岡山大学算数・数学教育学会誌
『パピルス』第 29 号（2022 年）１頁～７頁

高校数学の微分係数の理解を促す深い学びに関する研究
―教授学的状況理論と APOS 理論を用いて―

林田峻* 岡崎正和**

研 究 の 要 約

本研究は，微分の定義の極限概念の理解における困難性を踏まえ，微分の定義の学習段階において深い学びが生じる授業を構成することを目指すものである．それに伴い，本稿では，協定的構成主義の知識観を採用し，その知識観に関連した理論である APOS 理論と教授学的状況理論を相補的に援用することを試みた．理論検討においては二者の特性を考察し，題材の考察と分析には APOS 理論を，実際の授業の形や工夫などを考察する際には教授学的状況理論をそれぞれ用いて考察した．考察の結果として，微分の定義の極限概念の理解が生徒の中から生じるような授業計画を作成した．具体的には，微分の定義の極限概念についての理解を生じさせ深めていくことを目指し，そのためにはまず瞬間の速度を捉える上で，既有の知識を用いて具体的に働きかけることのできる行為の状況を設定し，そこから得られるアイデアを平均変化率の考えを元にグラフの中で表現し，洗練させる様相，またそのアイデアをコミュニケーションし言語化することで微分の考えに近づけていく様相を授業の構想へ含めることが重要であるという示唆を得た．

Key-words ： 深い学び，協定的構成主義，教授学的状況理論，APOS 理論

1．はじめに

平成 30 年改訂高等学校学習指導要領では，「主体的・対話的で深い学び」の観点からの授業改善が求められている（文部科学省，2019）．中でも「深い学び」は，従来から重視されてきたアクティブ・ラーニングの方向性をより詳細に示すため，重要な目標として設定されている．

深い学びでは，単元ごとの「数学的な見方・考え方」を働かせながら，知識を相互に関連付けてより深く理解することが重要とされている（文部科学省，2017）．また，「数学的な見方・考え方」は，深い学びにおいて働かせることでさらに豊かになるものである（杉能，2017）．「数学的な見方・考え方」の多くの具体例が方法知の様相を呈している（例えば，鈴木，1992：松岡・安西，2004）ことを踏まえると，これらは生徒が知識を主体的に用いることで，新たな知識を生じることに重点を置いていると考える．

高校数学において，このような知識形成における課題を持つ単元に，微分・積分が挙げられている．微分・積分の単元内の知識理解が課題となる要因として，それらの根幹をなす微分・積分の極限概念の理解の困難性が指摘されている（茂野，2018）．これについて，積分が微分の逆演算で定義されることを踏まえると，微分の定義が単元の主軸かつ出発点であり，微分の定義の極限概念の理解が重要であると考える．これを踏まえ，微分の定義の極限概念の学習において深い学びを生じることは大きな課題であり，数学教育において意義のあるものと考える．本研究はこの課題解決を検討する．

この課題解決を検討するに当たり，そもそも知識とはどのようなものかといった「知識観」の面について検討する必要があると考える．これに際して，

*　浅口市立金光中学校
**　岡山大学学術研究院教育学域

中原（1994）の提起する「協定的構成主義」を参照したい．中原は，数学の公理や定義について次のように述べている．

> 数学における公理，定義や推論規則は論争，協議を経て，合意に達した内容を言語や記号で明文化したものであると捉えられることを指摘し，それ故に，それらを協定（agreement）と捉えることが適切であることを提起した．そうした協定は勝手に結ばれるのではなく，整合性，適合性，機能性，効率性などの視点からの検討を踏まえて，協定へと至ることにも言及した．さらに，そうした基準を満たすと合意された知識を急進的構成主義にならって，生存可能な知識と呼ぶことにした．（中原，1994，pp.308-309）

この視点を参考にすれば，知識とは，最初は生徒個人が構成する概念や考え方などが，議論・検討を通して協定に至ったものであり，協定に合意した集団内で共有されているものである．そうして得られた生存可能な知識は，ふたたび生徒個々人の主観によって捉えられ，生徒たちは自分たちなりの数学的知識をさらに構成していくこととなる．この知識観は生徒の対話や主体的な合意を含むため，「対話的な学び」の視点の示唆も含むと考える．

