岡山大学算数・数学教育学会誌
『パピルス』第 30 号（2023 年）8 頁～ 11 頁

# 仮商修正における手隠し法の取り扱いと性質について

宮内通孝 *

**研究の要約**

小学校第 4 学年で扱う除数が 2 位数の除法では, 見当をつけた仮商から実際の商を求める仮商修正を行う．仮商を見つける方法のひとつに, 啓林館の教科書で扱う手隠し法がある．手隠し法で求めた仮商は真商以上となるという性質がある．本研究ではこの性質が啓林館の教科書の記述にどのように反映されているかを述べ, その他の教科書の記述と比較を行う．また, 手隠し法による仮商が真商以上となることの証明を与える．

**Key words:** 仮商修正, 手隠し法, 真商, 除数が 2 位数の除法

## 1　手隠し法

小学校算数科の第 4 学年では, 除数が 2 位数の除法の計算の仕方を扱う．除数が 2 位数の場合, 適切に近似をした割り算によって商の見当をつけ, 必要ならば実際の商へと修正を行う．ここで, 見当をつけた商を仮商, 実際の商を真商と呼ぶ．

啓林館の教科書「わくわく算数 4 上」[1] の単元「2 けたでわるわり算の筆算」では, 次のように仮商を見つける．例えば $96 \div 32$ の場合, 96 を 90, 32 を 30 で置き換えて, $90 \div 30$ の商から $96 \div 32$ の商の見当をつける．また, 10 の何個分かで考えることで $90 \div 30$ は $9 \div 3$ で近似する．

$$\begin{gathered}96 \div 32 \\ \downarrow \\ 90 \div 30 \\ \downarrow \\ 9 \div 3\end{gathered}$$

この方法では除数, 被除数ともに 1 の位を切り捨てた 10 の倍数で近似を行う．1 の位を四捨五入するのではないことを注意しておく．$96 \div 32$ だと, 除数と被除数の 1 の位の数 6 と 2 を指で隠せば $9 \div 3$ となることから, この方法を手隠し法と呼ぶことがある．

手隠し法で見つけた仮商は真商以上となることが知られている．啓林館の教科書では手隠し法のみを紹介しているため, 仮商修正の方法は仮商が大きすぎた場合のみ説明がなされている．

## 2　教科書における手隠し法

商の見当をつける際, 実際の数と近い数に置き換えた方が真商により近い仮商が見つかると考えられる．例えば $76 \div 28$ (真商 2) の場合, 手隠し法では $70 \div 20$ で近似して仮商の 3 を見つけるが, より近い 10 の倍数で置き換えて $80 \div 30$ を用いると仮商 2 が真商に一致する．教科書の中にはこう

*岡山大学学術研究院教育学域

した手隠し法以外の方法を紹介しているものもある.

啓林館の教科書では, 仮商修正の方法を次のようにまとめている.

“見当をつけた商が大きすぎたときは, 1 小さい商をたてて計算しましょう.”

手隠し法では仮商が真商より小さくなることはないので, 啓林館の教科書では大きい場合の修正の方法のみをまとめている. その他の方法では, 一般に仮商が真商より小さくなることが起こり得る. そのため, 他の方法を扱っている教科書では仮商が小さい場合の修正の方法もまとめてある. 大きすぎた場合の啓林館の記述に合わせると, 仮商が小さい場合の修正方法は次のようにまとめることができる.

“見当をつけた商が小さすぎたときは, 1 大きい商をたてて計算しましょう.”

次の表は, 教科書ごとに除数が 2 位数の除法の計算にあたる単元での仮商修正の方法の記述をまとめたものである. ([1],[2],[3],[4],[5],[6]) 仮商が真商より大きすぎたとき, 小さすぎたときに分け, 記述がなされている場合は ◯, なされていない場合は × を記入した.

| | 大きいとき | 小さいとき |
|---|---|---|
| 東書 | ◯ | ◯ |
| 大日本 | ◯ | ◯ |
| 学図 | ◯ | × |
| 教出 | ◯ | ◯ |
| 啓林館 | ◯ | × |
| 日文 | ◯ | ◯ |

表からも分かるように, 学校図書と啓林館の教科書では手隠し法のみが紹介されている. それ以外の教科書では, 除数をより近い 10 の倍数で置き換える方法が, 少なくとも考え方の一つとしては紹介されている.

## 3　手隠し法の性質の証明

この節では, 手隠し法で立てた仮商は真商以上となることを証明する.

**定理 1.** $a$ を自然数, $b$ を 10 以上の自然数とする. $a, b$ の 1 の位の数字を 0 で置き換えたものをそれぞれ $a_1, b_1$ とする. $a_1, b_1$ を 10 で割ったものをそれぞれ $a_2, b_2$ と置く. $a$ を $b$ で割った商を $q$, $a$ を $b_1$ で割った商を $q_1$, $a_1$ を $b_1$ で割った商を $q_2$, $a_2$ を $b_2$ で割った商を $q_3$ と置く. このとき次が成り立つ.

$$q \leq q_1 = q_2 = q_3.$$

定理 1 において, $q$ が真商で $q_3$ が手隠し法による仮商である. 手隠し法の性質の教材化を目指して出来るだけ平易な証明を与えるために, 定理 1 では補助的に $q_1, q_2$ を用意した. 例えば $96 \div 28$ の場合, $a = 96, b = 28$ と置いて $a_1 = 90$, $b_1 = 20$, $a_2 = 9$, $b_2 = 2$ となる. このとき割り算を次のように置き換えていく.

$$\begin{array}{l} 96 \div 28, \quad \text{商 } q = 3 \\ \quad\downarrow \\ 96 \div 20, \quad \text{商 } q_1 = 4 \\ \quad\downarrow \\ 90 \div 20, \quad \text{商 } q_2 = 4 \\ \quad\downarrow \\ \;\,9 \div 2, \quad\;\; \text{商 } q_3 = 4 \end{array}$$

最初の置き換えでは $q \leq q_1$ と一般には商が大きくなることがある. 残り 2 回の置き換えでは $q_1 = q_2 = q_3$ と商は変わらない. これが定理の主張である.

