psi|_{E_1(m,n)}$  と組  $\tau = (\psi(e_1), \psi(e_2), \dots, \psi(e_{2m+2n})) \in \{b, w\}^{2m+2n}$  を同一視して,  $\tau$  を FPL の境界条件と呼ぶ. 境界条件  $\tau \in \{b, w\}^{4n}$  が与えられたとき,  $\tau$  を境界条件にもつような  $L_{2m+2n}$  上の FPL 全体の成す集合を  $\text{fpl}(n, \tau)$  と記す. ここで, 以下のように  $b$  と  $w$  が交互に並んだ

境界条件をそれぞれ  $\tau_+$ ,  $\tau_-$  と記す:

$$\begin{aligned}\tau_+ &:= (b, w, b, w, \dots, b, w), \\ \tau_- &:= (w, b, w, b, \dots, w, b).\end{aligned}$$

図 1.4 において,  $\text{fpl}(3, \tau_-)$  の元を例示する. 色  $b$  が対応する辺を実線, 色  $w$  が対応する辺を破線で表している.

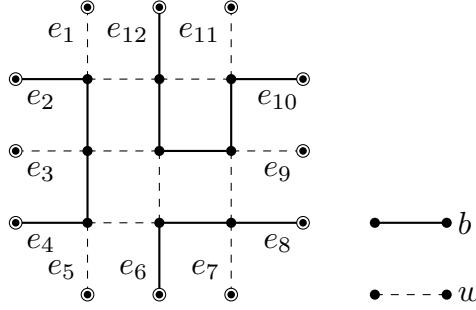


図 1.4:  $L_3$  上の FPL の例

### 六頂点モデルと fully packed loop モデルの間の対応

六頂点モデルの state の成す集合  $\mathcal{SV}(n)$  と FPL の成す集合  $\text{fpl}(n, \tau_-)$  の間には全単射が存在することは知られている. 以下では, Wieland [23] などで述べられている対応を説明する. まず, 各頂点  $(i, j) \in V(L_n)$  に対して,  $(i + j)$  の偶奇によって  $(i, j)$  の偶奇を定める. 即ち,  $(i + j)$  が偶数のとき  $(i, j)$  は even,  $(i + j)$  が奇数のとき  $(i, j)$  は odd と定める. このとき, 任意の辺  $\{u, v\} \in E(L_n)$  は odd の頂点と even の頂点に接続していることに注意. 対応  $f: \mathcal{SV}(n) \rightarrow \text{fpl}(n, \tau_-)$  を以下のように定める: 任意の  $\varphi \in \mathcal{SV}(n)$  および任意の辺  $e \in E(L_n)$  に対して,  $e$  が  $\varphi$  において odd な頂点を始点とするならば  $f(\varphi)(e) = b$  とし, even な頂点を始点とするならば  $f(\varphi)(u, v) = w$  とする. 一方で, 逆写像は以下のように定まる: 任意の  $\psi \in \text{fpl}(n, \tau_-)$  および任意の辺  $\{u, v\} \in E(L_n)$  に対して,  $u$  が odd のとき,  $\psi(\{u, v\}) = b$  ならば  $f^{-1}(\psi)(\{u, v\}) = (u, v)$  とし,  $\psi(\{u, v\}) = w$  ならば  $f^{-1}(\psi)(\{u, v\}) = (v, u)$  とする. 図 1.5 において,  $L_3$  上の六頂点モデルの state と FPL の間の対応の例を図示する.

#### 1.1.3 六頂点モデルと交代符号行列の間の対応

$n$  を正の整数とする. Kuperberg [8] による交代符号行列の数え上げの証明において, domain-wall boundary condition を持つ六頂点モデルと  $n$  次の交代符号行列の間の全単射が重要な役割を果たす. その証明では, 六頂点モデルから交代符号行列への対応, 即

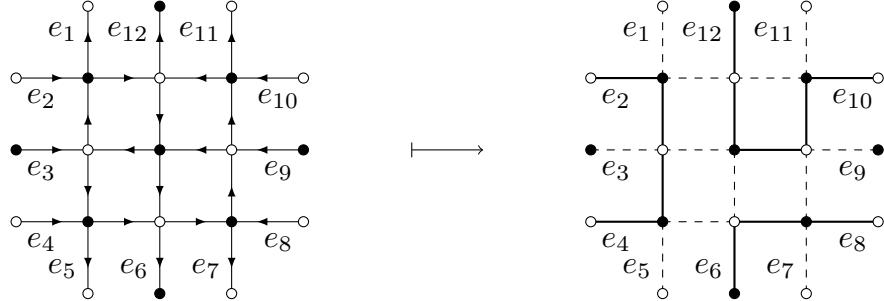


図 1.5: 六頂点モデルの state と FPL の間の対応の例

ち,  $\mathcal{SV}(n)$  から  $\mathcal{A}_n$  への写像が用いられているが, その対応が全单射であることや, 逆写像の具体的な構成方法は数学的に明確な形では述べられていない. この節では,  $\mathcal{SV}(n)$  から  $\mathcal{A}_n$  への全单射について記述する. 特に, 3 つの整数からなる組を用いて逆写像を構成する.

さて, 六頂点モデルの state において, 各内部頂点  $(i, j) \in V_0(n)$  は図 1.6 のような 6 種類の状態のいずれかをとる. これらを内部頂点  $(i, j)$  の choice と呼ぶ. ここで, 内部頂点  $(i, j)$  に接続する 4 本の辺をそれぞれ  $N = \{(i, j), (i-1, j)\}$ ,  $E = \{(i, j), (i, j+1)\}$ ,  $S = \{(i, j), (i+1, j)\}$ ,  $W = \{(i, j), (i, j-1)\}$  とおく. このとき,  $(i, j)$  を始点とする 2 本の辺を指定することで 6 種類の状態は  $NE$ ,  $NS$ ,  $NW$ ,  $ES$ ,  $EW$ ,  $SW$  と表すことができる. いま, 六頂点モデルの state  $\varphi \in \mathcal{SV}(n)$  に対して, 各内部頂点  $(i, j) \in V_0(n)$  の

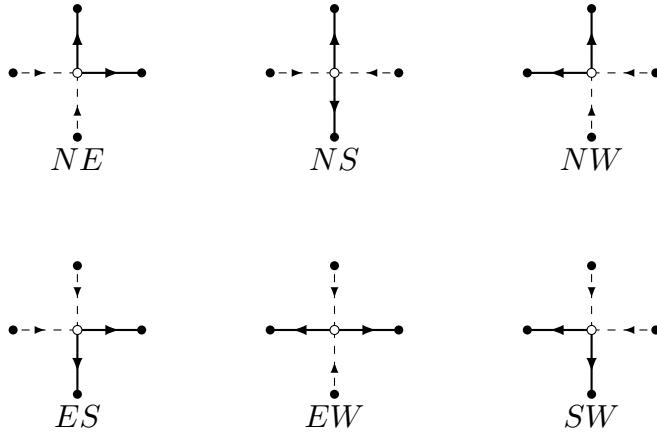


図 1.6: 内部頂点の取り得る 6 種類の choice

choice を  $\tilde{\varphi}(i, j)$  とおく. 内部頂点  $(i, j) \in V_0(n)$  の choice に基づいて  $(i, j)$ -成分を決定することで以下のように正方行列を定める.

**Definition 1.1.2.**  $n$  次正方行列全体の成す集合を  $M_n$  とする. このとき, 写像  $\mathfrak{m}: \mathcal{SV}(n) \rightarrow M_n$  を任意の  $\varphi \in \mathcal{SV}(n)$  に対して, 以下で定める:  $\mathfrak{m}(\varphi) = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$

としたとき,

$$a_{i,j} := \begin{cases} 1 & \tilde{\varphi}(i,j) = NE, \\ -1 & \tilde{\varphi}(i,j) = EW, \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (1 \leq i, j \leq n). \quad (1.1.2)$$

写像  $\mathbf{m}: \mathcal{SV}(n) \rightarrow M_n$  について, 以下の主張が成り立つ.

**Proposition 1.1.1.** 任意の  $\varphi \in \mathcal{SV}(n)$  に対して,  $\mathbf{m}(\varphi)$  は  $n$  次の交代符号行列である.

*Proof.* 任意の  $\varphi \in \mathcal{SV}(n)$  に対して, 行列  $\mathbf{m}(\varphi) = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  が交代符号行列の条件を満たすことを示す. まず,  $1 \leq i \leq n$  をみたす  $i$  をひとつ任意にとる. このとき, state  $\varphi$ において, 2 本の水平な辺  $\{(i,j), (i, j-1)\}$  および  $\{(i,j), (i, j+1)\}$  のみに着目すると  $a_{i,j}$  の値が以下の通りとなる:

- (i)  $\{(i,j), (i, j-1)\}$  が東向き, かつ,  $\{(i,j), (i, j+1)\}$  が西向きのとき,  $a_{i,j} = 1$ ,
- (ii)  $\{(i,j), (i, j-1)\}$  が西向き, かつ,  $\{(i,j), (i, j+1)\}$  が東向きのとき,  $a_{i,j} = -1$
- (iii) それ以外のとき,  $a_{i,j} = 0$

いま, domain-wall boundary condition より, 条件 (i) をみたす  $j$  が存在する. さらに, 条件 (i) または (ii) のいずれかを満たす  $j$  のうち, 最小の  $j$  および最大の  $j$  は条件 (i) を満たす. よって,  $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  の  $i$  行目において, 0 でない成分のうち, 最初に現れる成分と最後に現れる成分は 1. また, 条件 (i) を満たす  $j$  と条件 (ii) を満たす  $j$  は交互に現れるので,  $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  の  $i$  行目において, 0 を除いて 1 と  $-1$  が交互に現れる. 従って,  $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  は  $i$  行目に関する条件をみたす. 任意の  $i$  について成り立つので, 交代符号行列の行に関する条件は示せた. 列に関する条件も同様に示せる.  $\square$

ここで,  $(a_{i,j}, c_{i,j}, r_{i,j})$  という 3 つの整数から成る組を導入する.

**Lemma 1.1.1.**  $n$  を正の整数とする. 任意の  $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{A}_n$  および  $1 \leq i, j \leq n$  をみたす任意の  $i, j$  に対して,  $c_{i,j} := \sum_{1 \leq k \leq i} a_{k,j}$ ,  $r_{i,j} := \sum_{1 \leq l \leq j} a_{i,l}$  とおく. このとき, 3 つの整数の組  $(a_{i,j}, c_{i,j}, r_{i,j})$  は  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 1)$ ,  $(-1, 0, 0)$  の 6 種類のいずれかとなる.

*Proof.*  $a_{i,j} = 1$  ならば  $c_{i,j} = r_{i,j} = 1$  となること,  $a_{i,j} = -1$  ならば  $c_{i,j} = r_{i,j} = 0$  となることを示せばよい. まず,  $a_{1,j} = 1$  ならば  $c_{1,j} = 1$  は定義より従う.  $i > 1$  のときに  $a_{i,j} = 1$  ならば  $c_{i,j} = 1$  を示す. 条件 (1.1.1b) より,  $c_{i-1,j} \in \{0, 1\}$ .  $a_{i,j} = 1$  とき,  $c_{i,j} = c_{i-1,j} + 1 \in \{0, 1\}$  となり,  $c_{i-1,j} = 0$  かつ  $c_{i,j} = 1$  が従う. 上記の議論の  $c_{i-1,j}$  を  $r_{i,j-1}$  に取り替えることで  $a_{i,j} = 1$  ならば  $r_{i,j} = 1$  が従う.  $a_{i,j} = -1$  ならば  $c_{i,j} = r_{i,j} = 0$  も同様の議論から従う.  $\square$

いま, 6種類の組  $(a_{i,j}, c_{i,j}, r_{i,j})$  と内部頂点  $(i, j)$  の 6種類の choice を 1対1に関連づけることを目指す. このとき, 以下の主張が成り立つ.

**Proposition 1.1.2.** 任意の  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  に対して, 以下を満たす  $\varphi \in \mathcal{SV}(n)$  が一意的に存在する: 任意の内部頂点  $(i, j)$  について,

$$\tilde{\varphi}(i, j) = \begin{cases} NE & (a_{i,j}, c_{i,j}, r_{i,j}) = (0, 0, 0) \text{ のとき,} \\ NW & (a_{i,j}, c_{i,j}, r_{i,j}) = (0, 0, 1) \text{ のとき,} \\ ES & (a_{i,j}, c_{i,j}, r_{i,j}) = (0, 1, 0) \text{ のとき,} \\ SW & (a_{i,j}, c_{i,j}, r_{i,j}) = (0, 1, 1) \text{ のとき,} \\ NS & (a_{i,j}, c_{i,j}, r_{i,j}) = (1, 1, 1) \text{ のとき,} \\ EW & (a_{i,j}, c_{i,j}, r_{i,j}) = (-1, 0, 0) \text{ のとき.} \end{cases} \quad (1.1.3)$$

*Proof.* 任意の  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  および  $1 \leq i, j \leq n$  を満たす  $i, j$  に対して, 組  $(a_{i,j}, c_{i,j}, r_{i,j})$  から内部頂点  $(i, j)$  の状態を定めることで open boundary condition を持つ  $L_n$  上の六頂点モデルの state が定まることを示す. この方法では, 垂直な辺  $\{(i, j), (i+1, j)\}$  の向きは 2つの組  $(a_{i,j}, c_{i,j}, r_{i,j})$  と  $(a_{i+1,j}, c_{i+1,j}, r_{i+1,j})$  から, 水平な辺  $\{(i, j), (i, j+1)\}$  の向きは 2つの組  $(a_{i,j}, c_{i,j}, r_{i,j})$  と  $(a_{i,j+1}, c_{i,j+1}, r_{i,j+1})$  からのそれぞれ 2通りの方法で与えられる. まず, これらの 2通りの方法が同じ向きを与えることを示す. いま, 内部頂点に接続する 4本の辺はそれぞれ, 組  $(a_{i,j}, c_{i,j}, r_{i,j})$  から以下のように向きが与えられる:

- (i) 垂直な辺  $\{(i, j), (i+1, j)\}$  について, 南向きとなるのは  $c_{i,j} = 1$  のとき, かつ, 北向きとなるのは  $c_{i,j} = 0$  のとき,
- (ii) 水平な辺  $\{(i, j), (i, j+1)\}$  について, 東向きとなるのは  $r_{i,j} = 0$  のとき, かつ, 西向きとなるのは  $r_{i,j} = 1$  のとき,
- (iii) 垂直な辺  $\{(i, j), (i-1, j)\}$  について, 南向きとなるのは  $c_{i,j} - a_{i,j} = 1$  のとき, かつ, 北向きとなるのは  $c_{i,j} - a_{i,j} = 0$  のとき,
- (iv) 水平な辺  $\{(i, j), (i, j-1)\}$  について, 東向きとなるのは  $r_{i,j} - a_{i,j} = 0$  のとき, かつ, 西向きとなるのは  $r_{i,j} - a_{i,j} = 1$  のとき.

表 1.1において, 内部頂点  $(i, j)$  の 6種類の各 choice における 4種類の値  $c_{i,j}, r_{i,j}, c_{i,j} - a_{i,j}, r_{i,j} - a_{i,j}$  を記す.

