

「図形の面積」の指導計画の改善とその授業実践の考察 —三角形の面積の公式の一般化に焦点を当て—

山野 定寿*

教科書(清水:2020)の三角形の指導計画では、頂点から底辺上に高さがない鈍角三角形は、平行四辺形の中の「高さが外にあるときの面積の求め方」で、また、1組の平行線を用いて面積が等しいことを説明する活動は、単元の後半の「面積の求め方の工夫」で指導することになっている。筆者は、この2点を「三角形の面積」に統合した新たな指導計画を作成して授業実践を行い、この効果を分析することにした。授業実践の結果、「三角形の面積」に統合した新たな指導計画は、三角形の学習を主体的なものにするばかりでなく、平行四辺形の理解を容易にすることが分かった。

【キーワード】 鈍角三角形 平行線 指導計画

1 問題の所在と研究の目的

教科書(清水:2020)では、三角形の面積は表1のような指導計画にのっとって指導がなされる。

まず、4年生の既習事項である長方形の面積と直角三角形との関係から、直角三角形の面積が長方形の面積の半分であることを導く(表1①)。次に、

高さが底辺の外にある鋭角三角形についても、等積変形や鋭角三角形を直角三角形2つと考え長方形の面積の半分であることを導く(表1②)。その後、三角形の公式である「底辺×高さ÷2」を導き、三角形の面積の公式として一般化するのである(表1③)。高さが底辺の外にある鈍角三角形には全くふれずにいったん一般化するのである。

高さが底辺の外にある鈍角三角形がこの単元で初めて出てくるのは、表1③の練習問題の中の1問である。その場合も、底辺をどこにするかで高さが決まることをもとに、底辺上にある高さと同様の長さの数値が明示されていて、それを公式に当てはめ面積を求める問題になっている。

では、高さが底辺の外にある鈍角三角形の底辺を延長させて高さを見つけ求積する方法は、いつ指導するのであろうか、と疑問を持ち教科書を見ていくと平行四辺形の中の「高さが外にあるときの面積の求め方」で指導することになっている(表1④)。このとき高さが底辺の外にある平行四辺形も同時に指導することになっている。

さらに、台形やひし形の求積方法を学び、すすめていくと、「4面積の求め方の工夫」の「平行な直線を使って(表1⑤)」で、1組の平行線の間に挟まれる底辺の長さが等しい3種類(鋭角三角形、直角三角形、鈍角三角形)の三角形が並べられ、底辺と高さが等しい三角形の面積が等しいわけを説明する活動が再び登場する。

ここで2つの問題点について考えてみる。

表1 三角形の面積指導手順(K社教科書)

- | |
|--|
| <p>1 三角形の面積</p> <p>①直角三角形の面積</p> <p>②鋭角三角形の面積
(高さが底辺上にある三角形)</p> <p>③三角形の面積の公式(鋭角三角形)
底辺をどこにするかで高さが決まる
(高さが底辺上にある場合)</p> <p>2 平行四辺形の面積</p> <p>：</p> <p>④高さが外にあるときの面積の求め方
鈍角三角形の高さと面積</p> <p>4 面積の求め方の工夫</p> <p>：</p> <p>⑤平行な直線を使って
底辺と高さが等しい三角形の面積が
等しいわけの説明
(鋭角・直角・鈍角三角形)</p> |
|--|

*元岡山県公立小学校教員

1点目は、高さが底辺の外にある鈍角三角形の扱いである。直角三角形、鋭角三角形と学習してきているなら、図1のように頂点を底辺の外に出し、

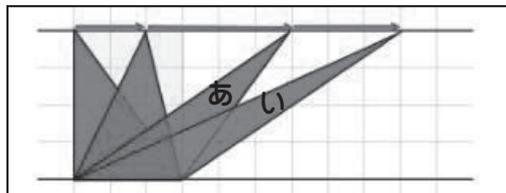


図1 底辺を固定し頂点を動かした三角形

高さが底辺の外にある鈍角三角形も公式「底辺×高さ÷2」で面積が求められるかどうか調べていく展開が自然の流れであると筆者は考える。そうすれば、「どんな三角形でも面積は、底辺×高さ÷2」で求められると一般化できると考えるのである。杉山(2008)も三角形を一般化する重要性を述べているが、この理解があれば、次の学習の平行四辺形では、どんな平行四辺形でも1本の対角線で切れば合同な三角形(鋭角三角形あるいは鈍角三角形)が2つできるので、「平行四辺形の面積=三角形の面積×2」の理解が容易になると考えるのである。