定理 1 を 3 つの補題に分けて証明する. そこで用いるのは整数の除法の定義である.

**定義 2.** $a$ を整数, $b$ を自然数とする．このとき

$$a = qb + r,\ 0 \le r < b$$

を満たす整数 $q, r$ が一意的に存在する．$q$ を $a$ を $b$ で割った商, $r$ を $a$ を $b$ で割った余りと呼ぶ.

定理 1 の不等式を順に証明しよう.

**補題 3.** $q \le q_1$.

**証明.** $q$ は $a$ を $b$ で割った商であるので, 余りを $r$ とすれば

$$a = qb + r,\ 0 \le r < b.$$

同様に $a$ を $b_1$ で割った余りを $r_1$ と置くと

$$a = q_1 b_1 + r_1,\ 0 \le r_1 < b_1.$$

$b$ の 1 の位の数字を 0 で置き換えたものが $b_1$ であるので, $b_1 \le b$ が成り立つ.

$q_1 < q$ であると仮定すると, $q_1 + 1 \le q$. 従ってこのとき

$$\begin{aligned} a &= q_1 b_1 + r_1 < q_1 b_1 + b_1 = (q_1 + 1) b_1 \\ &\le qb \le qb + r = a \end{aligned}$$

となって $a < a$ が得られるため矛盾する．よって $q \le q_1$ であることが示された． □

補題 3 について補足しておく．$a$ を $b$ で割った商が $q$, $a$ を $b_1$ で割った商が $q_1$ であった．$b_1$ は $b$ の 1 の位の数字を 0 で置き換えたものであるから $b_1 \le b$ が成り立つ．この置き換えでは割る数だけが $b$ から $b_1$ へと小さくなり, 割られる数は $a$ のままである．従って補題 3 は「割る数を小さくすると商は大きくなる」という性質から説明をすることができる.

**補題 4.** $q_1 = q_2$.

**証明.** $a_1$ を $b_1$ で割った商が $q_2$ であるから, 余りを $r_2$ と置くと

$$a_1 = q_2 b_1 + r_2,\ 0 \le r_2 < b_1.$$

$a_1, b_1$ はそれぞれ $a, b$ の 1 の位の数字を 0 としたものであるから, どちらも 10 の倍数である．従って $r_2 = a_1 - q_2 b_1$ もまた 10 の倍数である．$b_1, r_2$ は 10 の倍数であるから $b_1 - r_2 > 0$ は 10 以上である．上の式の両辺に $a - a_1$ を加えると

$$a = q_2 b_1 + r_2 + a - a_1$$

となる．$a - a_1$ は $a$ の 1 の位の数であるから $0 \le a - a_1 \le 9$. $10 \le b_1 - r_2$ と合わせて

$$0 \le r_2 + a - a_1 < b_1$$

を得る．よって $a$ を $b_1$ で割った商は $q_2$ で余りは $r_2 + a - a_1$ となる．$a$ を $b_1$ で割った商を $q_1$ と定義したので $q_1 = q_2$ が従う． □

補題 4 について具体的な場合に説明を加えておく．$97 \div 20$ のように除数が 10 の倍数である場合, 被除数の 1 の位の数字を 0 で置き換えて $90 \div 20$ としても商が変わらないというのが主張である．この場合,

$$97 = 4 \cdot 20 + 17$$

のように被除数と余りの 1 の位の数字は一致する．両辺からその数を引くと

$$90 = 4 \cdot 20 + 10$$

となるので, 被除数と余りのみが変化して商は変わらないのである.

**補題 5.** $q_2 = q_3$.

**証明.** $a_2$ を $b_2$ で割った商が $q_3$ であるので, 余りを $r_3$ と置くと

$$a_2 = q_3 b_2 + r_3,\ 0 \le r_3 < b_2.$$

$a_1, b_1$ を 10 で割ったものがそれぞれ $a_2, b_2$ であったので $a_1 = 10a_2$, $b_1 = 10b_2$. よって上の式を 10 倍して

$$a_1 = q_3 b_1 + 10r_3,\ 0 \leq 10r_3 < b_1$$

を得る．従って $a_1$ を $b_1$ で割った商は $q_3$, 余りは $10r_3$ となる．$a_1$ を $b_1$ で割った商を $q_2$ と定めたので $q_2 = q_3$ を得る． □

補題 5 について補足しておく．$a_1, b_1$ を 10 で割ったものをそれぞれ $a_2, b_2$, $a_1$ を $b_1$ で割った商を $q_2$, $a_2$ を $b_2$ で割った商を $q_3$ と置いた．従って補題 5 は「割る数と割られる数を同じ数で割っても商は変わらない」という性質から説明をすることができる．

定理 1 は補題 3, 4, 5 から直ちに従う．

## 参考文献


[1] 清水静海ほか．わくわく算数 4 上, 新興出版社啓林館, 2020.

[2] 藤井斉亮ほか．新しい算数 4 上, 東京書籍, 2020.

[3] 橋本吉彦ほか．たのしい算数 4 年, 大日本図書, 2020.

[4] 一松信ほか．みんなと学ぶ 小学校 算数 4 年 上, 学校図書, 2020.

[5] 坪田耕三ほか．小学算数 4 上, 教育出版, 2020.

[6] 小山正孝ほか．小学校算数 4 年 上, 日本文教出版, 2020.


（令和５年１２月２５日　受理）