垂直な辺  $\{(i, j), (i+1, j)\}$  の向きについて,  $c_{i+1,j} - a_{i+1,j} = c_{i,j}$  なので 2通りの定め方は一致する. また, 水平な辺  $\{(i, j), (i, j+1)\}$  の向きについて,  $r_{i,j+1} - a_{i,j+1} = r_{i,j}$  なので 2通りの定め方は一致する. よって, 任意の  $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \mathcal{A}_n$  に対して, 命題 1.1.2 の方法で矛盾なく  $L_n$  上の六頂点モデルの向き付けが得られる. 定め方から, この向き付けは六頂点モデルの state になっている. あとは, この方法で得られた state が open

	NE	NS	NW	ES	EW	SW
$r_{i,j} - a_{i,j}$	0	0	1	0	1	1
$r_{i,j}$	0	1	1	0	0	1
$c_{i,j} - a_{i,j}$	0	0	0	1	1	1
$c_{i,j}$	0	1	0	1	0	1

表 1.1: 内部頂点  $(i, j)$  の 6 の各 choice における 4 種類の値

boundary condition を持つことを示せば良い.  $1 \leq i \leq n$  を満たす任意の  $i$  に対して, 定め方から  $r_{i,1} - a_{i,1} = 0$  となり,  $n$  本の水平な境界辺  $e_2, e_3, \dots, e_{n+1}$  は東向きとなる. また,  $1 \leq j \leq n$  を満たす任意の  $j$  に対して, 定め方から  $c_{1,j} - a_{1,j} = 0$  となり,  $n$  本の垂直な境界辺  $e_{3n+2}, e_{3n+3}, \dots, e_{4n}$  および  $e_1$  は北向きとなる. 一方で, 交代符号行列の条件 (1.1.1c) より,  $n$  本の水平な境界辺  $e_{n+2}, e_{n+3}, \dots, e_{2n+1}$  は南向きとなり,  $n$  本の垂直な境界辺  $e_{2n+2}, e_{2n+3}, \dots, e_{3n+1}$  は西向きとなる. 従って, この方法で得られた state は open boundary condition を持つ.  $\square$

命題 1.1.2 における対応  $A \mapsto \varphi$  によって写像  $\mathbf{n}: \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{SV}(n)$  を定める. このとき, 本論文第 1 章の主結果として, 次の定理が成り立つ.

**Theorem 1.1.1** (大本 [13]).  $n$  を正の整数とする. 写像  $\mathbf{m}: \mathcal{SV}(n) \rightarrow \mathcal{A}_n$  は全単射である. また, 写像  $\mathbf{m}$  と写像  $\mathbf{n}: \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{SV}(n)$  は互いに逆写像の関係である.

*Proof.*  $\varphi \in \mathcal{SV}(n)$  をひとつ任意にとる.  $\mathbf{m}(\varphi) = (a_{i,j})_{\leq i, j \leq n}$  とおいたとき, 以下が成り立つことを示す:

$$(a_{i,j}, c_{i,j}, r_{i,j}) = \begin{cases} (0, 0, 0) & \tilde{\varphi}(i, j) = NE \text{ のとき}, \\ (0, 0, 1) & \tilde{\varphi}(i, j) = NW \text{ のとき}, \\ (0, 1, 0) & \tilde{\varphi}(i, j) = ES \text{ のとき}, \\ (0, 0, 1) & \tilde{\varphi}(i, j) = SW \text{ のとき}, \\ (1, 1, 1) & \tilde{\varphi}(i, j) = NS \text{ のとき}, \\ (-1, 0, 0) & \tilde{\varphi}(i, j) = EW \text{ のとき}. \end{cases} \quad (1.1.4)$$

まず, 補題 1.1.1 より,  $\tilde{\varphi}(i, j) = NS$  ならば  $(a_{i,j}, c_{i,j}, r_{i,j}) = (1, 1, 1)$ , かつ,  $\tilde{\varphi}(i, j) = EW$  ならば  $(a_{i,j}, c_{i,j}, r_{i,j}) = (-1, 0, 0)$  となることが従う.

さて, state  $\varphi$  において, 以下が成り立つ:

- (i)  $\tilde{\varphi}(i, j) = NE$  のとき, ある  $i_1 > i$  およびある  $j_1 > j$  が存在して,  $\{(k, j), (k+1, j)\}$  が北向き ( $i \leq k < i_1$ ),  $\{(i_1, j), (i_1+1, j)\}$  が南向き,  $\{(i, l), (i, l+1)\}$  が東向き ( $j \leq l < j_1$ ),  $\{(i, j_1), (i, j_1+1)\}$  が西向き,

- (ii)  $\tilde{\varphi}(i, j) = NW$  のとき, ある  $i_1 > i$  およびある  $j_0 < j$  が存在して,  $\{(k, j), (k+1, j)\}$  が北向き ( $i \leq k < i_1$ ),  $\{(i_1, j), (i_1 + 1, j)\}$  が南向き,  $\{(i, l), (i, l - 1)\}$  が西向き ( $j_0 < l \leq j$ ),  $\{(i, j_0), (i, j_0 - 1)\}$  が東向き,
- (iii)  $\tilde{\varphi}(i, j) = ES$  のとき, ある  $i_0 < i$  およびある  $j_1 > j$  が存在して,  $\{(k, j), (k-1, j)\}$  が南向き ( $i_0 < k < i$ ),  $\{(i_0, j), (i_0 - 1, j)\}$  が北向き,  $\{(i, l), (i, l + 1)\}$  が東向き ( $j \leq l < j_1$ ),  $\{(i, j_1), (i, j_1 + 1)\}$  が西向き,
- (iv)  $\tilde{\varphi}(i, j) = SW$  のとき, ある  $i_0 < i$  およびある  $j_0 < j$  が存在して,  $\{(k, j), (k-1, j)\}$  が南向き ( $i_0 < k < i$ ),  $\{(i_0, j), (i_0 - 1, j)\}$  が北向き,  $\{(i, l), (i, l - 1)\}$  が西向き ( $j_0 < l \leq j$ ),  $\{(i, j_0), (i, j_0 - 1)\}$  が東向き.

いま, ある  $i_1 > i$  が存在して,  $\{(k, j), (k+1, j)\}$  が北向き ( $i \leq k < i_1$ ), かつ,  $\{(i_1, j), (i_1 + 1, j)\}$  が南向きならば,  $a_{k,j} = 0$  ( $i \leq k < i_1$ ) かつ,  $a_{i_1,j} = 1$ . このとき,  $c_{i,j} = 0$  が従う. 一方で, ある  $i_0 < i$  が存在して,  $\{(k, j), (k-1, j)\}$  が南向き ( $i_0 < k \leq i$ ), かつ,  $\{(i_1, j), (i_0 - 1, j)\}$  が北向きならば,  $a_{k,j} = 0$  ( $i_0 < k \leq i$ ) かつ,  $a_{i_0,j} = 1$ . このとき,  $c_{i,j} = 1$  が従う. 水平方向の辺についての同様の議論と合わせて, (1.1.4) が従う. よって, 写像  $\mathbf{n}: \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{SV}(n)$  は定め方から, 写像  $\mathbf{m}: \mathcal{SV}(n) \rightarrow \mathcal{A}_n$  の逆写像となることは明らか.  $\square$

内部頂点  $(i, j)$  の 6 種類の choice と  $(a_{i,j}, c_{i,j}, r_{i,j})$  の 6 種類の値は 1 対 1 に対応しており, その対応を図 1.7 において図示する. 上記の議論より, 以下の主張が従う.

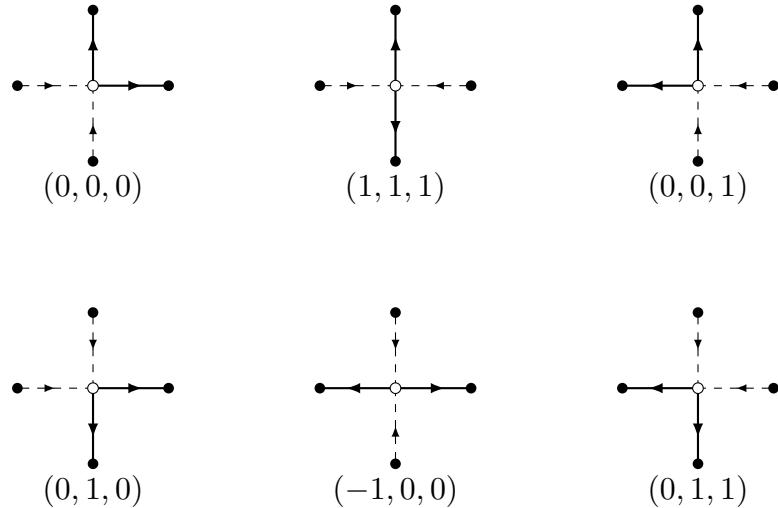


図 1.7: 内部頂点  $(i, j)$  の状態と  $(a_{i,j}, c_{i,j}, r_{i,j})$  の対応

**Corollary 1.1.1.** 任意の  $\varphi \in \mathcal{SV}(n)$  および  $1 \leq i, j \leq n$  を満たす任意の  $i, j$  に対して, 以下が成り立つ:  $\mathbf{m}(\varphi) = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  とおくと,

- $i$  本の水平な辺  $\{(k, j), (k, j + 1)\}$  ( $1 \leq k \leq i$ ) のうち, 東向きの辺の本数は  $\left(i - \sum_{1 \leq k \leq i} r_{k,j}\right)$  と等しい,
- $j$  本の垂直な辺  $\{(i, l), (i + 1, l)\}$  ( $1 \leq l \leq j$ ) のうち, 南向きの辺の本数は  $\sum_{1 \leq l \leq j} c_{i,l}$  と等しい.

## 1.2 高さ関数

$m$  と  $n$  を正の整数とする. この節では,  $L_{m,n}$  上の六頂点モデルの state に対して, 各内部頂点の状態から成分を定める方法とは異なる方法で,  $(m + 1) \times (n + 1)$  行列を対応させる. 特に, domain-wall boundary condition を持つ  $L_n$  上の六頂点モデルの state に対して, 交代符号行列とは異なるクラスの, 高さ関数と呼ばれる  $(n + 1)$  次正方行列を対応させる.

### 1.2.1 六頂点モデルの境界条件の性質

ここでは, 六頂点モデルの state に行列を対応させるための準備として, domain-wall boundary condition が仮定されていないより一般的な六頂点モデルの state, 即ち, 任意の内部頂点が 2-in-2-out であるという条件のみが仮定されたグラフ  $L_{m,n}$  の向き付けが与えられた際に, 境界条件が満たすべき条件について述べる. まず,  $1 \leq i_0 \leq i_1 \leq m$  を満たす任意の  $i_0, i_1$  および  $1 \leq j_0 \leq j_1 \leq n$  を満たす任意の  $j_0, j_1$  に対して,  $L_{m,n}$  の部分グラフ  $L_{i_0; i_1, j_0; j_1} = (V_0(i_0; i_1, j_0; j_1) \sqcup V_1(i_0; i_1, j_0; j_1), E)$  を以下のように定める:

$$\begin{aligned} V_0(i_0; i_1, j_0; j_1) &:= \{(i, j) \mid i_0 \leq i \leq i_1, j_0 \leq j \leq j_1\}, \\ V_1(i_0; i_1, j_0; j_1) &:= \{(i, j) \mid i_0 \leq i \leq i_1, j \in \{j_0 - 1, j_1 + 1\}\} \\ &\quad \sqcup \{(i, j) \mid i \in \{i_0 - 1, i_1 + 1\}, j_0 \leq j \leq j_1\}, \\ E &:= \{\{(i, j), (i, j + 1)\} \mid i_0 \leq i \leq i_1, j_0 - 1 \leq j \leq j_1\} \\ &\quad \sqcup \{\{(i, j), (i + 1, j)\} \mid i_0 - 1 \leq i \leq i_1, j_0 \leq j \leq j_1\}. \end{aligned}$$

$V_1(i_0; i_1, j_0; j_1)$  を  $L_{i_0; i_1, j_0; j_1}$  の境界点と呼ぶ. また, それらの点のいずれかに接続する  $L_{i_0; i_1, j_0; j_1}$  の辺を  $L_{i_0; i_1, j_0; j_1}$  の境界辺と呼ぶ. さて, 六頂点モデルの境界条件について以下の主張が成り立つ.

**Proposition 1.2.1.**  $m$  と  $n$  を正の整数とする. グラフ  $L_{m,n}$  上の六頂点モデルの任意の state において, 境界点を終点とするような境界辺はちょうど  $(m + n)$  本現れる.

*Proof.*  $\varphi$  を  $L_{m,n}$  上の六頂点モデルの state とする. 帰納法を 2 回用いて示す. まず,  $m = 1$  のときに命題 1.2.1 が任意の  $n$  に対して成り立つことを  $n$  に関する帰納法で示

す.  $n = 1$  のとき, 定義より明らか.  $n > 1$  のとき,  $(n - 1)$  まで主張が成り立つと仮定する. 帰納法の仮定より,  $L_{1;1,1;n-1}$  において, ちょうど  $n$  本の境界辺が境界点を終点としている. いま, 水平な辺  $\{(1, n-1), (1, n)\}$  が東向きのとき,  $L_{1,n}$  の 3 本の境界辺  $e_{n+2} = \{(1, n), (2, n)\}$ ,  $e_{n+3} = \{(1, n), (1, n+1)\}$  および  $e_{n+4} = \{(1, n), (0, n)\}$  のうちちょうど 2 本が境界点を終点としている. このとき,  $L_{1,n}$  の  $(2n-1)$  本の境界辺  $e_k$  ( $1 \leq k \leq 2n+2$ ,  $k \neq n+2, n+3, n+4$ ) のうち, ちょうど  $(n-1)$  本が境界点を終点としている. 一方で, 水平な辺  $\{(1, n-1), (1, n)\}$  が西向きのとき,  $L_{1,n}$  の 3 本の境界辺  $e_{n+2}$ ,  $e_{n+3}$  および  $e_{n+4}$  のうちちょうど 1 本が境界点を終点としている. このとき,  $L_{1,n}$  の  $(2n-1)$  本の境界辺  $e_k$  ( $1 \leq k \leq 2n+2$ ,  $k \neq n+2, n+3, n+4$ ) のうち, ちょうど  $n$  本が境界点を終点としている. よって,  $L_{1,n}$  の  $(2n+2)$  本の境界辺のうちちょうど  $(n+1)$  本の境界辺が境界点を終点としている. 従って,  $m = 1$  のときに命題 1.2.1 が任意の  $n$  に対して成り立つ.

次に,  $m > 1$  のときに命題 1.2.1 が  $(m-1)$  および任意の  $n$  に対して成り立つことを仮定する. いま,  $n$  本の垂直な辺  $\{(m-1, j), (m, j)\}$  ( $1 \leq j \leq n$ ) のうちちょうど  $l$  本が南向きであるとする. このとき,  $L_{m;m,1;n}$  において,  $e_i$  ( $m+1 \leq i \leq m+n+2$ ) のうち, ちょうど  $(l+1)$  本が境界点を終点としている. また,  $L_{1;m-1,1;n}$  において, 帰納法の仮定より,  $(2m+n-2)$  本の境界辺  $e_j$  ( $1 \leq j \leq m$  または  $m+n+3 \leq j \leq 2m+2n$ ) のうち, ちょうど  $(m+n-l-1)$  本が境界点を終点としている. よって,  $L_{m,n}$  の  $(2m+2n)$  本の境界辺のうちちょうど  $(m+n)$  本が境界点を終点にもつ. 従って, 命題 1.2.1 は任意の  $m, n$  に対して成り立つ.  $\square$

命題 1.2.1 の系として以下の主張が従う.

**Corollary 1.2.1.**  $n$  を正の整数とする. また,  $1 \leq k \leq n$  を満たす  $k$  をひとつ固定する. このとき, 任意の  $\varphi \in \mathcal{SV}(n)$  において,  $n$  本の垂直な辺  $\{(k, j), (k+1, j)\}$  ( $1 \leq j \leq n$ ) のうち, ちょうど  $k$  本が南向きである. また,  $n$  本の水平な辺  $\{(i, k), (i, k+1)\}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) のうち, ちょうど  $n-k$  本が東向きである.

### 1.2.2 六頂点モデルから行列へのもう一つの対応

$L_{m,n}$  上の六頂点モデルの state に対して, 隣り合う成分の差が 1 であるような  $(m+1) \times (n+1)$  行列を構成していく.