2点目は図1のような1組の平行線の扱いである。平行についてはすでに4年生で扱い、「平行線の間の長さが等しい」ことは既習事項である。長方形や正方形、平行四辺形などの「たて(高さ)」や「よこ(底辺)」の長さの理解には、説明するまでもなく、この平行の性質が用いられる。この1組の平行線についての扱いは、台形やひし形の求積公式を求めた後に扱うのはあまりにも遅いと筆者は考えるのである。4年生の既習事項である以上は、図1のように第1時から平行線を積極的に用いることが望ましいと筆者は考える。直角三角形→鋭角三角形については、長方形の1辺上の内に頂点があることから(図1)、平行は保障されるが、遅くても図1のような鈍角三角形については、図1の通り、平行線を用いて指導したい。例えば、全国学力調査(2017)では、このような問題は頻出である。

筆者は、授業改善の視点として、先の2点を挙げる。1点目は、高さが底辺の外にある鈍角三角形の扱いはどのタイミングで行うかということであ

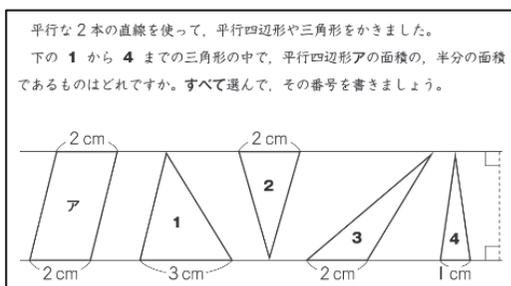


図2 2017年全国学力調査

る。2点目は平行線の扱いで、4年生の既習事項である「平行線の間の長さが等しい」ことを図形の面積のどのタイミングで用いるのが良いかである。

そこで、本研究の目的を、この2点について改善した指導計画を提案することとし、この指導計画に則って、高さが底辺の外にある鈍角三角形の求積方法の授業実践を行い、授業での成果や効果を検証することにする。

2 研究の内容

(1) 三角形の面積の指導計画と主な内容

表2 三角形の面積指導手順(山野案)

1	三角形の面積
①	直角三角形の面積
②	鋭角三角形の面積 (高さが底辺上にある三角形)
③	鈍角三角形の面積
④	高さが外にあるときの面積の求め方
	鈍角三角形の高さと面積
⑤	平行な直線を使って
	底辺と高さが等しい三角形の面積が等しいわけの説明 (鋭角・直角・鈍角三角形)
④③	三角形の面積の公式の使い方
	底辺をどこにするかで高さが決まる (高さが底辺上にある場合・ない場合)
2	平行四辺形の面積
	:
4	面積の求め方の工夫
	:

筆者の提案する指導手順を表2に示す。主な流れ

は、次の通りである。

① 直角三角形の面積

直角三角形では、直角三角形の面積が、長方形の面積の半分になることを、既習の合同な三角形や等積変形を行い求め、いったん式化する(図3)。

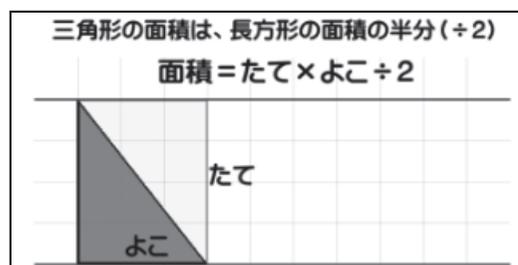


図3 直角三角形の面積

② 鋭角三角形の面積

鋭角三角形でも、直角三角形の頂点を動かした鋭角三角形が長方形の面積の半分になることを、既習の合同や等積変形を行い求める(図4)。ここでは

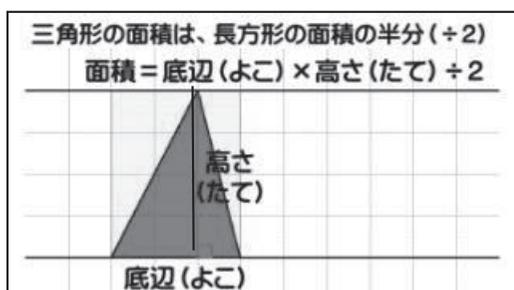


図4 鋭角三角形の面積

「底辺」と頂点から底辺に垂直に下ろした線分の長さを「高さ」ということをおさえ、面積の求め方を底辺×高さ÷2といったんおさえる。

③ 鈍角三角形の面積。

鋭角三角形の頂点をさらに動かし、高さが底辺の外にある鈍角三角形について調べる(図1あ・い)。この時間の授業については詳しく後述する。

④ 三角形の面積の公式を使って

底辺をどこにするかで高さが決まる(高さが底辺上にある場合・ない場合)ことを学習し、3つの辺のどこを底辺と考えても、三角形の求積公式を用いて計算すると、ほぼ等しい値が得られることを学習する。三角形の求積公式を用いるために、底辺と高さについての理解を深めるのである。

(2) 平行線間の長さが等しい教具

「1問題の所在と研究の目的」でも述べたとおり、筆者は既習の事項は積極的に新しい学習に用い、既習事項の習熟と活用力の向上を図るようにしたいと考える。ここで取り上げる「平行線の扱い」も例外でない。

この平行線間の距離を等しく保ち、頂点を自由に動かすカーテンレールを用いた教具(山野:2023)を筆者は、三角形の面積の第1時から用いることを提案する。教具の設計図は以下の通りである(図5この教具の使い方は、山野(2017)を参照されたい。)。カーテンレールを二重にすることで、図形が変化する前と変化した後や、同時に2つの図形の比較が可能になる。

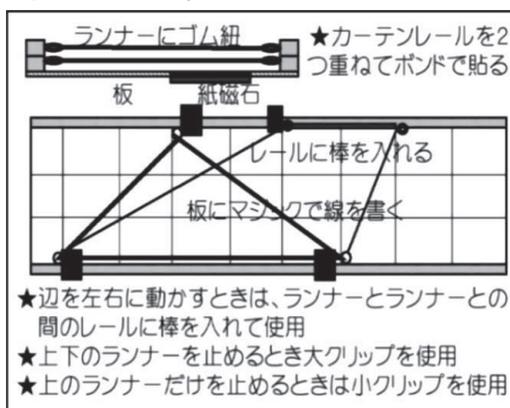


図5 カーテンレールの教具設計図

三角形の頂点が動くことで、三角形が直角三角形→鋭角三角形→高さが底辺の外にある鈍角三角形に連続的に変化していく様子を、児童に教具を操作させながら見せていくことができるのである。

(3) 高さが底辺上にとれない三角形の授業実践

① 学習課題とめあてづくり

まず、カーテンレールを用いた教具(図6)を用い、既習の直角三角形の面積が長方形の面積の半分



図6 カーテンレールの教具実物

であったことを確かめた(図3)。その後、頂点を

右に動かし、鋭角三角形の面積も長方形の面積の半分だったことを確かめた(図4)。

T 今日どんな三角形を調べたい?

C n 頂点をもっと動かした三角形。(T これ位?)もっと動かす。

児童が前に出て教具を動かした後、スライドで図1の「あ」と「い」を調べることを確認した。

T こんな三角形の何を調べるの?

C 長方形の面積の半分になるかどうかです。

T じゃあ、今日のめあてを何にする?

C 「あ」や「い」の三角形は長方形の面積の半分になるか調べようです。

児童が言ったことを教師がめあてとして板書し、児童にめあてをノートに書くように指示した。児童に学習課題を作らせたり、めあてを決めさせたりすることは、児童の課題発見能力を高め、主体的な学習につながると筆者は考える。

②解決結果と方法の見通しと自力解決

T じゃあ、予想してみよう。この三角形は、長方形の面積の半分より、大きい?小さい?変わらない?ア、イ、ウのどれかな?