具体的に知識形成・概念発達がどのように生じるのかを検討していく上で，APOS 理論と教授学的状況理論を採用したい．これらはいずれも構成主義的な考えを用いた概念理解に関する理論である．前者は知識がどのように発生するのかに焦点を当てて，生徒がどのように概念形成を行っていくのかを検討する際に有用であり，題材の示唆を与えるが，授業デザインに関する示唆は含まれていないと考える．後者は授業における教師・生徒・場の関係に焦点を当てており，授業場面を構想し，その連続性の点から考察することで授業改善の示唆を与えることができると考える．これらの理論を比較したとき，互いの長所で互いの短所を補うことができるのではないかと考えた．

これを踏まえ本稿では，生徒に微分の定義の極限概念の理解を促す授業計画を，APOS 理論と教授学的状況理論を相補的に援用することで行っていく．

２．APOS 理論

まず，APOS 理論の考えと起源分解について概説する（Arnon et al., 2014，濱中・吉川, 2018）．

APOS 理論は，学習者が数学的概念の理解を築き上げる，すなわち概念発達の心理的構造の段階を，以下の 3 つとしている．

1，Action コンセプション
2，Process コンセプション
3，Object コンセプション

1 の段階では，数学的概念は外的な Action として，心的ではなく明示的に行われる．すなわちこの段階で行われる操作はまだ想像で行うことができない．

2 の段階では，1 の Action が繰り返し行われるにつれて，Action が具体的操作無しに念頭で行うことができるようになる（Process）．これを内化という．ここでは，関係づけや可逆性が特有の処理となる．

3 の段階では，Process 自身が探究の対象にできるようになる．すなわち念頭で行われていた操作である Process に対して，何らかの Action や Process を行うことができるようになる．これを Process コンセプションのカプセル化と呼ぶ．

これらの段階を経てカプセル化された Object は，必要に応じて Process へ分解して考えたり（脱カプセル化），分解した Process を組み合わせてふたたび 1 つの Object にカプセル化したりできるようになる．このような心理的構造とその間のメカニズムが組織化された総体を Schema と呼ぶ．

これらのコンセプション段階を考慮し，ある数学的概念が生徒の中でどのように発生し，発達していくのかを記述するモデルが，起源分解である．図 1 は，Dubinsky と Lewin（1986）が示した起源分解の例であるが，起源分解において，教えたい概念を Object とし，それにつながる Process や Action を，生徒像を元に検討してつなぐことで，生徒の持つ概念から教えたい概念がどのように生じるのかを検討している．

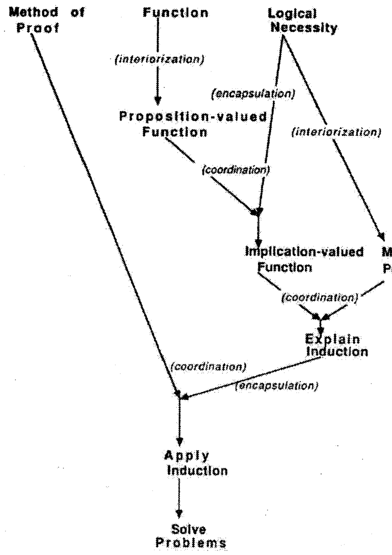

図1 起源分解の例 (Dubinsky, 1994, p.232)

3．教授学的状況理論

次に，教授学的状況理論について述べる (Brousseau., 1997, 岡崎, 2003)．教授学的状況理論は，Brousseau (1997) により提唱された．この理論では，人や環境，交わされるメッセージなどを含めた，授業の中での主体が広く働きかける対象を「milieu (場)」とよび，生徒・場・教師の三者の関係に焦点を当てて，授業における知識形成の状況を「亜教授学的状況」としている．亜教授学的状況の考え方によると，生徒はあたかも場との相互作用によってのみ学習していると感じ，教師は生徒と場に対して働きかけ，期待する知識を生徒が獲得できるよう調節する役割を担う (図2)．

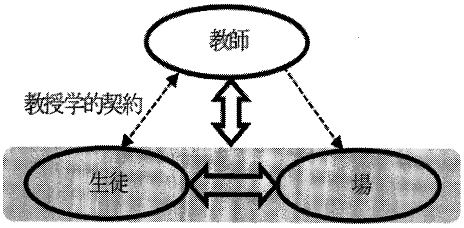

図2 亜教授学的状況のモデル
(Brousseau, 1997, p.56)