**Definition 1.2.1.**  $m$  および  $n$  を正の整数とする.  $L_{m,n}$  上の六頂点モデルの任意の state

$\varphi$  に対して,  $(m+1) \times (n+1)$  行列  $(h_{i,j})_{0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n}$  を以下のように定める:

$$h_{0,0} := 0, \quad (1.2.1a)$$

$$h_{i,j} - h_{i,j-1} := \begin{cases} 1 & \{(i,j), (i+1,j)\} \text{ が北向き} \\ -1 & \{(i,j), (i+1,j)\} \text{ が南向き} \end{cases} \quad (0 \leq i \leq m, 0 < j \leq n), \quad (1.2.1b)$$

$$h_{i,j} - h_{i-1,j} := \begin{cases} 1 & \{(i,j), (i,j+1)\} \text{ が東向き} \\ -1 & \{(i,j), (i,j+1)\} \text{ が西向き} \end{cases} \quad (0 < i \leq m, 0 \leq j \leq n). \quad (1.2.1c)$$

この方法により行列が well-defined であることを示す. まず,  $k_0, k_1, l_0$  および  $l_1$  をそれぞれ以下のようにおく:

$$k_0 := \# \{1 \leq i \leq m \mid \{(i,0), (i,1)\} \text{ が西向き}\}, \quad (1.2.2a)$$

$$k_1 := \# \{1 \leq i \leq m \mid \{(i,n), (i,n+1)\} \text{ が東向き}\}, \quad (1.2.2b)$$

$$l_0 := \# \{1 \leq j \leq n \mid \{(0,j), (1,j)\} \text{ が北向き}\}, \quad (1.2.2c)$$

$$l_1 := \# \{1 \leq j \leq n \mid \{(m,j), (m+1,j)\} \text{ が南向き}\}. \quad (1.2.2d)$$

境界辺  $e_k$  ( $m+n+2 \leq k \leq 2m+2n$ ) および  $e_1$  を用いて時計回りに  $h_{m,n}$  を定めると以下が成り立つ:

$$h_{m,n} = 2(k_1 + l_0) - (m+n). \quad (1.2.3a)$$

一方で, 境界辺  $e_k$  ( $2 \leq k \leq m+n+1$ ) を用いて反時計回りに  $h_{m,n}$  を定めると以下が成り立つ:

$$h_{m,n} = (m+n) - 2(k_0 + l_1). \quad (1.2.3b)$$

いま, 命題 1.2.1 より,  $k_0 + k_1 + l_0 + l_1 = m+n$  が従う. よって, 式 (1.2.3a) の右辺と (1.2.3b) の右辺の差は 0 となり, この 2 通りの定め方は一致する. さらに, この等式を右辺の  $(m+n)$  に代入することで以下の式を得る:

$$h_{m,n} = -k_0 + k_1 + l_0 - l_1. \quad (1.2.3c)$$

さて,  $1 \leq i_0 \leq m$  を満たす  $i_0$  および  $1 \leq j_0 \leq n$  を満たす  $j_0$  をそれぞれ任意にとる. このとき, グラフ  $L_{1;i_0,1;j_0}$  を用いて得られた  $h_{i_0,j_0}$  の値と,  $L_{i_0+1;m,j_0+1;n}$  を用いて得られた  $h_{m,n} - h_{i_0,j_0}$  の値が矛盾しないことを示せばよい. ここで,  $k_i$  および  $l_i$  ( $2 \leq i \leq 5$ )

を以下のようにおく:

$$k_2 := \#\{1 \leq i \leq i_0 \mid \{(i, 0), (i, 1)\} \text{ が西向き}\}, \quad (1.2.4a)$$

$$k_3 := \#\{1 \leq i \leq i_0 \mid \{(i, j_0), (i, j_0 + 1)\} \text{ が東向き}\}, \quad (1.2.4b)$$

$$k_4 := \#\{i_0 < i \leq m \mid \{(i, j_0), (i, j_0 + 1)\} \text{ が西向き}\}, \quad (1.2.4c)$$

$$k_5 := \#\{i_0 < i \leq m \mid \{(i, n), (i, n + 1)\} \text{ が東向き}\}, \quad (1.2.4d)$$

$$l_2 := \#\{1 \leq j \leq j_0 \mid \{(0, j), (1, j)\} \text{ が北向き}\}, \quad (1.2.4e)$$

$$l_3 := \#\{1 \leq j \leq j_0 \mid \{(i_0, j), (i_0 + 1, j)\} \text{ が南向き}\}, \quad (1.2.4f)$$

$$l_4 := \#\{j_0 < j \leq n \mid \{(i_0, j), (i_0 + 1, j)\} \text{ が北向き}\}, \quad (1.2.4g)$$

$$l_5 := \#\{j_0 < j \leq n \mid \{(m, j), (m + 1, j)\} \text{ が南向き}\}, \quad (1.2.4h)$$

$$(1.2.4i)$$

各  $k_i$  および  $l_i$  ( $2 \leq i \leq 5$ ) の置き方について, 図 1.8 を参照せよ. いま, グラフ  $L_{1;i_0,1;j_0}$

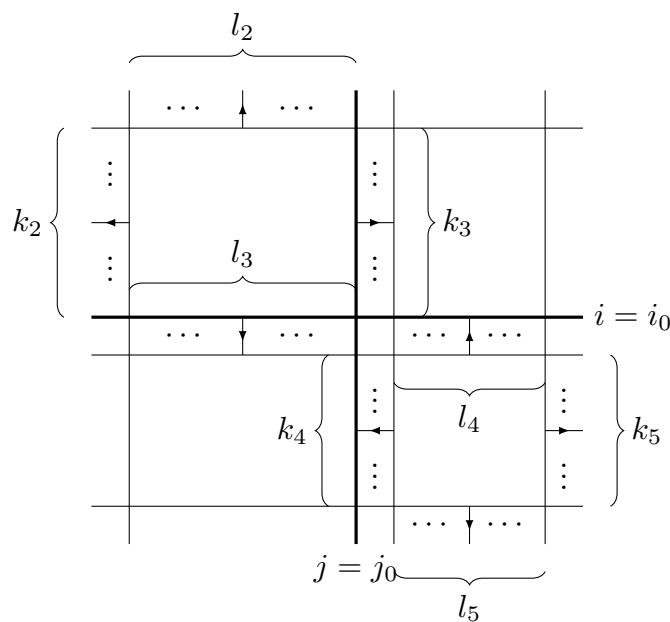


図 1.8:  $k_i$  および  $l_i$  ( $1 \leq i \leq 5$ )

を用いると, 以下が成り立つ:

$$h_{i_0, j_0} = -k_2 + k_3 + l_2 - l_3. \quad (1.2.5)$$

一方で, グラフ  $L_{i_0+1;m,j_0+1;n}$  を用いると, 以下が成り立つ:

$$h_{m,n} - h_{i_0, j_0} = -k_4 + k_5 + l_4 - l_5. \quad (1.2.6)$$

このとき,

$$\begin{aligned}
 & ((1.2.5) \text{ の右辺}) + ((1.2.6) \text{ の右辺}) - ((1.2.3c) \text{ の右辺}) \\
 & = k_0 - k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + k_5 - l_0 + l_1 + l_2 - l_3 + l_4 - l_5 \\
 & = (k_0 - k_2 - k_4 + l_1 - l_3 - l_5) - (k_1 - k_3 - k_5 + l_0 - l_2 - l_4)
 \end{aligned}$$

ここで,  $L_{1;m,j_0+1;n}$  および  $L_{i_0+1;m,1;j_0}$  においてそれぞれ補題??を適用すると, 以下が従う:

$$k_1 - k_3 - k_5 + l_0 - l_2 - l_4 = 0, \quad (1.2.7)$$

$$k_0 - k_2 - k_4 + l_1 - l_3 - l_5 = 0. \quad (1.2.8)$$

よって,  $((1.2.5) \text{ の右辺}) + ((1.2.6) \text{ の右辺}) - ((1.2.3c) \text{ の右辺}) = 0$  となり, グラフ  $L_{1;i_0,1;j_0}$  を用いて得られた  $h_{i_0,j_0}$  の値と,  $L_{i_0+1;m,j_0+1;n}$  を用いて得られた  $h_{m,n} - h_{i_0,j_0}$  の値が矛盾しないことが示せた.

### 1.2.3 高さ関数

ここで, サイズ  $n$  の高さ関数と呼ばれる  $(n+1)$  次正方行列を定義する.

**Definition 1.2.2.**  $n$  を正の整数とする.  $(n+1)$  次正方行列  $H = (h_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$  が以下の条件を満たすとき, サイズ  $n$  の高さ関数 (height function) と呼ぶ:

$$|h_{i,j} - h_{i,j-1}| = 1 \quad (0 \leq i \leq n, 0 < j \leq n), \quad (1.2.9a)$$

$$|h_{i,j} - h_{i-1,j}| = 1 \quad (0 < i \leq n, 0 \leq j \leq n), \quad (1.2.9b)$$

$$h_{k,0} = h_{0,k} = h_{n-k,n} = h_{n,n-k} = k \quad (0 \leq k \leq n). \quad (1.2.9c)$$

特に, 条件 (1.2.9a) および (1.2.9b) を高さ関数の隣接条件と呼び, 条件 (1.2.9c) を高さ関数の境界条件と呼ぶ. サイズ  $n$  の高さ関数全体の成す集合を  $\mathcal{H}_n$  とおく. また, 集合  $\mathcal{H}_n$  において, 高さ関数  $H = (h_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$  および  $G = (g_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$  が  $0 \leq i, j \leq n$  を満たす任意の  $i, j$  に対して,  $h_{i,j} \leq g_{i,j}$  が成り立つとき,  $H \leq G$  という半順序が定まる. ここで, 写像  $\mathfrak{h}: \mathcal{SV}(n) \rightarrow \mathcal{H}_n$  を以下のように定める.

**Definition 1.2.3.** 各  $\varphi \in \mathcal{SV}(n)$  に対して,  $\mathfrak{h}(\varphi) = (h_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$  を以下のように定める.

める:

$$h_{0,0} := 0, \quad (1.2.10a)$$

$$h_{i,j} - h_{i,j-1} := \begin{cases} 1 & \{(i,j), (i+1,j)\} \text{ が北向き} \\ -1 & \{(i,j), (i+1,j)\} \text{ が南向き} \end{cases} \quad (0 \leq i \leq n, 0 < j \leq n), \quad (1.2.10b)$$

$$h_{i,j} - h_{i-1,j} := \begin{cases} 1 & \{(i,j), (i,j+1)\} \text{ が東向き} \\ -1 & \{(i,j), (i,j+1)\} \text{ が西向き} \end{cases} \quad (0 < i \leq n, 0 \leq j \leq n). \quad (1.2.10c)$$

今までの議論より, 行列は一意に定まる. また,  $\varphi$  の open boundary condition より, 行列  $(h_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$  は高さ関数の境界条件 (1.2.9c) を満たす. よって, 写像  $\mathfrak{h}(\varphi) = (h_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$  は well-defined である. このとき, 以下の主張が成り立つ.

**Proposition 1.2.2.** 写像  $\mathfrak{h}: \mathcal{SV}(n) \rightarrow \mathcal{H}_n$  は全单射である.

*Proof.* 定め方から单射であることは明らか. 全射であることを示せばよい. まず, 任意の  $H = (h_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$  に対して, 隣り合う成分の差を比較することで  $L_n$  の向き付けが得られることは明らか. このとき, 得られた向き付けを  $\varphi$  とおくと,  $\varphi$  が open boundary condition を持つことも高さ関数の境界条件 (1.2.9c) から従う. 得られた向き付け  $\varphi$  において, 任意の内部頂点  $(i,j)$  が 2-in-2-out であることを示せばよい. 内部頂点  $(i,j)$  に接続する 4 本の辺の向きは,  $h_{i-1,j-1}$ ,  $h_{i-1,j}$ ,  $h_{i,j}$  および  $h_{i,j-1}$  の 4 つの成分を用いて決定される. いま,  $h_{i-1,j-1} = k$  とおくと,  $\mathbf{h} = (h_{i-1,j}, h_{i,j}, h_{i,j-1})$  は以下の 6 つのいずれかであり, それぞれの場合において, 内部頂点の状態は以下の通り:

- (i)  $\mathbf{h} = (k+1, k+2, k+1)$  のとき,  $(i,j)$  の状態は NE,
- (ii)  $\mathbf{h} = (k+1, k, k+1)$  のとき,  $(i,j)$  の状態は NS,
- (iii)  $\mathbf{h} = (k+1, k, k-1)$  のとき,  $(i,j)$  の状態は NW,
- (iv)  $\mathbf{h} = (k-1, k, k+1)$  のとき,  $(i,j)$  の状態は ES,
- (v)  $\mathbf{h} = (k-1, k, k-1)$  のとき,  $(i,j)$  の状態は EW,
- (vi)  $\mathbf{h} = (k-1, k-2, k-1)$  のとき,  $(i,j)$  の状態は SW.

よって, 任意の  $H \in \mathcal{H}$  に対して, open boundary condition を持つ  $L_n$  上の六頂点モデルの state  $\varphi$  が定まる.  $\square$

#### 1.2.4 交代符号行列と高さ関数の間の全单射

今までに, 六頂点モデルの state と交代符号行列の間の全单射  $\mathfrak{m}: \mathcal{SV}(n) \rightarrow \mathcal{A}_n$  および六頂点モデルの state と高さ関数の間の全单射  $\mathfrak{h}: \mathcal{SV}(n) \rightarrow \mathcal{H}_n$  を構成してきた. これら

2つの全単射を合わせることで交代符号行列と高さ関数の間の全単射を得ることができる.

**Proposition 1.2.3.**  $n$  を正の整数とする. 任意の  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  に対して, 合成写像  $\mathfrak{m} \circ \mathfrak{h}^{-1} : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{H}_n$  における像  $\mathfrak{m} \circ \mathfrak{h}^{-1}(A)$  を  $(h_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$  とおいたとき, 以下が成り立つ:

$$h_{i,j} = i + j - 2 \sum_{1 \leq k \leq i} \sum_{1 \leq l \leq j} a_{i,j} \quad (0 \leq i, j \leq n), \quad (1.2.11a)$$

$$a_{i,j} = -\frac{1}{2} (h_{i-1,j-1} - h_{i-1,j} + h_{i,j} - h_{i,j-1}) \quad (1 \leq i, j \leq n). \quad (1.2.11b)$$

*Proof.*  $i = 0$  または  $j = 0$  のとき, 式 (1.2.11a) が成り立つのは明らか. 以下,  $1 \leq i, j \leq n$  をみたす  $i, j$  を任意に 1 つずつ固定する. このとき, 式 (1.2.3b) と同様の議論から, 以下が成り立つ:  $h_{i,j} = i + j - 2 \# \{1 \leq l \leq n \mid \{(i,j), (i+1,j)\} \text{ が南向き}\}$ . いま, 系 1.1.1 と合わせて, (1.2.11a) が従う. また, 式 (1.2.11b) は (1.2.11a) より従う.  $\square$



## 第 2 章

# 交代符号行列に関連した半順序集合 上のコイン裏返しゲーム

### 2.1 ニム和

本論文では, 佐藤 [16] で紹介されているポセットゲームの基本定理に基づいて Sprague-Grundy 関数の値を計算していく. そのための準備として, この節では, ニム和と呼ばれる非負整数全体の成す集合  $\mathbb{N}$  上の二項演算を導入していく. まず, 最小除外数を以下で定める.

**Definition 2.1.1.** 任意の真部分集合  $S \subsetneq \mathbb{N}$  に対して,  $\text{mex}(S) := \min(\mathbb{N} \setminus S)$  と定める. このとき,  $\text{mex}(S)$  を集合  $S$  の最小除外数 (minimal-excluded number) と呼ぶ.

特に,  $\text{mex}(\emptyset) = 0$  が成り立つ. さて, 2 つの真部分集合  $S, T \subsetneq \mathbb{N}$  が与えられたとき, 以下の主張が成り立つ.

**Proposition 2.1.1.**  $S$  および  $T$  を  $\mathbb{N}$  の真部分集合とする.  $S$  が  $T$  の部分集合であるとき, 以下が成り立つ:

- (i)  $\text{mex}(S) \leq \text{mex}(T)$ ,
- (ii) さらに  $\text{mex}(S) \notin T$  ならば  $\text{mex}(S) = \text{mex}(T)$ .