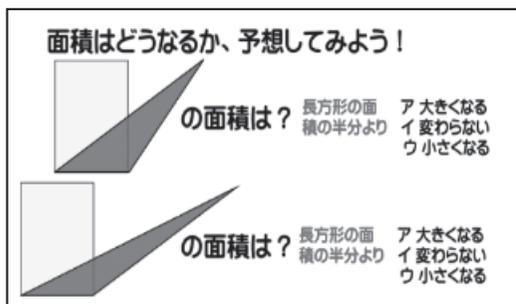


図7 結果の予想ワーク

児童の予想は、「あ」の面積も「い」の面積も、長方形の面積の半分より「小さくなる」と「変わらない」と考える児童が大体半々位で、「大きくなる」と考える児童はほとんどいなかった(図7)。長方形の面積の半分より面積が「小さくなる」と考える児童の理由は、「細くなるから。」で、「変わらない」と考える理由は、「細くなるけど、その分長くなるから。」が主な理由であった。面積の「保存性」(J.ピアジェ:1992)の理解である。

まず「あ」の等積変形である。「あ」を4つ程度方眼にプリントした紙を配った。失敗しても大丈夫と、児童を安心させるためである。

作業で等積変形をして確かめる前に、直角三角形の面積や鋭角三角形の面積が長方形の面積の半分であることをどうやって確かめたか、直角三角形や鋭角三角形を等積変形したことを想起させた。その手順から解決のための方法の見通しを持たせることにした。既習の解決方法も、新しい課題を解決するために役に立つことを児童に実感させておくことが大切であると筆者は思うからである。

図8 直角三角形と鋭角三角形の等積変形

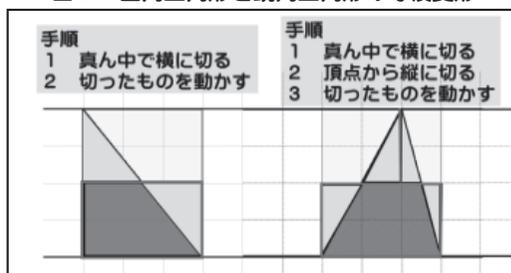


図8のスライドを見せ、2つの等積変形の共通点に気づかせるようにした。

C どちらも最初に真ん中で横に切った。

C これ(あ)も、最初に真ん中で横に切ったらえんじじゃない。(Cn そうじゃなあ)

作業を始めると、「あ」を方眼にプリントした紙の真ん中を横に、躊躇なくはさみで勢いよく切る児童、慎重に鉛筆で線を引いてから切る児童など様々であった。グループの中では、

C 次、どうするん?

C 縦に切るんじゃないん?右見て。

児童は図8の鋭角三角形の方法をみて、どこを縦に切るか考え、長方形からはみ出した部分を縦に切り、動かし始めた。しばらくすると「できたあ!」といった歓声が教室の所々から聞こえるようになっていった(図9「あ」)。

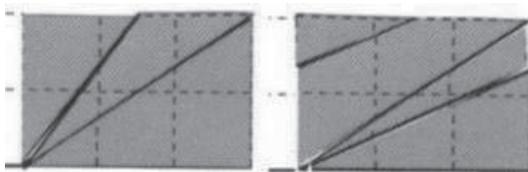


図9「あ」の等積変形 「い」の等積変形

筆者は「あ」の等積変形ができていることを確かめて、「い」のプリントを「ちょっと難しいよ。できる?」と言って渡していった。児童は「あ」で上手かった方法を「い」に使い、まず真ん中を横に