また，生徒と教師との間にはしばしば教授学的契約が働く．これは，生徒が教師の教えようとする内容を探ることによって自然に生じるものであるが，もしこの契約が教師が教え生徒が学ぶ一方校のやえりとりが中心となるものであれば，この相互作用によって得られた知識は表面的となり，利用できないものとなることが多いとされる．本研究においては，「使える知識」，「生存可能な知識」を目指すため，生徒が主体的に取り組める場づくりであることを，教師と生徒の間で合意していくことも重要となる．

さらにBrousseau (1997) は，亜教授学的状況を通して，生徒は自分が持つ認識を場と結びつけ，意味を持った (利用可能な) 知識を形成するという知識観を持ち，学習過程を，認識と場が互いを支えながら，次第に発展していく様相として捉えている．図3では，認識1と場1または認識1'と場1'の間の両矢印が，「互いを支えながら」の部分を表し，楕円が広がっていく様子は「次第に発展していく様相」を表している．

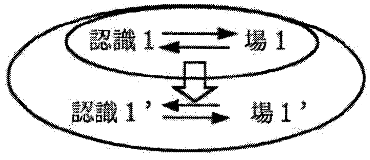

図3 認識と場の対応とその発展
(岡崎, 2003, p.3)

Brousseau (1997) は，この亜教授学的状況を次の3段階に分類している．

Ⅰ．行為の状況
Ⅱ．定式化またはコミュニケーションの状況
Ⅲ．妥当化の状況

Ⅰは，生徒は取り扱う問いをもって活動に対して主体的に取り組み，場との相互作用を通して解を予想したりして，当該概念を形成する上での基本となるアイデアを形成する場である．

Ⅱは，他の生徒に対して自分のアイデアを紹介・説明する活動などを行うことで，アイデアが言語化され，使える道具としての側面を帯びる．このとき，場には「他者」の側面が入ってくる．

Ⅲは，他者とのコミュニケーションでの発言や用いたアイデアなどが考察対象に変化し，その妥当性を探究することで定理などを見いだす．Brousseau (1997) はこの段階には提案者，賛成者，反対者が存在し，その対立によってアイデアが洗練されるとしている．

中村（2014）は，教授学的状況理論は授業改善においては有用であるが，教えたい知識が数学的にどのような過程を経て形成されるかの示唆は与えないことを述べている．これに対して APOS 理論の起源分解は概念発達の流れを検討できるだけでなく，Action コンセプションが生徒の行為であることから，生徒の動きを元に題材を考察しやすくなると考える．他方，APOS 理論はグループ分けをどうするかや，どんな授業形態がよいかなどの授業デザインに関する示唆は与えない．この点においては，授業の場の示唆を与えてくれる教授学的状況理論の考えによって補完できると考える

4．考察

ここからは，実際に起源分解を作成し，それを元に，亜教授学的状況がどのように生じるか，もしくは生じさせるためにどのような工夫が必要なのかを考察していくことで相補的に援用する．

微分・積分は数学Ⅱと数学Ⅲで取り扱われるが，本研究では初出の段階である数学Ⅱの微分・積分を対象とする．また起源分解は生徒の持つ数学的概念を元にする関係上，生徒像を定める必要があった．そこで今回は高校で数学Ⅱを履修しており，ここまでの教科書の問題はおおむね解くことができる生徒を想定した．

(1) 微分の定義の起源分解

本研究では，図 4 の起源分解を作成した．以下では，起源分解を適用するにあたり，各心理的構造の段階における考察を述べる．

① 微分の定義：Object コンセプション

微分の定義では，瞬間の変化量を求めるにあたり，平均変化量の幅を限りなく小さくするために極限の考えが用いられていると考える．この「限りなく」の部分が重要であり，生徒が「もっと幅を小さくする必要がある」と感じることが，生徒の極限の考えを生じさせるきっかけであると考える．

ここで，微分の歴史を参照すると，物理との関係が深いことが分かる．また山本他（2020）の数研出版の教科書「改訂版最新数学Ⅱ」を参照すると，微分の定義の導入には具体的な二次関数のグラフ内の平均変化率を用いている．二次関数は現実事象の投てき運動に見られ，物理現象とのつながりが深い．これらを踏まえると，取り扱う物理現象を，二次関数の関係が現れるものにすると良いと考える．