逆に,  $\text{mex}(S) \leq \text{mex}(T)$  であっても  $S$  が  $T$  の部分集合とは限らない.

*Proof.* まず,  $\text{mex}(S)$  の定め方から,  $S \supset \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x < \text{mex}(S)\}$  が成り立つ.  $S$  が  $T$  の部分集合のとき,  $T \supset \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x < \text{mex}(S)\}$  となり,  $\text{mex}(T) \geq \text{mex}(S)$  が従う. さらにこのとき,  $\text{mex}(S) \notin T$  ならば  $\text{mex}(S) = \text{mex}(T)$  となることも直ちに従う.

逆の反例として以下のような  $S, T \subset \mathbb{N}$  が挙げられる: ある非負整数  $m$  について,

$S = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x < m\} \cup \{m + 1\}$ ,  $T = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq m\}$ . このとき,  $\text{mex}(S) = m < \text{mex}(T)$  となるが,  $S$  は  $T$  の部分集合ではない.  $\square$

最小除外数を用いて, ニム和を以下のように帰納的に定義する.

**Definition 2.1.2.**  $a$  および  $b$  を任意の非負整数とする. このとき,  $a +^* b$  を以下で定める:

$$a +^* b := \text{mex}(\{k +^* b \mid 0 \leq k < a\} \cup \{a +^* k \mid 0 \leq k < b\}). \quad (2.1.1)$$

このとき,  $a +^* b$  を  $a$  と  $b$  の間のニム和 (nim-sum) とよぶ. また, このように定められる二項演算  $+^* : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ;  $(a, b) \mapsto a +^* b$  をニム和 (nim-addition) と呼ぶ.

いま, ニム和について以下の主張が成り立つ.

**Proposition 2.1.2.**  $(\mathbb{N}, +^*)$  はアーベル群を成す. 即ち, 任意の非負整数  $a, b$  および  $c$  に対して, 以下が成り立つ:

- (I)  $b \neq c$  ならば  $a +^* b \neq a +^* c$ ,
- (II)  $a +^* b = b +^* a$  (交換法則),
- (III)  $a +^* 0 = 0 +^* a = a$ ,
- (IV)  $a +^* a = 0$ ,
- (V)  $(a +^* b) +^* c = a +^* (b +^* c)$  (結合法則).

*Proof.* 定義より直ちに従うため, 証明は読者に委ねる.  $\square$

以下では,  $\mathbb{N}$  の有限部分集合  $P$  に対して,  $P$  の全ての元同士のニム和を  $\sum_{x \in P}^*$  と記す. 特に,  $\sum_{\emptyset}^* = 0$  である. さて, 任意の非負整数  $x$  と  $y$  のニム和の計算方法は, 以下の補題によって与えられることが知られている.

**Lemma 2.1.1.**  $x$  および  $y$  を任意の非負整数とする.  $x$  および  $y$  がそれぞれ以下のように2-進展開されているとする:  $x = \sum_{k \geq 0} x_k 2^k$ ,  $y = \sum_{k \geq 0} y_k 2^k$ . このとき, 以下が成り立つ:

$$x +^* y = \sum_{k \geq 0} z_k 2^k, \quad (2.1.2a)$$

ただし,

$$z_k = \begin{cases} 0 & x_k = y_k \text{ のとき}, \\ 1 & x_k \neq y_k \text{ のとき}, \end{cases} \quad (k \geq 0). \quad (2.1.2b)$$

さらに, 最小除外数同士のニム和について以下の補題が成り立つ.

**Lemma 2.1.2.**  $S$  および  $T$  を  $\mathbb{N}$  の任意の真部分集合とする. このとき, 以下が成り立つ:

$$\text{mex}(S) +^* \text{mex}(T) = \text{mex}(\{a +^* \text{mex}(T) \mid a \in S\} \cup \{\text{mex}(S) +^* b \mid b \in T\}). \quad (2.1.3)$$

*Proof.* まず, 命題 2.1.1 の性質 (i) より, (左辺)  $\leq$  (右辺) が従う. また, 命題 2.1.2 の性質 (I) より,  $\text{mex}(S) +^* \text{mex}(T) \notin \{a +^* \text{mex}(T) \mid a \in S\} \cup \{\text{mex}(S) +^* b \mid b \in T\}$  が成り立つ. 命題 2.1.1 の性質 (ii) より, (2.1.3) が従う.  $\square$

補題 2.1.2 を  $(n-1)$  使うことで以下の主張を得る.

**Corollary 2.1.1.**  $S_1, S_2, \dots, S_n$  を  $\mathbb{N}$  の真部分集合とする. このとき, 以下が成り立つ:

$$\sum_{1 \leq i \leq n}^* \text{mex}(S_i) = \text{mex}\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}}^* \text{mex}(S_j) +^* s \mid s \in S_i \right\}\right). \quad (2.1.4)$$

ここで, 後に対称差を用いてゲームを定義するため, 集合の対称差を導入する. 集合  $X$  の任意の部分集合  $A$  および  $B$  に対して,  $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$  を  $A \ominus B$  とおき,  $A \ominus B$  を  $A$  と  $B$  の**対称差** (symmetric difference) と呼ぶ. 対称差について, 以下の主張が成り立つ.

**Proposition 2.1.3.**  $X$  を集合とする. このとき,  $(2^X, \ominus)$  はアーベル群を成す.

*Proof.* まず, 結合法則が成り立つことを示す.  $A, B$  および  $C$  を集合  $X$  の任意の部分集合とする. このとき,

$$\begin{aligned} (A \ominus B) \ominus C &= \{x \in X \mid x \in A \ominus B \text{ かつ, } x \notin C\} \cup \{x \in X \mid x \notin A \ominus B \text{ かつ, } x \in C\} \\ &= \{x \in X \mid x \in A, \text{ かつ, } x \notin B, C\} \cup \{x \in X \mid x \in B \text{ かつ, } x \notin A, C\} \\ &\quad \cup \{x \in X \mid x \in A, B, C\} \cup \{x \in X \mid x \notin A, B, \text{ かつ, } x \in C\}. \end{aligned}$$

一方で,

$$\begin{aligned} A \ominus (B \ominus C) &= \{x \in X \mid x \in A \text{ かつ, } x \notin B \ominus C\} \cup \{x \in X \mid x \notin A \text{ かつ, } x \in B \ominus C\} \\ &= \{x \in X \mid x \in A, B, C\} \cup \{x \in X \mid x \in A \text{ かつ, } x \notin B, C\} \\ &\quad \cup \{x \in X \mid x \in B \text{ かつ, } x \notin A, C\} \cup \{x \in X \mid x \notin A, B \text{ かつ, } x \in C\}. \end{aligned}$$

よって,  $A \ominus (B \ominus C) = (A \ominus B) \ominus C$  となり, 結合法則が成り立つことが従う. 空集合を単位元を持つこと, 自分自身を逆元とすることおよび交換法則を満たすことは定義より明らか.  $\square$

また, 複数回対称差を行った際の振る舞いについて以下の主張が成り立つ.

**Proposition 2.1.4.**  $A_1, A_2, \dots, A_k$  を集合  $X$  の任意の部分集合とする. このとき, 対称差  $A_1 \ominus A_2 \ominus \dots \ominus A_k$  は,  $k$  個の集合  $A_1, A_2, \dots, A_k$  のうち, ちょうど奇数個に属する  $X$  の元全体の成す集合である.

*Proof.*  $k$  に関する帰納法で示す.  $k = 2$  のとき, 定義より明らか.  $k > 2$  のとき,  $(k-1)$  まで主張が成り立つと仮定する. このとき,

$$\begin{aligned} A_1 \ominus A_2 \ominus \cdots \ominus A_k = & \{x \in X \mid x \in A_1 \ominus A_2 \ominus \cdots \ominus A_{k-1} \text{かつ}, x \notin A_k\} \\ & \cup \{x \in X \mid x \notin A_1 \ominus A_2 \ominus \cdots \ominus A_{k-1} \text{かつ}, x \in A_k\}. \end{aligned}$$

いま, 帰納法の仮定から,  $\{x \in X \mid x \in A_1 \ominus A_2 \ominus \cdots \ominus A_{k-1} \text{かつ}, x \notin A_k\}$  は,  $(k-1)$  個の集合  $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$  のうち, ちょうど奇数個に属し,  $A_k$  に属さないような  $X$  の元全体の成す集合である. 一方で,  $\{x \in X \mid x \notin A_1 \ominus A_2 \ominus \cdots \ominus A_{k-1} \text{かつ}, x \in A_k\}$  は,  $(k-1)$  個の集合  $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$  のうち, ちょうど偶数個に属し,  $A_k$  に属するような  $X$  の元全体の成す集合である. よって,  $A_1 \ominus A_2 \ominus \cdots \ominus A_k$  は  $k$  の集合  $A_1, A_2, \dots, A_k$  のうち, ちょうど奇数個に属する  $X$  の元全体の成す集合となる.  $\square$

また, ニム和と対称差について, 以下の主張が成り立つ:

**Proposition 2.1.5.**  $X$  を集合とする. 写像  $f: X \rightarrow \mathbb{N}$  および  $X$  の任意の部分集合  $A, B$  に対して以下の式が成り立つ:

$$\sum_{x \in A \ominus B}^* f(x) = \sum_{a \in A}^* f(a) + \sum_{b \in B}^* f(b). \quad (2.1.5a)$$

特に,  $A \cap B$  が空でないとき, 任意の  $y \in A \cap B$  に対して, 以下が成り立つ:

$$\sum_{x \in A \ominus B}^* f(x) = \sum_{\substack{a \in A, \\ a \neq y}}^* f(a) + \sum_{\substack{b \in B, \\ b \neq y}}^* f(b). \quad (2.1.5b)$$

*Proof.* 命題 2.1.2 の性質 (IV) より直ちに従う.  $\square$

## 2.2 有限不偏ゲーム

この節では, 有限不偏ゲームとよばれる組合せゲームについて説明する. 組み合わせゲーム理論については, [1, 2, 6, 17, 18] などについても参照せよ.

### 2.2.1 有限不偏ゲーム

本論文で取り扱うゲームとは, 2人のプレイヤーが特定のルールに従って交互に操作を行い, 局面を移行していく過程を指す. 最後に局面を移行させたプレイヤーが勝者, 即ち, 自分の手番に局面を移行させられなくなったプレイヤーを敗者とする. 以下の条件を満たすゲームを**有限不偏ゲーム** (*finite impartial game*) という:

- (a) 各局面において, 移行できる局面はその局面の情報のみによって決定される, 即ち, サイコロを転がしたり, カードをシャッフルするなどの偶然的な要素が関わらない,
- (b) 任意の局面において, 両プレイヤーはその時点でのゲームの状態に関する全ての情報を知っている, 即ち, 伏せられたカードなどはない,
- (c) 任意の局面において, 移行可能な局面はプレイヤーによらない,
- (d) 1つの局面から移行を繰り返して到達可能な局面は高々有限個であり, 1回のプレイにおいて同じ局面は2回以上現れない.

このゲームにおいて, 任意の局面  $P$  に対し,  $P$  から1回の手順で移行できる局面全体の成す集合は一意的に定まることに注意. ここで, この不偏ゲームを2つの集合の組として以下のように表す.

**Definition 2.2.1.**  $\mathcal{P}$  を集合とする. このとき,  $\mathcal{P}$  と写像  $N: \mathcal{P} \rightarrow 2^{\mathcal{P}}$  の組  $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, N)$  を不偏ゲームと呼ぶ. このとき, 各  $P \in \mathcal{P}$  をゲーム  $\mathcal{A}$  の局面とよぶ. また, 局面  $P$  に対して,  $Q \in N(P)$  を満たす  $Q$  を  $P$  の後続局面 (option) と呼び,  $P \rightarrow Q$  と記す. 局面  $P$  が  $N(P) = \emptyset$  をみたすとき,  $P$  をゲーム  $\mathcal{A}$  の終了局面 (ending position) と呼び, 終了局面全体の成す集合を  $\epsilon$  と記す. ゲーム  $\mathcal{A}$  は2人のプレイヤーが交互に以下のような操作を繰り返し行うことで進行する:

- (i) プレイヤーは局面  $P$  に対して  $Q \in N(P)$  を1つ選択,
- (ii) 次にもう一方のプレイヤーが局面  $Q$  に対して  $R \in N(Q)$  を選択する.

上記のような, 各局面に対して後続局面を1つ選択する操作を局面の移行 (making a move) という. 終了局面に移行したとき, ゲームを終了する. このとき, 終了局面に移行したプレイヤーをこのゲームの勝者, もう一方のプレイヤーを敗者とする.

さて, 局面  $P_0 \in \mathcal{P}$  からスタートし, 2人のプレイヤーが以下のように交互に移行していく:

$$P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \cdots \rightarrow P_m.$$

$P_m$  を終了局面としたとき, 上記のような  $\{P_i\}_{0 \leq i \leq m}$  のことを,  $P_0$  を開始局面 (starting position) とする長さ  $m$  のゲーム列 (game sequence) と呼ぶ. このとき,  $P_{m-1} \rightarrow P_m$  と移行させたプレイヤーが勝者であり, もう一方が敗者である. 局面  $P \in \mathcal{P}$  を開始局面とする全てのゲーム列の長さの最大値が存在するとき, それを  $l(P)$  と定め, 局面  $P$  の長さ (length) という. 特に, 局面  $Q$  が局面  $P$  の後続局面ならば,  $l(Q) < l(P)$  となることに注意. 各局面  $P \in \mathcal{P}$  に対して,  $l(P) < \infty$  が存在するような不偏ゲーム  $\mathcal{A}$  を有限不偏ゲームという.

さて, Sprague-Grundy 関数 [7, 19] は, 最小除外数を用いて, 以下のように帰納的に定

義される。

**Definition 2.2.2.**  $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{R})$  を有限不偏ゲームとする。Sprague-Grundy 関数  $g_{\mathcal{A}}: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$  は各局面  $P$  に対して、以下のように定義される：

- (i)  $P$  が終了局面のとき,  $g_{\mathcal{A}}(P) = 0$ ,
- (ii) それ以外の時,  $g_{\mathcal{A}}(P) = \text{mex}(\{g_{\mathcal{A}}(Q) \mid Q \in N(P)\})$ .