切り、はみ出た部分を縦に切った（図9「い」）。

「い」については、全員が完成できなかったが、両方ができた児童が、困っている友達にヒントをだしなら、次々に完成していった。

③全体での練り合い

直角三角形、鋭角三角形、鈍角三角形「あ」「い」の4つを並べ、4つの三角形は全部面積が等しく「底辺×高さ÷2」であることを確かめた。

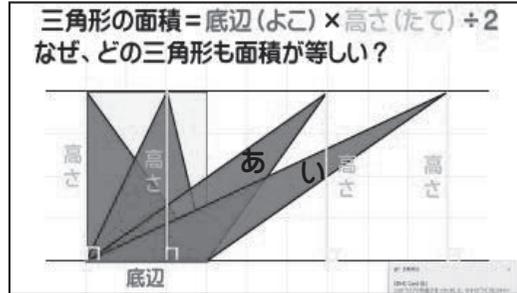


図10 3種4つの三角形の底辺と高さ

そして、4つの三角形のまず底辺が共通で等しいことを確かめた。次に4つの三角形の高さを確かめていった（図10）。

T 「あ」の三角形の高さはどこ？

まず、児童を指名し、「高さは底辺に対して垂直であること」を確認し、「あ」の三角形の高さがどこかを確かめた。

次に、「い」の三角形の底辺に対して垂直な高さがどこかを確認していくと、

- C あれ、底辺も高さも全部同じじゃあ。
- C それで、面積が等しいんじゃないか。(T どういうこと?) 面積は「底辺×高さ÷2」で底辺も高さも同じだから、答えは同じだと思います。
- C 賛成で、底辺も高さも同じで、同じものをかけたら答えは同じになると思います。
- Cn いいと思います。(T 本当に? ペアで確かめてみて。)

このとても良い発見をみんなが理解できたかどうか、ペアになって説明し合うことを通して振り返りをさせ、面積が等しい理由を確かめ合わせた。

④ 発展的な練習・習熟

まず、底辺の長さが同じで高さが高い三角形の面積（図11ア）が、これまでの4つの三角形の面積と同じかどうかを尋ねた。

T じゃあ、アの面積は等しいかな？

C 等しくありません。(T どうして?) 高さが高いから(T 大きくなるの? 小さくなるの?)、大きくなると思います。

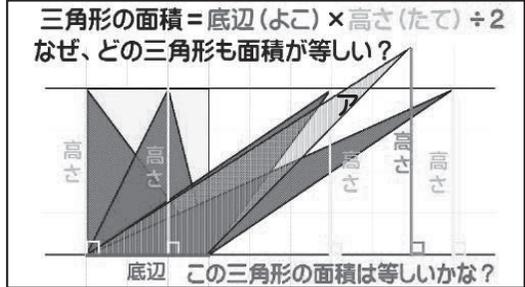


図11 底辺が同じで高さが高い三角形の面積

C 賛成で、底辺は同じだけど、高さが高いから大きくなると思います。(Cn いいです。)

次に、底辺の長さが長く高さが等しいイの面積も、面積が大きくなることを確かめた（図12）。

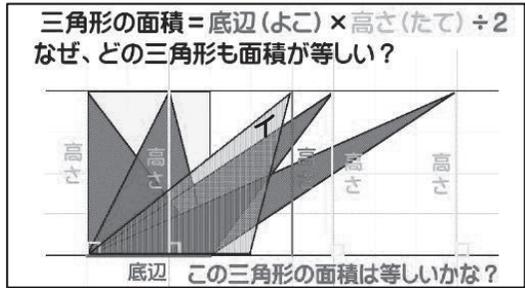


図12 底辺が長く高さが同じ三角形の面積

最後に、底辺の長さが長く高さが低いウの面積を尋ねた（図13）。児童は、いったん迷ったが、公式を用い計算（4×3÷2=6）して、面積が等しいことを確かめ合った。

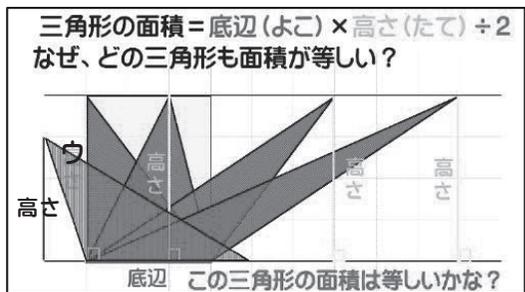


図13 底辺が長く高さが低い三角形の面積

T じゃあ、ラスト! ウの面積はどう?