以上の検討より，二次関数の関係が現れるような運動に対して，そのグラフに記した平均変化率の幅を限りなく小さくして瞬間の変化量を求めるような考えを生徒が持つことができれば， Object コンセプションの段階であると言えると考える．これより，カプセル化されるべきは「二次関数の平均変化率」と「瞬間の変化量」であり，生徒は Process コンセプションにてこれらを内化する必要がある．

② 微分の定義：Process コンセプション

二次関数の平均変化率と瞬間の変化量が内化しカプセル化していくと，生徒は瞬間の変化量を，幅を小さくした平均変化率の計算結果で近似できることに気付くと考える．この内化が生じ，Process コンセプションへ至るには，瞬間の変化量を求めること

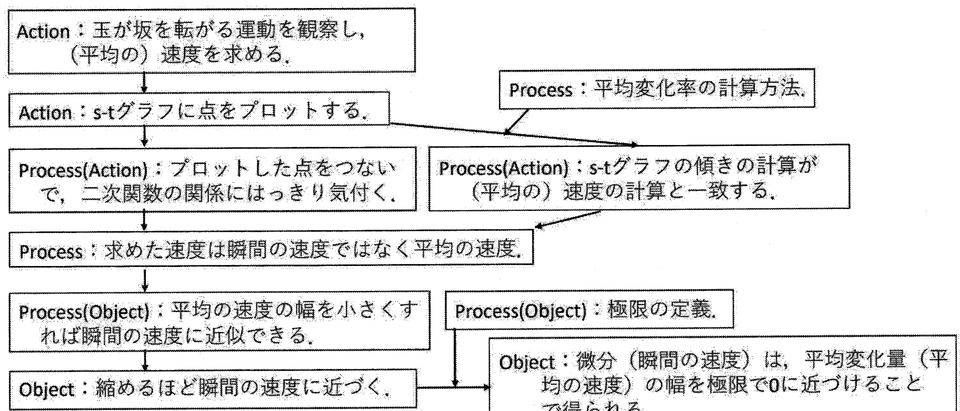

図 4　微分の定義の極限概念の起源分解

を目的にしながら，平均変化率と瞬間の変化量を比較し，その違いと共通点に気付く必要があると考える．

ただし数学的な瞬間の変化量の概念は生徒の中に存在せず，これが生じるには具体的な題材や事例が必要であり，それはActionコンセプションを決定づける要因になると考えられる．

これを踏まえ，Processコンセプションの検討は，次のActionコンセプションを踏まえて行う．

③ 微分の定義：Actionコンセプション

Processコンセプションは，Actionコンセプションを繰り返して二次関数の平均変化率が内化する状態と考えるが，その前のActionコンセプションでは，生徒は二次関数の平均変化率を内化できていない状態であり，生徒は平均変化率を具体的な数値で計算することとなる．

そのような活動を内包できる題材として，本研究では，二次関数が内包された物理運動として「傾斜30° の坂を転がるボールの運動」のある地点での瞬間の速度を求める活動を題材として構想した（図5）．

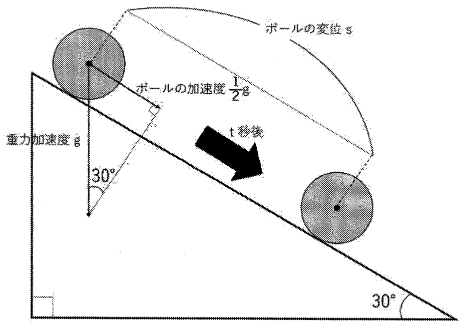

図5　30° の坂を転がるボールの運動の題材

この運動では，坂の下り方向を正とし，移動距離をs，重力加速度をgとして，変位sと時間tの関係を式で表すと，二次関数$s = 0.25gt^2$となる．そしてs-tグラフを考えたとき，ある区間の平均変化率は「平均の速度」に該当する．なお，今回はこの式の導出を，物理的な計算ではなく，具体的な点を測定することで，グラフを描画し求めることにする．