ゲーム  $\mathcal{A}$  が明らかなとき,  $g_{\mathcal{A}}(P)$  を  $g(P)$  と書くことがある。

### 2.2.2 ゲームの和

有限不偏ゲーム  $\mathcal{A}_1$  および  $\mathcal{A}_2$  が与えられたとき、各手番において、どちらか一方の局面を移行させ、もう一方の局面を移行させないという手順によってゲームの和  $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$  が定義できる。より明確な定義は以下の通りである。

**Definition 2.2.3.**  $\mathcal{A}_1 = (\mathcal{P}_1, N_1)$  および  $\mathcal{A}_2 = (\mathcal{P}_2, N_2)$  を有限不偏ゲームとする。いま、 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$  とおく。このとき、任意の  $P = (P_1, P_2) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$  に対して、

$$N(P) := \{(Q_1, P_2) \mid Q_1 \in N(P_1)\} \cup \{(P_1, Q_2) \mid Q_2 \in N(P_2)\}$$

と定める。これにより、新たなゲーム  $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, N)$  が定まる。このゲーム  $\mathcal{A}$  を  $\mathcal{A}_1$  と  $\mathcal{A}_2$  の和といい、 $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$  と書く。

$\mathcal{A}_1$  および  $\mathcal{A}_2$  の終了局面全体の成す集合をそれぞれ  $\epsilon_1, \epsilon_2$  としたとき、 $\epsilon := \epsilon_1 \times \epsilon_2$  とおく。このとき、ゲーム  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$  の終了局面全体の成す集合は上記の  $\epsilon$  で与えられる。また、局面  $(P_1, P_2) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$  の長さ  $l(P_1, P_2)$  が  $l(P_1) + l(P_2)$  で与えられるることは定義より容易に従う。

さて、ゲームの和における Sprague-Grundy 関数について以下の主張が成り立つ。

**Theorem 2.2.1.**  $\mathcal{A}_1 = (\mathcal{P}_1, N)$  および  $\mathcal{A}_2 = (\mathcal{P}_2, N)$  を有限不偏ゲームとする。このとき、ゲームの和  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$  における Sprague-Grundy 関数は、任意の局面  $P = (P_1, P_2) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$  に対して、以下で与えられる：

$$g_{\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2}(P_1, P_2) = g_{\mathcal{A}_1}(P_1) \stackrel{*}{+} g_{\mathcal{A}_2}(P_2).$$

*Proof.*  $l(P)$  に関する帰納法で示す。まず、 $l(P) = 0$  のとき、 $P$  は終了局面である。よって、 $g_{\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2}(P_1, P_2) = g_{\mathcal{A}_1}(P_1) \stackrel{*}{+} g_{\mathcal{A}_2}(P_2) = 0$  となる。次に、 $l(P) > 0$  のとき、 $l(Q_1, Q_2) < l(P_1, P_2)$  をみたす任意の局面  $(Q_1, Q_2) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$  に対して、

$g_{\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2}(Q_1, Q_2) = g_{\mathcal{A}_1}(Q_1) +^* g_{\mathcal{A}_2}(Q_2)$  が成り立つと仮定する. いま, 定義より,

$$g_{\mathcal{A}}(P_1, P_2) = \text{mex}(\{g_{\mathcal{A}}(Q_1, P_2) \mid Q_1 \in N(P_1)\} \cup \{g_{\mathcal{A}}(P_1, Q_2) \mid Q_2 \in N(P_2)\}).$$

ここで, 任意の  $Q_1 \in N(P_1)$  および  $Q_2 \in N(P_2)$  に対して,  $l(Q_1, P_2), l(P_1, Q_2) < l(P_1, P_2)$  が成り立つことに注意. このとき, 帰納法の仮定から以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} g_{\mathcal{A}}(P_1, P_2) &= \text{mex}(\{g_{\mathcal{A}_1}(Q_1) +^* g_{\mathcal{A}_2}(P_2) \mid Q_1 \in N(P_1)\} \\ &\quad \cup \{g_{\mathcal{A}_1}(P_1) +^* g_{\mathcal{A}_2}(Q_2) \mid Q_2 \in N(P_2)\}). \end{aligned}$$

また,  $g_{\mathcal{A}_1}(P_1) = \text{mex}(\{g_{\mathcal{A}_1}(Q_1) \mid Q_1 \in N(P_1)\})$  および  $g_{\mathcal{A}_2}(P_2) = \text{mex}(\{g_{\mathcal{A}_2}(Q_2) \mid Q_2 \in N(P_2)\})$  であることに注意. いま, 補題 2.1.2 より,  $g_{\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2}(P_1, P_2) = g_{\mathcal{A}_1}(P_1) +^* g_{\mathcal{A}_2}(P_2)$  が従う.  $\square$

### 2.2.3 石取りゲーム (ニム)

ここでは, 有限不偏ゲームのひとつの例として, ニムと呼ばれる石取りゲームについて述べる. ニムとは, 石が積まれた山がいくつもあり, 2人のプレイヤーが交互に山から石を取り去るゲームである. 山の数を  $n$  とし,  $i$  番の山の石の数を  $m_i$  とする ( $1 \leq i \leq n$ ). プレイヤーは山をひとつ選び, その山を  $i$  番目の山とすると,  $m_i$  個の石から 1 個以上  $m_i$  個以下の好きな数だけ石を取り去る. 定義 2.2.1 の作法に従うと, ニムは以下のように説明される.

**Definition 2.2.4 (ニム).** 正の整数  $n$  をひとつ固定する.  $\mathcal{A}_n^{\text{Nim}} = (\mathcal{P}_n^{\text{Nim}}, N_n^{\text{Nim}})$  を以下で定める.  $\mathcal{P}_n^{\text{Nim}}$  は  $n$  個の非負整数の組全体, 即ち,  $\mathcal{P}_n^{\text{Nim}} := \{(m_1, m_2, \dots, m_n) \mid m_i \in \mathbb{N} (1 \leq i \leq n)\}$ . 局面  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$  において, 後続局面全体の集合  $N(m_1, m_2, \dots, m_n)$  は以下のように表される:

$$N(m_1, m_2, \dots, m_n) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \{(m_1, \dots, m_{i-1}, k_i, m_{i+1}, \dots, m_n) \mid 0 \leq k_i < m_i\}.$$

これにより, ゲーム  $\mathcal{A}_n^{\text{Nim}} = (\mathcal{P}_n^{\text{Nim}}, N_n^{\text{Nim}})$  が定まる. このようなゲームを  $n$  山ニム ( $n$ -heap Nim) と呼ぶ.

$n$  山ニムの終了局面全体の集合  $\epsilon_n^{\text{Nim}}$  は  $\{(0, 0, \dots, 0)\}$  となる. さて, ニムの Sprague-Grundy 関数について以下の主張が成り立つ.

**Theorem 2.2.2.**  $n$  を正の整数とし,  $\mathcal{A}_n^{\text{Nim}} = (\mathcal{P}_n^{\text{Nim}}, \mathcal{R}_n^{\text{Nim}})$  をニムとする. 任意の局面  $P = (m_1, m_2, \dots, m_n)$  の Sprague-Grundy 関数の値は以下で与えられる:

$$g(P) = \sum_{1 \leq i \leq n}^* m_i.$$

*Proof.* まず,  $n = 1$  のときに, 任意の非負整数  $m_1$  に対して  $g(m_1) = m_1$  が成り立つことを帰納法で示す.  $m_1 = 0$  のとき, 局面 (0) は終了局面なので  $g(0) = 0$  が成り立つ.  $m_1$  のとき,  $k < m_1$  を満たす任意の  $k$  について  $g(k) = k$  が成り立つと仮定する. このとき, 定義より,  $g(m_1) = \text{mex}(\{g(k) \mid 0 \leq k < m\})$  が成り立つ. 帰納法の仮定より,  $g(m_1) = \text{mex}(\{k \mid 0 \leq k < m\}) = m$  となる. よって,  $n = 1$  のとき, 任意の非負整数  $m_1$  に対して  $g(m_1) = m_1$  となることが示せた.  $n > 1$  のときに,  $(n-1)$  まで主張が成り立つと仮定する. 二ム  $\mathcal{A}_n^{\text{Nim}}$  は  $\mathcal{A}_{n-1}^{\text{Nim}}$  と  $\mathcal{A}_1^{\text{Nim}}$  のゲームの和とみなせるので, 帰納法の仮定より  $g(m_1, m_2, \dots, m_n) = \sum_{1 \leq i \leq n}^* m_i$  が従う. よって, 任意の正の整数  $n$  に対して主張が成り立つことが示せた.  $\square$

## 2.3 半順序集合

この節では, Stanley [20] に基づいて半順序集合に関する基本的な用語を述べたのち, 交代符号行列に関する半順序集合について述べる.

### 2.3.1 半順序集合

半順序集合 (partially ordered set)  $P$  とは, 任意の  $x, y, z \in P$  に対して, 以下の 3 つの公理を満たす  $P$  上の 2 項関係  $\leq$  を備えた集合  $P$  のことをいう:

- (P1)  $x \leq x$ ,
- (P2)  $x \leq y$  かつ,  $y \leq x$  ならば  $x = y$ ,
- (P3)  $x \leq y$  かつ,  $y \leq z$  ならば  $x \leq z$ .

このような 2 項関係を集合  $P$  上の半順序 (partial order) という. 半順序を強調したいとき, 半順序集合  $P$  を  $(P, \leq_P)$  あるいは  $(P, \leq)$  と書くこともある. また, 半順序集合はポセット (poset) と呼ぶこともある. 3 つの公理 (P1), (P2) および (P3) をそれぞれ, 反射律 (reflectivity), 反対称律 (anti symmetry), 推移律 (transitivity) という.  $P$  の元  $x$  および  $y$  が  $x \leq y$  または  $y \leq x$  を満たすとき,  $x$  と  $y$  は比較可能 (comparable) であるといい, そうでないとき, 比較不能 (incomparable) という. また,  $x \leq y$  かつ  $x \neq y$  のとき,  $x < y$  と記す.  $x < y$  かつ,  $x < u < y$  を満たすような  $u \in P$  が存在しないとき,  $x$  は  $y$  にカバー (cover) される, あるいは,  $y$  は  $x$  をカバーするという. このとき,  $x > y$  あるいは  $y < x$  と記す.  $x > y$  を満たすような  $y \in P$  が存在しないとき,  $x$  を  $P$  の極小元 (minimal element) という. 一方で,  $x < y$  を満たすような  $y \in P$  が存在しないとき,  $x$  を  $P$  の極大元 (maximal element) という.  $P$  の任意の 2 つの元が比較可能であるとき,  $\leq$  を  $P$  上の全順序 (total order) といい,  $P$  を鎖 (chain) あるいは全順序集合 (totally ordered set)

という. 一方で,  $P$  の部分集合  $A$  の相異なる任意の元  $x$  および  $y$  が比較不能であるとき,  $A$  を**反鎖** (anti chain) という.

さて,  $(P, \leq_P)$  および  $(Q, \leq_Q)$  を半順序集合とする. 写像  $\varphi: P \rightarrow Q$  が以下を満たすとき, **順序を保つ** (order-preserving) という:  $s, t \in P$  が  $s \leq_P t$  を満たすならば  $\varphi(s) \leq_Q \varphi(t)$ . さらに,  $\varphi$  が全単射かつ, 逆写像も順序を保つとき,  $\varphi$  を**順序同型** (order isomorphism) という. また,  $P$  と  $Q$  は順序同型 (order isomorphic) といい,  $P \cong Q$  と記す. いま, 集合  $C$  を  $P$  と集合の濃度が等しい鎖とすると, 順序を保つ全単射  $\sigma: P \rightarrow C$  を**線形拡大** (linear extension) という.

ここで, 部分ポセットについて述べる. 半順序集合  $P$  の部分集合  $Q$  が以下のような半順序を備えてるとき,  $P$  の**誘導された部分ポセット** (induced subposet) という: 任意の  $s, t \in Q$  が  $Q$  において  $s \leq t$  であることと  $P$  において  $s \leq t$  であることが同値. また,  $Q$  は**誘導された順序** (induced order) を持つという. 以下では常に,  $P$  の部分ポセットとは誘導された部分ポセットのことを指す. 特に,  $P$  の部分ポセット  $C$  が鎖であるとき,  $C$  を  $P$  の鎖という.  $P$  の鎖  $C$  がより大きな鎖に含まれていないとき,  $C$  は**極大** (maximal) であるという. また, ある  $s, t \in C$  について  $s < u < t$  をみたし, かつ,  $C \cup \{u\}$  が鎖となるような  $u \in P \setminus C$  が存在しないとき,  $C$  を**飽和鎖** (saturated chain) という. 鎖  $C$  が有限集合のとき,  $(\#C - 1)$  を  $l(C)$  とおき,  $C$  の**長さ** (length) と呼ぶ. このとき,  $C = \{c_0, c_1, c_2, \dots, c_l\}$  とおき,  $c_0 < c_1 < c_2 \dots < c_l$  とする. いま,  $C$  が飽和鎖であることと,  $c_0 \lessdot c_1 \lessdot c_2 \lessdot \dots \lessdot c_l$  であることは同値なことに注意. さて,  $P$  の任意の極大鎖が同じ長さ  $n$  であるとき,  $P$  は**ランク  $n$  の階層ポセット** (graded poset with rank  $n$ ) という. このとき, 以下を満たすような関数  $\rho: P \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}$  が一意的に存在する:

- (i)  $x \in P$  が極小元のとき,  $\rho(x) = 0$ ,
- (ii)  $x \lessdot y$  のとき,  $\rho(y) = \rho(x) + 1$ .

このような関数  $\rho$  を**階級関数** (rank function) とよぶ. また,  $\rho(x) = i$  のとき,  $x$  は**ランク** (rank)  $i$  であるという.

重要な部分ポセットとして, **順序イデアル** と呼ばれるものがある. 半順序集合  $P$  の部分ポセット  $I$  が以下を満たすとき, **順序イデアル** (order ideal) という:  $s \leq t$  を満たす任意の  $s, t \in P$  に対して,  $t \in I$  ならば  $s \in I$ .  $P$  の順序イデアル全体の成す集合を  $J(P)$  とおく. このとき,  $J(P)$  は集合の包含関係によって半順序集合を成す.  $P$  の部分集合  $A$  に対して,  $\Lambda_A := \{x \in P \mid \text{ある } a \in A \text{ に対して, } x \leq a\}$  と定め, これを  $A$  で**生成される順序イデアル** という. 特に,  $P$  が有限集合のとき,  $P$  の反鎖全体の成す集合と  $J(P)$  は, 各反鎖  $A$  に対して,  $A \mapsto \Lambda_A$  という対応によって 1:1 に対応する. 特に,  $A = \{t\}$  のとき,  $\Lambda_A$  を  $\Lambda_t$  と書く, 即ち,  $\Lambda_t := \{x \in P \mid x \leq t\}$  と書く. このとき,  $\Lambda_t$  を  $t$  で**生成される principal order ideal** と呼ぶ. ここで, 閉区間と呼ばれる特別な部分ポセットについても

紹介する.  $s \leq t$  を満たす任意の  $s, t \in P$  に対して,  $\{x \in P \mid s \leq x \leq t\}$  を  $[s, t]$  と記す. このとき,  $[s, t]$  を  $P$  の閉区間 (closed interval) と呼ぶ.

### 2.3.2 交代符号行列に関する半順序集合

ここでは, 交代符号行列に関する半順序集合について説明する. 第1章で, 交代符号行列と高さ関数の間の全単射を述べた.  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ ,  $A' = (a'_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{A}_n$  に対応する高さ関数をそれぞれ  $(h_{i,j})_{0 \leq i, j \leq n}$ ,  $(h'_{i,j})_{0 \leq i, j \leq n}$  としたとき, 以下によって  $\mathcal{A}_n$  に半順序が定まる:

$$A \leq A' \iff \underset{\text{def}}{h_{i,j} \leq h'_{i,j}} \quad (0 < i, j < n). \quad (2.3.1)$$

このような半順序に関する, J. Striker [22] によって以下のような半順序集合  $\mathbb{A}_n$  が定義された.

**Definition 2.3.1.**  $n$  を正の整数とする. 集合  $\mathbb{A}_n$  を以下で定める:

$$\mathbb{A}_n := \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \mid x + y + z \leq n - 2\}. \quad (2.3.2)$$

$\mathbf{a} = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $\mathbf{b} = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{A}_n$  について, 以下の4つを満たすとき  $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$  と定める:

- (i)  $x_0 \geq x_1$ ,
- (ii)  $y_0 \geq y_1$ ,
- (iii)  $z_0 \leq z_1$ ,
- (iv)  $x_0 + y_0 + z_0 \geq x_1 + y_1 + z_1$ .

定義 2.3.1 で定義される2項関係  $\leq$  が反射律, 反対称律, 推移律を満たすことは明らか. いま, 以下の主張が成り立つ.

**Proposition 2.3.1** ([22] § 3). 半順序集合  $\mathbb{A}_n$  は  $J(\mathbb{A}_n) \cong \mathcal{A}_n$  を満たす.

また,  $A$  型ポジティブルートポセットと呼ばれる半順序集合を用いた  $\mathbb{A}_n$  の同値な別構成が Striker-Williams [21] に示されている. さて,  $\mathbb{A}_n$  の cover relation について以下の主張が成り立つ.