少し困った様子が児童に見られた。

T 今度はどんな三角形かな?

C 底辺が長くて、高さが低いです。(T だから、面積は?) どちらかわかりません。

Cn 相談する時間をください。(T どうぞ、残り時間ないけど。)

グループで相談する時間をとった。グループの話し合いでは、「あ」や「い」の三角形の面積が $3 \times 4 \div 2 = 6$ であることを求め、次にウの面積を求めようとして、底辺と高さを調べていった。

C 底辺は4で、高さが3じゃあ。

C じゃけえ、計算すると($4 \times 3 \div 2 = 6$) 6。

Cn おんなじじゃあ。

児童は計算をして、どれも面積が6であることを求め、ウの面積が等しいことを確かめた。そして、この方法を全体場で発表した。

⑤ 授業の振り返り

最後に1時間の振り返りを書いて授業を終えた。数人の振り返りを紹介するが、前略の部分は全員「何について考えたか」書くように指導しており、ほとんど同じだったので省略し、特に児童が価値づけた部分を紹介する。

●(前略) はじめ細い三角形は面積が小さくなると思っていたけど、〇〇君の底辺と高さが同じなら面積は変わらないという意見を聞いて、三角形の面積は底辺と高さが同じなら、面積は変わらないと言うことが分かりました。

●(前略) 見た目から、長方形の面積の半分より小さくなると思っていたけど、〇〇君の底辺と高さが同じという考えを聞いて、長さに気をつけることが大切だと思いました。

●(前略) はじめは細い三角形は面積が小さくなると思っていたけど、でも、図形を切ったり、〇〇君のアドバイスを聞いたりして、どんな形でも底辺と高さが同じなら長方形の半分になることが分かりました。

●(前略) 私は面積が同じだと思っていた。細いけど長いからです。切って動かすと、やっぱり長方形の半分になりました。ならべてみると、〇〇君が底辺と高さが同じだから面積が同じということに気づき、すごいと思いました。

3 研究の考察

(1) 頂点から底辺上に高さのとれない三角形と平行線の扱いについて

①児童が自ら学習課題とめあてを作る

新たな指導計画では、カーテンレールの教具を用い、頂点を動かし直角三角形、鋭角三角形、鈍角三角形の順に変形を繰り返し指導を行った(表2)。

2(3)①の活動では、頂点をもっと外に出し、高さが底辺の外にある三角形の面積を求めたいと児童に思わせることに成功した。本時で求積させたい学習課題をほぼ児童が自ら設定することができたと考える。また、めあてについても同様にほぼ児童が自ら作ることができた。

これは、第1時の直角三角形から、カーテンレールの教具を用い、平行線を大切に扱い、平行線上の頂点の移動による図形の変形を重視し、直角三角形、鋭角三角形、鈍角三角形の順に指導計画に沿って指導したことによるものであると考える。

②等積変形の課題の克服

杉山(2008)はこの長方形→直角三角形→三角形→平行四辺形の系列を「長方形の面積の求め方が分かっていたら、それを基にして分かることは何でしょうか、それが分かたらずに分かることは何でしょうか」というような考え方で進める」系列であると述べる。その場合、問題となるのが図7で示した「あ」「い」のような高さが底辺の外にある三角形が長方形の半分の面積であることを図で示すことの難しさである。これを杉山(2008 p.199)は著書で「欠点」と指摘する。

確かに、「考える足場」(石田:2007)がなければ、児童にとって難しい課題であると筆者も考える。そこで、筆者は「考える足場」として、既習の図8の直角三角形と鋭角三角形の等積変形の方法を児童に提示し、共通点である「1番最初に、真ん中を横に切る」に気づかせようとした。児童は、この方法が「あ」「い」の高さが底辺の外にある三角形にも使えそうなことを類推し、紙を切って等積変形していった(図9)。ただ、「い」の等積変形は時間切れになった児童もいた。しかし、「あ」の等積変形については全員が等積変形することができた。