**Proposition 2.3.2.** 半順序集合  $\mathbb{A}_n$  において,  $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_n$  が  $(x, y, z)$  にカバーされることと同値である:

$$\mathbf{a} = (x+1, y, z), (x, y+1, z), (x+1, y, z-1) \text{ or } (x, y+1, z-1).$$

*Proof.*  $\mathbf{a} = (s, t, u) \in \mathbb{A}_n$  が  $\mathbf{a} < \mathbf{x}$  を満たすとする. このとき,  $s > x$  または  $t > y$  となることに注意. 実際に,  $s = x$  かつ  $t = y$  ならば条件 (iii) より  $u < z$  となるが, 条件 (iv) に矛盾する. いま,  $\mathbf{a}$  は以下の 5 つの場合のいずれかに分けられる:

- (I)  $s = x$  かつ  $u = z$  のとき, 条件 (ii) および (iv) より,  $\mathbf{a} < \mathbf{x}$  を満たすことは以下と同値:  $t > y$  かつ  $t > t' > y$  を満たすようような整数  $t'$  が存在しない, 即ち,  $\mathbf{a} = (x, y + 1, z)$ .
- (II)  $t = y$  かつ  $u = z$  のとき, 条件 (i) および (iv) より,  $\mathbf{a} < \mathbf{x}$  を満たすことは以下と同値:  $s > x$  かつ  $s > s' > x$  を満たすようような  $s'$  が存在しない, 即ち,  $\mathbf{a} = (x + 1, y, z)$ .
- (III)  $s = x$  かつ  $u < z$  のとき,  $k - l \geq 0$  となるようある正の整数  $k$  および  $l$  について  $\mathbf{a} = (x, y + k, z - l)$  と表せる.
  - (a)  $k - l > 0$  のとき,  $(x, y + k, z - l) < (x, y + k - l, z) < (x, y, z)$  となる.
  - (b)  $k - l = 0$  のとき, 条件 (ii) および (iii) より,  $\mathbf{a} < \mathbf{x}$  を満たすことは以下と同値:  $k > k' > 0$  を満たすような整数  $k'$  は存在しない, 即ち,  $\mathbf{a} = (x, y + 1, z - 1)$ .
- (IV)  $t = y$  かつ  $u < z$  のとき,  $k - l \geq 0$  となるようある正の整数  $k$  および  $l$  について  $\mathbf{a} = (x + k, y, z - l)$  と表せる.
  - (a)  $k - l > 0$  のとき,  $(x + k, y, z - l) < (x + k - l, y, z) < (x, y, z)$  となる.
  - (b)  $k - l = 0$  のとき, 条件 (i) および (iii) より,  $\mathbf{a} < \mathbf{x}$  を満たすことは以下と同値:  $k > k' > 0$  を満たすような整数  $k'$  は存在しない, 即ち,  $\mathbf{a} = (x + 1, y, z - 1)$ .
- (V)  $s > x$ ,  $t > y$  かつ  $u < z$  のとき,  $(k + l) - m \geq 0$  となるようある正の整数  $k$ ,  $l$  および  $m$  について  $\mathbf{a} = (x + k, y + l, z - m)$  と表せる. このとき,  $(x + k, y + l, z - m) < (x + k - 1, y + l, z - m + 1) < (x, y, z)$  となる.

よって,  $\mathbf{a} < (x, y, z)$  の必要十分条件は  $\mathbf{a} = (x + 1, y, z), (x, y + 1, z), (x + 1, y, z - 1)$  or  $(x, y + 1, z - 1)$  となることが示せた.  $\square$

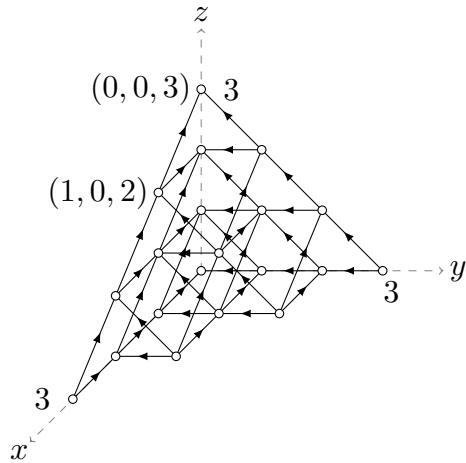
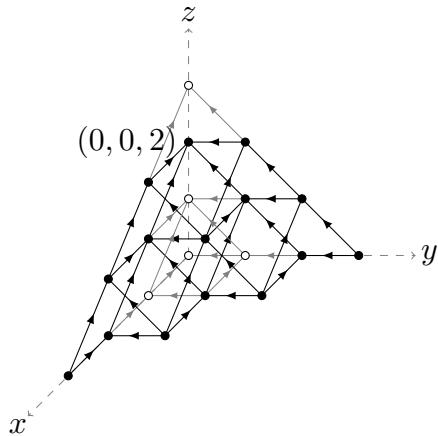
また,  $\mathbb{A}_n$  の順序構造について以下の命題が成り立つ.

**Proposition 2.3.3.**  $\mathbb{A}_n$  について以下の主張が成り立つ:

- (i)  $(x, y, z) \in \mathbb{A}_n$  が極小元ならば  $x + y = n - 2$ ,
- (ii)  $(x, y, z) \in \mathbb{A}_n$  が極大元ならば  $x = y = 0$ ,
- (iii)  $\mathbb{A}_n$  はランク  $(n - 2)$  の階層ポセットである,
- (iv) 各  $(x, y, z) \in \mathbb{A}_n$  のランクは  $\rho(x, y, z) := (n - 2) - (x + y)$  で与えられる.

*Proof.* 命題 2.3.2 から容易に示せる.  $\square$

図2.1において,  $\mathbb{A}_5$ を図示する. 白丸○によって $\mathbb{A}_5$ の頂点を表し, 有向辺によってcover relationを表す. 例えば,  $(1, 0, 2)$ から $(0, 0, 3)$ への有向辺によって,  $(1, 0, 2)$ が $(0, 0, 3)$ にカバーされていることを表す. また,  $(0, 0, 2) \in \mathbb{A}_5$ によって生成されるprincipal order ideal  $\Lambda_{(0,0,2)}$ を図2.2において図示する. この図では,  $\Lambda_{(0,0,2)}$ に属する点を黒丸●で表す. さて, ここで $\mathbb{A}_n$ から自分自身への写像  $\eta: \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{A}_n$ を導入する.

図2.1:  $\mathbb{A}_5$ 図2.2:  $\Lambda_{(0,0,2)} \in J(\mathbb{A}_5)$ 

**Definition 2.3.2.** 写像  $\eta: \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{A}_n$ を以下のように定める: 各  $(x, y, z) \in \mathbb{A}_n$  に対して,

$$\eta(x, y, z) := (x, y, (n-2) - (x+y+z)). \quad (2.3.3)$$

このとき, 以下が成り立つ.

**Proposition 2.3.4.** 写像  $\eta: \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{A}_n$  は順序同型である.

*Proof.* 写像  $\eta$  は involution なので全単射は明らか. また,  $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{A}_n$  とすると, 以下が成り立つ:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \leq \mathbf{b} &\iff x_1 \geq x_2, y_1 \geq y_2, z_1 \leq z_2 \text{かつ } x_1 + y_1 + z_1 \geq x_2 + y_2 + z_2 \\ &\iff x_1 \geq x_2, y_1 \geq y_2, (n-2) - (x_1 + y_1 + z_1) \leq (n-2) - (x_2 + y_2 + z_2) \\ &\quad \text{かつ } (n-2) - z_1 \geq (n-2) - z_2 \\ &\iff \eta(\mathbf{a}) \leq \eta(\mathbf{b}). \end{aligned}$$

よって,  $\eta: \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{A}_n$  が順序同型であることが示せた.  $\square$

また,  $\mathbb{A}_n$  の principal order ideal について, 以下の主張がなりたつ.

**Lemma 2.3.1.**  $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{A}_n$  とする.  $\rho(\mathbf{a}) = \rho(\mathbf{b})$  かつ  $z_1 = z_2$  が成り立つならば,  $\Lambda_{\mathbf{a}}$  と  $\Lambda_{\mathbf{b}}$  は順序同型である.

*Proof.* いま, 写像  $h: \Lambda_{\mathbf{a}} \rightarrow \Lambda_{\mathbf{b}}$  を以下のように定める: 各  $(s, t, u) \in \Lambda_{\mathbf{a}}$  に対して,

$$h(s, t, u) := (s - x_1 + x_2, t + x_1 - x_2, u).$$

このとき,  $h$  が順序同型となることは明らか.  $\square$

## 2.4 半順序集合上のコイン裏返しゲーム

この節では, 有限不偏ゲームのひとつである半順序集合上のコイン裏返しゲームについて, [10, 16] に基づいて説明していく.

### 2.4.1 $(X, \mathcal{T})$ -ゲーム

ここでは, 有限ポセット  $X$  を 1 つ固定して議論していく. いま, 以下のような条件を満たす  $X$  の部分集合の族  $\mathcal{T}$  について考える:

$$\text{各 } T \in \mathcal{T} \text{ は } X \text{ の部分ポセットとしての最大元を持つ.} \quad (\sharp)$$

各  $T \in \mathcal{T}$  に対して,  $X$  の部分ポセット  $T$  における最大元を  $m_T$  と記す. いま, 組  $(X, \mathcal{T})$  に対して, 以下のような有限不偏ゲームが定義される.

**Definition 2.4.1.**  $X$  を有限ポセットとし,  $\mathcal{T}$  を条件  $(\sharp)$  を満たすような  $X$  の部分集合の族とする. このとき, 不偏ゲーム  $\mathcal{G}(X, \mathcal{T}) = (\mathcal{P}, N)$  を以下で定める:

$$\mathcal{P} := 2^X, \quad (2.4.1a)$$

$$N(P) := \{P \ominus T \mid T \in \mathcal{T} \text{ s.t. } m_T \in P\} \quad (P \in \mathcal{P}). \quad (2.4.1b)$$

このようなゲーム  $\mathcal{G}(X, \mathcal{T})$  を  $(X, \mathcal{T})$ -ゲームという。また、 $X$  をこのゲームの board といい、各  $T \in \mathcal{T}$  を turning set という。

このゲームにおいて、局面  $P\mathcal{P}$  が終了局面であるための必要十分条件は以下を満たすことである：各 turning set  $T \in \mathcal{T}$  に対して、 $m_T \notin P$ 。ここで、 $S := \{m_T \mid T \in \mathcal{T}\}$  および  $E := X \setminus S$  とおく。いま、このゲームにおける終了局面全体の成す集合を  $\epsilon$  とするとき、 $\epsilon = 2^E$  が成り立つ。半順序集合  $X$  上の  $\mathcal{T}$ -ゲームの総称として、半順序集合  $X$  上のコイン裏返しゲームという言葉を用いる。また、これらのゲームはポセットゲームと呼ばれることがある。

実際に、以下のような解釈でコイン裏返しゲームと思うことができる。

- $X$  の各元  $x$  をコイン（表と裏という2つの状態のいずれかをとる対象）とみなす。
- 局面  $P$  について、 $x \in P$  ならば  $x$  は表向き（head），そうでないとき、 $x$  は裏向き（tail）とみなす。
- $x \in S = \{m_T \mid T \in \mathcal{T}\}$  となるような表向きのコイン  $x$  および  $m_T = x$  となるような  $T \in \mathcal{T}$  を1つずつ選んで、 $T$  に属する  $X$  の元を全て裏返す（その他のコインはそのまま）。
- $S$  に属するコインが全て裏向きのときコインが裏返せなくなり、ゲームは終了する。このとき、最後にコインを裏返したプレイヤーが勝者となる。

ここで、ポセットゲームの基本定理と呼ばれる定理を紹介する。

**Theorem**（ポセットゲームの基本定理）。 $X$  を有限ポセットとする。また、 $\mathcal{T}$  は条件（#）を満たす  $X$  の部分集合の族とする。いま、関数  $\gamma: X \rightarrow \mathbb{N}$  を以下で定める：各  $x \in X$  に対して、

$$\gamma(x) := \text{mex} \left\{ \sum_{t \in T \setminus \{x\}}^* \gamma(t) \mid T \in \mathcal{T} \text{ s.t. } m_T = x \right\}. \quad (2.4.2a)$$

また、各  $P \in 2^X$  に対して、

$$\gamma(P) := \sum_{x \in P}^* \gamma(x) \quad (2.4.2b)$$

とおく。このとき、 $\gamma(P)$  はポセットゲーム  $\mathcal{G}(X, \mathcal{T})$  の局面  $P$  における Sprague-Grundy 関数の値を与える。

特に、 $\gamma(x)$  は1個の元から成る局面  $\{x\}$  の Sprague-Grundy 関数の値を表す。ポセットゲームの基本定理の証明は後に改めて述べる。

### 2.4.2 ポセットゲームの性質

以下では、ポセットゲーム  $\mathcal{G}(X, \mathcal{T})$  の性質について説明する。まず、1回のプレイで同じ局面は2回以上現れないことを示す。そのために、以下の補題を用意する。

**Lemma 2.4.1.** いま、 $P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \cdots \rightarrow P_r$  とゲームを進行したとする。ここで、 $1 \leq i \leq r$  を満たす各  $i$  について、 $P_i = P_{i-1} \ominus T_i$  とおく。また、部分ポセット  $\{m_{T_i} \mid 1 \leq i \leq r\}$  における極大元を  $x_0$  とおく。このとき、 $m_{T_i} = x_0$  をみたすような  $1 \leq i \leq r$  は一意的。

*Proof.*  $m_{T_i} = x_0$  をみたすような  $i$  が複数存在すると仮定して矛盾を示す。まず、 $m_{T_i} = x_0$  をみたすような最小の  $i$  を  $k$  とおく。いま、ある  $i > k$  について  $m_{T_i} = x_0$  が成り立つとすると、 $x_0 \in P_i$  が従う。ここで、 $j > k$  かつ  $x_0 \in P_j$  を満たす  $j$  のうち、最小のものを  $l$  とおく。このとき、 $x_0 \in T_l$  かつ  $x_0 \notin P_{l-1}$  が成り立つことに注意する。いま、 $m_{T_l} \in T_l \cap P_{l-1}$  より、 $x_0 \neq m_{T_l}$  が従う。また、 $T_l$  における  $m_{T_l}$  の最大性から  $x_0 < m_{T_l}$  となり、 $x_0$  の極大性に矛盾。よって、 $m_{T_i} = x_0$  となる  $i$  の一意性が示せた。  $\square$

上記の議論において、 $x_0 \in P_{k-1}$  かつ  $x_0 \notin P_k$  となることに注意。また、上記の議論から  $j \geq k$  ならば  $x_0 \notin P_j$  も同時に従う。同様にして、 $j < k$  ならば  $x_0 \in P_j$  が成り立つ。実際、 $j < k$  を満たすある  $j$  について  $x_0 \notin P_j$  が成り立つと仮定したとき、そのような  $j$  で最大のものを  $l$  とおくと、 $x_0 < m_{T_{l+1}}$  が成り立ち矛盾。よって、 $\{m_{T_i} \mid 1 \leq i \leq r\}$  における極大元  $x_0$  は  $r$  回の移行の中でちょうど 1 回裏返される。いま、1回のプレイで局面  $P_0$  が 2回現れるとすると、ある  $r > 0$  について、 $P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \cdots \rightarrow P_r = P_0$  と移行できて、各  $x \in X$  は  $r$  回の移行のうち、偶数回裏返されることになる。これは上記の議論より矛盾する。よって、1回のプレイにおいて各局面  $P$  は 2回以上現れないことが示せた。

ここで、 $\#(P \cap S) = 1$  となるような局面  $P$ 、即ち、選べるコインが 1種類だけの局面  $P$  について以下の補題を述べる。

**Lemma 2.4.2.** ポセットゲーム  $\mathcal{G}(X, \mathcal{T})$  において、 $\#(P \cap S) = 1$  となるような局面  $P$  について考える。このとき、 $P \cap S = \{x_0\}$  とおく。 $P \rightarrow P \ominus T_1 \rightarrow \cdots \rightarrow (P \ominus T_1 \ominus \cdots \ominus T_r)$  のように移行できたとき、以下が成り立つ：

- (i)  $i > 1$  を満たす各  $i$  について、 $m_{T_i} < x_0$ 、
- (ii) 局面  $Q$  が  $Q \cap S = \{x_0\}$  を満たすならば  $Q \rightarrow Q \ominus T_1 \rightarrow \cdots \rightarrow (Q \ominus T_1 \ominus \cdots \ominus T_r)$  と移行できる。

*Proof.* (i) まず、 $m_{T_1} = x_0$  が成り立つ。また、 $m_{T_2} \in T_1 \setminus P$  となり、 $m_{T_2} < x_0$  が従う。

ここで,  $i > 2$  のとき,  $2 < j < i$  を満たす各  $j$  について  $m_{T_j} < x_0$  が成り立つと仮定する. このとき,  $x_0$  は  $i$  個の集合  $T_j$  ( $1 \leq j < i$ ) および  $P$  のうち, ちょうど 2 個の集合  $T_1$  および  $P$  に属している. よって, 命題 2.1.4 より,  $x_0 \notin P \ominus T_1 \ominus T_2 \ominus \cdots \ominus T_{i-1}$  が成り立つ. また,  $m_{T_i} \in P \ominus T_1 \ominus T_2 \ominus \cdots \ominus T_{i-1}$  より,  $m_{T_i} \neq x_0$  が従う. 特に  $m_{T_i} \notin P$  が成り立つ. このとき,  $m_{T_i}$  が  $T_j$  ( $1 \leq j < i$ ) のうち, いずれかに属していることを示せばよい. いま, 再び命題 2.1.4 を用いると,  $m_{T_i}$  は  $(i-1)$  個の集合  $T_j$  ( $1 \leq j < i$ ) のうち, 奇数個に属することが従う. よって,  $m_{T_i}$  が  $T_j$  ( $1 \leq j < i$ ) のうち, いずれかに属していることが示せた.

- (ii) まず,  $Q \rightarrow Q \ominus T_1$  は明らか. いま,  $1 < i \leq r$  をみたす各  $i$  について, 前半と同様の議論から以下が成り立つ:  $m_{T_i}$  は  $(i-1)$  個の集合  $T_j$  ( $1 \leq j < i$ ) のうち, ちょうど奇数個に属する. また,  $m_{T_i} \notin Q$  となることに注意すると,  $m_{T_i} \in Q \ominus T_1 \ominus T_2 \ominus \cdots \ominus T_{i-1}$  が従う. よって, 各  $i$  について  $Q \ominus T_1 \ominus T_2 \ominus \cdots \ominus T_{i-1} \rightarrow Q \ominus T_1 \ominus T_2 \ominus \cdots \ominus T_{i-1} \ominus T_i$  となり, 主張が示せた.

□

また, 局面の長さについて以下の主張が成り立つ:

**Proposition 2.4.1.** ポセットゲーム  $\mathcal{G}(X, \mathcal{T})$  の任意の局面  $P$  において, 以下が成り立つ:

- (i) 局面  $P$  の長さは  $P$  において選べるコインの枚数以上, 即ち,  $l(P) \geq \#(P \cap S)$ ,
- (ii)  $x \in P$  ならば, 局面  $\{x\}$  の長さは局面  $P$  の長さを越えない, 即ち,  $l(\{x\}) \leq l(P)$ .

*Proof.* (i)  $P \cap S$  が空でないときに  $l(P) \geq \#(P \cap S)$  が成り立つことを示せばよい.

$\#(P \cap S) = n$  として,  $P \cap S$  の元を以下を満たすように  $x_1, x_2, \dots, x_n$  とおく:

- $x_1$  は  $P \cap S$  における極小元,
- $x_i$  は  $P \cap S \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}\}$  における極小元 ( $i > 1$ ).

このとき,  $1 \leq i \leq n$  を満たす各  $i$  について  $m_{T_i} = x_i$  を満たすように  $T_i \in \mathcal{T}$  を 1 つずつ選び,  $P \rightarrow P \ominus T_1 \rightarrow P \ominus T_1 \ominus T_2 \rightarrow \cdots \rightarrow (P \ominus T_1 \ominus \cdots \ominus T_n)$  と移行できる.

- (ii)  $x \in P$  とする. このとき,  $l(\{x\}) \leq l(P)$  が成り立つことを  $l(P)$  に関する帰納法で示す.  $l(P) = 0$  のとき, 局面  $\{x\}$  および  $P$  はどちらも終了局面である. よって, このとき  $l(\{x\}) = l(P) = 0$  が成り立つ.  $l(P) > 0$  のとき,  $x \in Q$  ならば  $l(\{x\}) \leq l(Q)$  が  $0 < l(Q) < l(P)$  を満たす任意の局面  $Q$  に対して成り立つと仮定する. いま,  $x \in P \setminus S$  ならば  $\{x\}$  は終了局面となり,  $l(\{x\}) < l(P)$  が従う. よって,  $x \in P \cap S$  のとき,  $l(\{x\}) \leq l(P)$  を示せばよい. さて,  $P \cap S = \{x\}$  のとき, 補題 2.4.2 より,  $l(\{x\}) = l(P)$  が成り立つ. 以下では,  $y \neq x$  をみたす  $y \in P \cap S$  が

存在すると仮定する.もし,  $m_T = y$ かつ $x \in T$ を満たすような $T \in \mathcal{T}$ が存在するならば, $x < y$ が成り立つ.このとき, $m_{T'} = x$ となるような $T' \in \mathcal{T}$ を選んで, $P \rightarrow P \ominus T' \rightarrow P \ominus T' \ominus T$ と移行することができる.このとき, $l(P \ominus T' \ominus T) < l(P)$ かつ $x \in P \ominus T' \ominus T$ となり,帰納法の仮定から, $l(\{x\}) < l(P)$ が従う. そうでないとき,即ち, $m_T = y$ ならば $x \notin T$ のとき, $x \in P \ominus T$ が成り立つ.このとき, $l(P \ominus T) < l(P)$ より,帰納法の仮定から, $l(\{x\}) < l(P)$ が従う.よって, $x \in P \cap S$ のとき, $l(\{x\}) \leq l(P)$ が示せた.

□

### 2.4.3 ポセットゲームの基本定理

ここで改めてポセットゲームの基本定理について述べる.

**Theorem 2.4.1** (ポセットゲームの基本定理).  $X$ を有限ポセットとする.また, $\mathcal{T}$ は条件 $(\sharp)$ を満たす $X$ の部分集合の族とする.いま,関数 $\gamma: X \rightarrow \mathbb{N}$ を以下のように定める:各 $x \in X$ に対して,

$$\gamma(x) := \text{mex} \left\{ \sum_{t \in T \setminus \{x\}}^* \gamma(t) \mid T \in \mathcal{T} \text{ s.t. } m_T = x \right\}. \quad (2.4.2a)$$

また,各 $P \in 2^X$ に対して,

$$\gamma(P) := \sum_{x \in P}^* \gamma(x) \quad (2.4.2b)$$

とおく.このとき, $\gamma(P)$ はポセットゲーム $\mathcal{G}(X, \mathcal{T})$ の局面 $P$ におけるSprague-Grundy関数の値を与える.

*Proof.* いま,ポセットゲーム $\mathcal{A} = \mathcal{G}(X, \mathcal{T})$ におけるSprague-Grundy関数を $g_{\mathcal{A}}$ と表していた. $g_{\mathcal{A}}(P) = \gamma(P)$ となることを $l(P)$ に関する帰納法で示す. $l(P) = 0$ のとき,各 $x \in P$ について, $\gamma(x) = g_{\mathcal{A}}(\{x\}) = 0$ が成り立つ.従って, $l(P) = 0$ のとき, $\gamma(P) = g_{\mathcal{A}}(P) = 0$ が従う. $l(P) > 0$ のとき, $l(Q) < l(P)$ を満たす任意の $Q \in 2^X$ に対して $g_{\mathcal{A}}(Q) = \gamma(Q)$ が成り立つと仮定する.ここで, $\#P = n$ として, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ とおく.このとき,以下が成り立つ:

$$N(P) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \{P \ominus T \mid T \in \mathcal{T} \text{ s.t. } m_T = p_i\}. \quad (2.4.3a)$$

いま,各 $p_i \in P$ および $m_T = p_i$ となる各 $T \in \mathcal{T}$ について, $l(P \ominus T) < l(P)$ より,帰納

法の仮定および命題 2.1.5 から以下が成り立つ:

$$g_{\mathcal{A}}(P \ominus T) = \sum_{\substack{y \in P, \\ y \neq p_i}}^* \gamma(y) + \sum_{\substack{t \in T, \\ t \neq p_i}}^* \gamma(t). \quad (2.4.3b)$$

従って,  $g_{\mathcal{A}}(P)$  は以下のように表せる:

$$g_{\mathcal{A}}(P) = \text{mex} \left( \bigcup_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}}^* \gamma(p_j) + \sum_{\substack{t \in T, \\ t \neq p_i}}^* \gamma(t) \mid T \in \mathcal{T} \text{ s.t. } m_T = p_i \right\} \right). \quad (2.4.3c)$$

いま, 系 2.1.1 から,  $g_{\mathcal{A}}(P) = \sum_{1 \leq i \leq n}^* \gamma(p_i) = \gamma(P)$  が従う.  $\square$

以下では, 各  $x \in X$  に対して, 局面  $\{x\}$  の Sprague-Grundy 関数の値を  $g(x)$  とも書くこととする.

#### 2.4.4 ポセットゲームの例

さて, ポセットゲーム  $\mathcal{G}(X, \mathcal{T})$  の重要な例として, 以下の 3 つが挙げられる:

- (i)  $\mathcal{T} = \{\{x, y\} \mid x \leq y\}$  として, このような  $\mathcal{G}(X, \mathcal{T})$  をターニングタートルズ (turning turtles) と呼ぶ,
- (ii)  $\mathcal{T} = \{\Lambda_x \mid x \in X\}$  として, このような  $\mathcal{G}(X, \mathcal{T})$  を順序イデアルゲーム (order ideal game) と呼ぶ,
- (iii)  $\mathcal{T} = \{[x, y] \mid x \leq y\}$  として, このような  $\mathcal{G}(X, \mathcal{T})$  をルーラー (ruler) と呼ぶ.

特に, 順序イデアルゲームにおいてポセットゲームの基本定理を適用すると以下の主張が成り立つ.

**Proposition 2.4.2.** 順序イデアルゲーム  $\mathcal{G}(X, \mathcal{T})$  における Sprague-Grundy 関数は各局面  $P$  に対して 0 または 1 の値をとる. 特に, 以下が成り立つ:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \# \{t \in \Lambda_x \setminus \{x\} \mid g(t) = 1\} \text{ が奇数,} \\ 1 & \# \{t \in \Lambda_x \setminus \{x\} \mid g(t) = 1\} \text{ が偶数,} \end{cases} \quad (2.4.4a)$$

即ち,

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \sum_{t \in \Lambda_x \setminus \{x\}}^* g(t) \equiv 1 \pmod{2}, \\ 1 & \sum_{t \in \Lambda_x \setminus \{x\}}^* g(t) \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases} \quad (2.4.4b)$$

*Proof.* 任意の  $x \in X$  に対して, 局面  $\{x\}$  はちょうど 1 つの後続局面 ( $\Lambda_x \setminus \{x\}$ ) を持つ. いま, 1 つの非負整数からなる集合の最小除外数は 0 または 1 のいずれかとなることに注

意すると,  $g(x)$  は 0 または 1 のいずれかの値をとる. よって, ポセットゲームの基本定理から, 各局面  $P$  の Sprague-Grundy 関数の値が 0 か 1 のいずれかとなることが従う. また, 式 (2.4.4a) および (2.4.4b) は上記の議論から従う.  $\square$

さて, 2 つの principal order ideal の間の順序同型が与えられたとき, 以下の Sprague-Grundy 関数に関する主張が成り立つ.

**Proposition 2.4.3.**  $\mathcal{G}(X, \mathcal{T})$  をターニングタートルズ, 順序イデアルゲームあるいはルーラーのいずれかとする.  $X$  の元  $x$  および  $y$  が  $\Lambda_x \cong \Lambda_y$  を満たすならば  $g(x) = g(y)$  が成り立つ.

*Proof.*  $X$  の順序に関する帰納法で示す.  $X$  の元  $x$  および  $y$  が  $\Lambda_x \cong \Lambda_y$  を満たすとする. いま,  $f: \Lambda_x \rightarrow \Lambda_y$  を順序同型とする.  $x$  が極小元のとき,  $N(\{x\}) = N(\{y\}) = \{\emptyset\}$  となり,  $g(x) = g(y) = 0$  が成り立つ.  $x$  が極小元でないとき,  $\Lambda_s \cong \Lambda_t$  ならば  $g(s) = g(t)$  が  $s < x$  を満たす任意の  $s \in X$  について成り立つと仮定する. このとき,  $s < x$  を満たす任意の  $s \in X$  に対して,  $\Lambda_x \cong \Lambda_{f(s)}$  が成り立ち, 帰納法の仮定から,  $g(s) = g(f(s))$  が従う. よって,  $m_T = s$  となる任意の  $T \in \mathcal{T}$  に対して, 以下が成り立つ:

$$\sum_{s \in T \setminus \{x\}}^* g(s) = \sum_{s \in T \setminus \{x\}}^* g(f(s)) = \sum_{t \in f(T) \setminus \{y\}}^* g(t).$$

いま,  $\{f(T) \mid T \in \mathcal{T} \text{ s.t. } m_T = s\}$  が  $\{T \in \mathcal{T} \mid m_T = t\}$  と等しいことに注意すると, ポセットゲームの基本定理から以下が従う:

$$\begin{aligned} g(y) &= \text{mex} \left\{ \sum_{t \in f(T) \setminus \{y\}}^* g(t) \mid T \in \mathcal{T} \text{ s.t. } m_T = s \right\} \\ &= \text{mex} \left\{ \sum_{s \in T \setminus \{x\}}^* g(s) \mid T \in \mathcal{T} \text{ s.t. } m_T = s \right\} \\ &= g(x). \end{aligned}$$

$\square$

## 2.5 交代符号行列に関する半順序集合上のポセットゲーム

本論文では, 半順序集合  $\mathbb{A}_n$  に対して定まる順序イデアルゲームにおける Sprague-Grundy 関数の値を明示的に与える. 半順序集合  $\mathbb{A}_n$  の定義については定義 2.3.1 を参照せよ. 主結果を述べる前に, ポセットゲームの一般論から従う,  $\mathbb{A}_n$  上のポセットゲームにおける Sprague-Grundy 関数の対称性を述べる. 補題 2.3.1 と命題 2.3.4 を合わせて命題 2.4.3 に適用することで以下の主張を得る.

**Proposition 2.5.1.**  $\mathcal{G}(\mathbb{A}_n, \mathcal{T})$  をターニングタートルズ, 順序イデアルゲームあるいはルーラーのいずれかとする.  $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{A}_n$  が以下のいずれかを満たすとき,  $g(x_1, y_1, z_1) = g(x_2, y_2, z_2)$  が成り立つ:

- (i)  $\rho(\mathbf{a}) = \rho(\mathbf{b})$  かつ  $z_1 = z_2$ ,
- (ii)  $\rho(\mathbf{a}) = \rho(\mathbf{b}) = z_1 + z_2$ .

命題 2.5.1 は順序イデアルゲームにおいてのみならず, ターニングタートルズおよびルーラーにおいても成り立つことに注意. 続いて, 以下に主結果を述べる.