既習の解決方法を、新しい学習課題の解決方法の見通しを持たせるための「考える足場」として活用

すれば、杉山（2008）が「欠点」と指摘するほど、難しい課題ではないことが実践を通して分かった。

③ 3種の三角形の面積が等しい理由の発見

全体の練り合いでは、1組の平行線に挟まれた3種4つの三角形を見せ、どれも長方形の半分の面積で等しいことをまず確認した（図10）。次に、それぞれの底辺と高さを確認していくと、4つの三角形の底辺と高さが等しいことに気づき、だから面積が等しいことを児童が徐々に発見していった。

この発見は他の児童にとっても印象深かったようで、2（3）⑤の振り返りでも紹介しているとおり、多くの児童が振り返りにその発見を価値づけ、それぞれの授業の振り返りに記述している。

また、「底辺と高さが同じだから面積が等しい」ことを児童はよく理解できたようで、次の練習・習熟問題の「底辺が等しく高さが高い場合の三角形」、「底辺が長く高さが同じ場合の三角形」（図11「ア」と図12「イ」）の面積が大きくなることを、理由をつけて正しく判断することができた。

このことから、高さが底辺の外にある鈍角三角形を等積変形して、長方形の面積の半分であることをおさえるだけでなく、等しい4つの三角形を平行線に挟み、底辺や高さに注目させることは非常に効果的であったと筆者は考えるのである。

（2）平行四边形などの指導への活用

三角形の面積の求め方の学習の次は、平行四辺形の面積の求め方である。その際、高さが底辺の外にある三角形までの面積を一般化しておくことは大切であったと筆者は感じた。

三角形の面積を用いて平行四辺形の面積の求め方を考える場合、平行四辺形を対角線で2つに切ると、合同な三角形が2つできる。それを用い、

$$(あ) \quad \begin{aligned} \text{「平行四辺形の面積} &= \text{三角形の面積} \times 2 \\ &= (\text{底辺} \times \text{高さ} \div 2) \times 2 \end{aligned}$$

という具合に、平行四辺形の面積を公式化する。

平行四辺形を対角線で2つに分ける場合、2通りの分け方がある（図14）。Aの切り方は、高さが

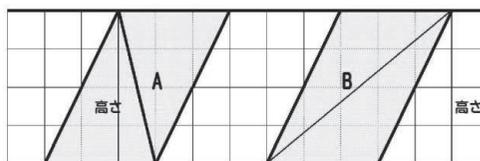


図14 平行四辺形を対角線で切る

が底辺上にある鋭角三角形が2つである。これについては教科書通りの指導計画でも公式化できる。しかし、Bの切り方では、高さが底辺の外になるので、教科書の指導計画では公式化できない。同じ平行四辺形なのに、分け方によって求められる場合と求められない場合があるのは、児童を混乱させる。

表2の指導計画で指導し、三角形を一般化した本学級の児童は、図14AとBどちらでも、困ることなく（あ）の公式を導くことができた。また、高さが底辺の外にある平行四辺形についても困ることなく（あ）の公式を導くことができた。

さらに、台形についても、1本の対角線で2つに分ければ、高さが底辺の外にある三角形ができることがあるので、できるだけやく三角形を一般化しておく、習熟させておくことは、台形の面積の公式化や求積だけに限らず効果的であると考える。

このように、高さが底辺の外にある三角形までをいっきに指導し、公式をどんな三角形でも使えるように一般化しておく指導計画は、極めて重要であると筆者は考えるのである。

（引用及び参考文献）

- 石田淳一（2007）、「考える足場」をつくる算数科授業事例集，明治図書
- 清水静海（2020）、「わくわく算数5」，啓林館，
- J.ピアジェ・B.インヘルダー（1992）『量の発達心理学』，国土社，pp.32-64
- 全国学力・学習状況調査（2017）算数A
- 杉山吉茂（2008），『初等科数学科教育序説』，東洋館出版，p.195 p.199
- 山野定寿（2017）、「統合的考え方を育てる「図形の面積」の授業の構想（2）」岡山大学算数・数学教育学会「パピルス」第24号
- 山野定寿（2023）、「この授業プランで2学期を楽しく」，数学教室7月号，あけび書房
- （令和5年12月18日 受理）