**Theorem 2.5.1** (大本-高山 [14]).  $n$  を正の整数とする. また,  $\mathbb{A}_n$  の部分集合の族  $\mathcal{T}$  を  $\mathcal{T} := \{\Lambda_{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{A}_n\}$  で定める. このとき, 各  $\mathbf{a} = (x, y, z) \in \mathbb{A}_n$  について,  $\mathbb{A}_n$  上の順序イデアルゲーム  $\mathcal{G}(\mathbb{A}_n, \mathcal{T})$  の局面  $\{\mathbf{a}\}$  における Sprague-Grundy 関数の値  $g(x, y, z)$  は以下で与えられる:

$$g(x, y, z) = \begin{cases} 1 & (n-2) - (x+y) = 0 \text{ または } 2z \pm 1 \text{ のとき,} \\ 0 & \text{それ以外のとき.} \end{cases} \quad (2.5.1)$$

各  $\mathbf{a} = (x, y, z) \in \mathbb{A}_n$  における Sprague-Grundy 関数の値  $g(x, y, z)$  は, ランク  $\rho(\mathbf{a})$  と  $z$ -座標にのみ依存することから, 以下のような写像  $\pi: \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{N}^2$  を用いて主結果を証明する.

**Definition 2.5.1.** 写像  $\pi: \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{N}^2$  を以下で定める: 各  $\mathbf{a} = (x, y, z) \in \mathbb{A}_n$  に対して,

$$\pi(\mathbf{a}) := (\rho(\mathbf{a}), z) = ((n-2) - (x+y), z). \quad (2.5.2)$$

特に,  $\pi(\mathbb{A}_n) = \{(r, z) \in \mathbb{N}^2 \mid z \leq r \leq n-2\}$  となる. これを  $\mathbb{Y}_n$  とおく. また, Sprague-Grundy 関数に付随して, 以下のような関数を定義する.

**Definition 2.5.2.** 関数  $\bar{g}: \mathbb{Y}_n \rightarrow \mathbb{N}$  を以下のように定める:  $(r, z) \in \mathbb{Y}_n$  がある  $\mathbf{x} \in \mathbb{A}_n$  について  $\pi(\mathbf{x}) = (r, z)$  となるとき,  $\bar{g}(r, z) := g(\mathbf{x})$  とする.

命題 2.5.1 より, 関数  $\bar{g}: \mathbb{Y}_n \rightarrow \mathbb{N}$  は well-defined である. 順序イデアルゲーム  $\mathcal{G}(\mathbb{A}_{12}, \mathcal{T})$  における Sprague-Grundy 関数に付随する関数  $\bar{g}(r, z)$  の値を表 2.1 に示す. さて,  $\mathbb{A}_n$  の principal order ideal について, 以下の主張が成り立つ.

**Proposition 2.5.2.**  $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{A}_n$  とする.  $\pi(\mathbf{a}) = (r_1, z_1)$  とおいたとき,  $\pi(\Lambda_{\mathbf{a}} \setminus \{\mathbf{a}\})$  は以下のように表される:

$$\pi(\Lambda_{\mathbf{a}} \setminus \{\mathbf{a}\}) = \{(s, t) \in \mathbb{Y}_n \mid s < r_1, t \leq z_1, 0 \leq s - t \leq r_1 - z_1\}. \quad (2.5.3)$$

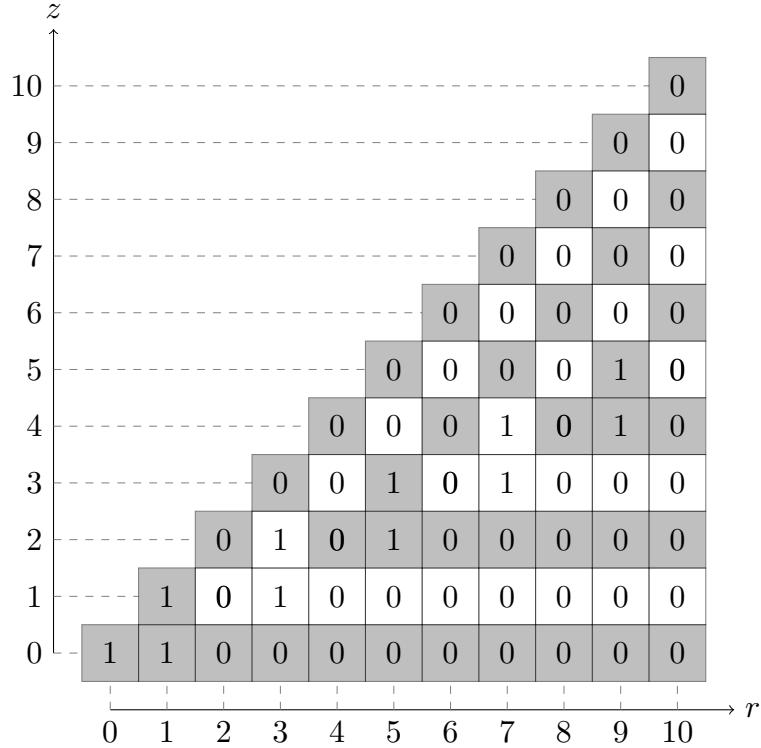


表 2.1: 順序イデアルゲーム  $\mathcal{G}(\mathbb{A}_{12}, \mathcal{T})$  における Sprague-Grundy 関数に付随する関数  $\bar{g}(r, z)$  の値

*Proof.* 右辺を  $E(r, z)$  とおく. このとき,  $\pi(\Lambda_{\mathbf{a}} \setminus \{\mathbf{a}\}) \subset E(r, z)$  は明らか. ここで,  $(s, t) \in E(r, z)$  に対して  $\mathbf{y} := (x_1 + r_1 - s, y_1, t)$  とおく. このとき,  $(x_1 + r_1 - s) + y_1 + t = (n - 2) - (s - t) \leq n - 2$  となり,  $\mathbf{y} \in \mathbb{A}_n$  が成り立つ. また, 以下の条件が成り立つ:

- (a)  $x_1 + r_1 - s > x_1$ ,
- (b)  $t \leq z_1$ ,
- (c)  $(x_1 + r_1 - s) + y_1 + t \geq x_1 + y_1 + z_1$ .

よって,  $\mathbf{y} \in \Lambda_{\mathbf{a}} \setminus \{\mathbf{a}\}$  が従う. いま,  $\pi(\mathbf{y}) = (s, t)$  が成り立つので,  $(s, t) \in \pi(\Lambda_{\mathbf{a}} \setminus \{\mathbf{a}\})$  となり,  $E(r, z) \subset \pi(\Lambda_{\mathbf{a}} \setminus \{\mathbf{a}\})$  が示せた.  $\square$

いま,  $\mathbb{Y}_n$  の元を分類するために, 以下のようにいくつかの部分集合を定義する.

**Definition 2.5.3.**  $0 \leq k < \lfloor n/2 \rfloor$  を満たす各整数  $k$  に対して,  $\mathbb{Y}_n$  の部分集合  $\Phi_n^{(k)}$  および  $\Psi_n^{(k)}$  をそれぞれ以下で定める:

$$\Phi_n^{(k)} := \{(r, z) \in \mathbb{Y}_n \mid r - z \geq z = k\}, \quad (2.5.4a)$$

$$\Psi_n^{(k)} := \{(r, z) \in \mathbb{Y}_n \mid r - z = k \leq z\}. \quad (2.5.4b)$$

このとき,  $\Phi_n^{(k)}$  および  $\Psi_n^{(k)}$  をそれぞれ  $k$  番目の下層 ( $k$ -th lower layer),  $k$  番目の上層 ( $k$ -th upper layer) とよぶ.

すると,  $\mathbb{Y}_n = \bigsqcup_{1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor} (\Phi_n^{(k)} \cup \Psi_n^{(k)})$  と表すことができる. また,  $\mathbf{a} = (x, y, z) \in \mathbb{A}_n$  に対して,  $\min\{\rho(\mathbf{a}) - z, z\} = k$  とすると,  $\pi(\mathbf{a}) \in \Phi_n^{(k)} \cup \Psi_n^{(k)}$  が成り立つことに注意. さて, 定理 2.5.1 を  $\mathbf{a} = (x, y, z) \in \mathbb{A}_n$  のランクに関する帰納法で示す.

*proof of theorem 2.5.1.*  $\rho(\mathbf{a}) = 0$  のとき,  $g(\mathbf{a}) = 1$  となることは既に示した.  $\rho(\mathbf{a}) > 0$  とする.  $\rho(\mathbf{a})$  が  $r - 1$  までのとき, 主張が成り立つと仮定する. ここで,  $0 \leq k < \lfloor n/2 \rfloor$  を満たす各  $k$  に対して,  $\tilde{E}(k) := \{(2l+1, l) \mid 0 \leq l < k\} \cup \{(2l+1, l+1) \mid 0 \leq l < k\}$  とおく.  $\pi(\mathbf{a}) \in \Phi_n^{(k)} \cup \Psi_n^{(k)}$  としたとき,  $\mathbf{a}$  は以下の 3 種類のいずれかに分類される:

- (I)  $z = k$  かつ  $\rho(\mathbf{a}) > 2k + 1$ ,
- (II)  $\rho(\mathbf{a}) - z = k$  かつ  $z > k + 1$ ,
- (III)  $\pi(\mathbf{a}) = (2k, k), (2k+1, k)$  or  $(2k+1, k+1)$ .

いま,  $0 \leq r' < r$  を満たす各  $r'$  および  $0 \leq z' \leq z$  を満たす各  $z'$  について, 以下が成り立つことに注意:

$$\#\{t \in \Lambda_{\mathbf{a}} \setminus \{\mathbf{a}\} \mid \pi(t) = (r', z')\} = \rho(\mathbf{a}) - r' + 1. \quad (2.5.5)$$

このとき, それぞれの場合に以下が成り立つ:

- (I) のとき, 帰納法の仮定から  $\{(r, z) \in E(\pi(\mathbf{a})) \mid \bar{g}(r, z) = 1\} = \tilde{E}(k) \cup \{(2k+1, k), (0, 0)\}$  が成り立つ. このとき,  $\sum_{t \in \Lambda_{\mathbf{a}} \setminus \{\mathbf{a}\}}^* g(t) \equiv \rho(\mathbf{a}) - 2k + \rho(\mathbf{a}) + 1 \equiv 1 \pmod{2}$  となる.
- (II) のとき, 帰納法の仮定から  $\{(r, z) \in E(\pi(\mathbf{a})) \mid \bar{g}(r, z) = 1\} = \tilde{E}(k) \cup \{(2k+1, k+1), (0, 0)\}$  が成り立つ. このとき,  $\sum_{t \in \Lambda_{\mathbf{a}} \setminus \{\mathbf{a}\}}^* g(t) \equiv \rho(\mathbf{a}) - 2k + \rho(\mathbf{a}) + 1 \equiv 1 \pmod{2}$  となる.
- (III) のとき,  $\pi(\mathbf{a}) = (2k, k)$  ならば  $k > 0$  となることに注意. いま, 帰納法の仮定から  $\{(r, z) \in E(\pi(\mathbf{a})) \mid \bar{g}(r, z) = 1\} = \tilde{E}(k) \cup \{(0, 0)\}$  が成り立つ. このとき,  $\sum_{t \in \Lambda_{\mathbf{a}} \setminus \{\mathbf{a}\}}^* g(t) \equiv \rho(\mathbf{a}) + 1 \pmod{2}$ .

よって, 式 (2.4.4b) より, 以下が成り立つ:

$$g(\mathbf{a}) = \begin{cases} 1 & \pi(\mathbf{a}) = (2k+1, k) \text{ または } (2k+1, k+1) \text{ のとき,} \\ 0 & \text{それ以外のとき.} \end{cases} \quad (2.5.6)$$

いま,  $\rho(\mathbf{a}) = 2z \pm 1$  となることの必要十分条件は,  $\pi(\mathbf{a}) = (2k+1, k)$  または  $(2k+1, k+1)$  となることなので, 定理 2.5.1 が示せた.  $\square$

本論文では、順序イデアルゲームにおける Sprague-Grundy 関数について明示的な公式を示したが、ルーラーの場合については依然として未解決問題である。

## 謝辞

この場をお借りして、お世話になった先生方に謝辞を述べさせていただきます。学部3年生の頃から長らく指導教員としてご指導くださった石川雅雄先生、博士後期課程最後の1年半において指導教員としてご指導くださった鈴木武史先生に格別の感謝を申し上げます。鈴木先生には長らくの間、副指導教員としても大変お世話になりました。同じ研究室の後輩である高山義輝氏には、在学時に共同研究者として共にポセットゲームに関する研究に取り組んでいただきました。ここに深謝いたします。また、岡山大学の内外問わず、授業および各種セミナーなどでお世話になりました諸先生方にも感謝申し上げます。



## 参考文献

- [1] T. Abuku and M. Tada, “Multiple Hook Removing Game Whose Starting Position is a Rectangular Young Diagram with the Unimodal Numbering”, *Integers*, **23** (2023), #G1.
- [2] E. Berlekamp, J. H Conway and R. Guy , *Winnig Ways—for Your Mathematical Plays—, Volume 1, second edition*, Academic Press, London (1982)
- [3] D. M. Bressoud, *Proofs and Confirmations — The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture* , Cambridge University Press (1999).
- [4] R. A. Brualdi and M. W. Schroeder, “Alternating sign matrices and their Bruhat order”, *Discrete Math.*, **340** (2017) 1996 – 2019.
- [5] L. Cantini and A. Sportiello , “Proof of Razumov-Stroganov conjecture”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **5** (2011) 1549 –1574
- [6] J. H. Conway *On numbers and games second edition*, A. K. Peters, Wellesley/MA (2001).
- [7] P. M. Grundy, “Mathematics and Games” , *Eureka*, **2** (1939), 463 – 472.
- [8] G. Kuperberg, “Another proof of the alternating sign matrix conjecture”, *Internat. of Math. Res. Notices*, **1996** (1996) 139 – 150.
- [9] A. Lascoux and M. Schützenberger, “Treillis et bases des groupes de coxeter” , *Electr. J. Comb.*, **3**, 342—351, 1996.
- [10] H. W. Lenstra, “Nimmultiplication.”, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, **7**, (1977-78), 1–24.
- [11] W. H. Mills, D. P. Robbins and H. Rumsey Jr., “Proof of the Macdonald Conjecture”, *Invent. math.*, **66** (1982) 73-87.
- [12] W.H. Mills, D. P. Robbins and H. Rumsey Jr., “Alternating Sign Matrices and Descending Plane Partitions”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **34** (1983) 340 – 359.
- [13] T. Ohmoto, “The characterizations of an alternating sign matrices using a triplet”, *Math. J. Okayama Univ.*, **67**(2025) 101 – 131.

- [14] T. Ohmoto and Y. Takayama, “A coin turning game on a partially ordered set related to alternating sign matrices”, 投稿準備中
- [15] A. V. Razumov and Y. G. Stroganov, “Combinatorial nature of ground state vector of  $O(1)$  loop model”, *Theor. Math. Phys.*, **138** (2004) 333–337; *Teor. Mat. Fiz.*, **138** (2004) 395–400.
- [16] 佐藤文広, 石取りゲームの数学—ゲームと代数の不思議な関係—, 数学書房 (2014)
- [17] D. Schleicher and M. Stoll, “An Introduction to Conway’s Games and Numbers”, *Mosc. Math.*, **6**:2 (2006), 359 – 388.
- [18] A. N. Siegel, “Combinatorial Game Theory, Graduate Studies in Mathematics”, **146**, American Mathematical Society, Providence, RI (2013)
- [19] R. Sprague, “Über mathematische Kampfspiele”, *Tohoku Math. J.*, **41** (1936), 438-444.
- [20] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics Volume 1 second edition*, Cambridge University Press (2011)
- [21] J. Striker and N. Williams, “Promotion and rowmotion”, *European J. Combin.*, **33** (2012) 1919 – 1942.
- [22] J Striker, “The toggle group, homomesy, and the Razumov-Stroganov correspondence”, *Electr. J. Comb.*, **22**(2) (2015) #P2.57
- [23] B. Wieland, “Large Dihedral Symmetry of the set of Alternating Sign Matrices”, *Electr. J. Comb.*, **7** (2000) R37
- [24] D. Zeilberger, “Proof of the Alternating Sign Matrix Conjecture” *Elec. J. Comb.*, **3** (1996) R13