生徒はこの運動を観察し，距離と時間を元に速度を計算することから始める．この段階では，生徒は平均の速度の計算方法のみ学習しているため，ある区間の速度しか求めることができないが，その事実に気付いていないことが予想される．

生徒が瞬間の速度を平均の速度から考察していくためには，生徒が距離と時間の二次関数の関係にはっきり気付き，区間によって速度が変化することに気付くことと，自分たちの求めた速度の式と二次関数の平均変化率の式を比較し，s-tグラフにおけるある区間の間の点を結んだ直線の傾きが，平均の速度を表していることに気付くことが必要と考える．これによって，平均の速度と平均変化率が結びつき，平均変化率をグラフ内で操作し考察するProcessコンセプションに移行すると考える．

(2) 亜教授学的状況と授業デザインの検討

ここでは，起源分解に基づいて，亜教授学的状況の段階がどこで生じ，どのように進んでいくのかを考察する．

①　行為の状況

行為の状況では，生徒は場との相互作用により結果を予想し，アイデアを持つ．これらは教師が指示するのではなく，生徒が主体的に行う行為から生じることを想定する．また，この想定は後で形成させたい知識に対する予備段階のものである必要があり，したがって瞬間の速度の計算方法の予想であることが望ましい．これを踏まえ，行為の状況は「ある地点における瞬間の速度はどうすれば求められるのだろうか？」という問いをテーマに，各生徒が行為し，瞬間の速度の求め方を予想する活動が適しているのではないかと考える．

この予想が主体的に生じるためには，速度の計算に生徒が習熟していることも必要であると考える．これを生じさせるために，行為の状況の前段階の活動として，坂を転がるボールの運動のストロボ写真を，例えば「最初の位置から1秒後のボールの位置のみ描画したもの（以下，資料1と呼ぶ）」と「最初の位置から0.2秒刻みの区間でボールを描画したもの（以下，資料2と呼ぶ）」の2つの資料を作成し，資料1→資料2の順に平均の速度の計算を行い，平均の速度がs-tグラフの平均変化率と対応していることを確認する活動を取り入れることが考えられる．

この活動の導入理由は2つある．1つは，単に生

徒が計算練習をするだけでなく，区間が小さくなっていくことで，生徒が「前の問題より小さい区間の速度を計算していること」を意識することで，区間が小さくなれば，ボールの動きにより忠実な速度が導出できるという認識を促すためである．この認識を持つことで，瞬間の速度の計算の際，区間を小さくする発想につながるのではないかと考える．なお，実際の授業作成の際は，生徒全員が自然にこの認識を持つとは考えにくいので，発問によって思考を促す必要はあるのではないかと考える．

もう 1 つは，生徒が瞬間の速度を捉える発想は，グラフ内で行う必要があると考える．資料でストロボ写真を用いたが，区間を区切るための時間設定には限界があり，写真では瞬間の速度のアイデアは出ても，限界まで区間を狭めるという発想は想起しづらいと考える．そこで前もって平均の速度を s-t グラフの平均変化率（傾き）と結びつけておくことで，「瞬間の速度も傾きで表されているのではないか」という発想を持つことが期待できるのではないかと考える．ただし，この活動を教師の説明で終わらせると生徒の理解は進まないと考えるため，「平均の速度がグラフのどこに現れているか」を生徒が考察するよう行う必要があると考える．

この行為の状況では，すでに瞬間の速度に対する探究を行っているため，瞬間の速度に起源分解と対応づけると，「Process：求めた速度は瞬間の速度ではなく平均の速度」の段階までが該当すると考える．

② 定式化の状況

定式化の状況へ進むには，行為の状況で想起された問いを元に，他者と議論し自分のアイデアを言語化していくことが必要になる．これを定式化の状況として，「瞬間の速度の計算方法をグループ内で共有・議論し洗練したのち，クラス全体で共有・議論する」活動がなされると考えた．

この議論において，生徒に言語化を期待するアイデアとして，次の 2 つを考える．1 つは，瞬間の速度は区間をもっと小さくすればよいのではないかというアイデア，もう一つは，瞬間の速度も s-t グラフの傾きで表されるのではないかというアイデアである．この 2 つは，起源分解における「Object：縮めるほど瞬間の速度に近づく」の段階に移行する．

本授業は，上述の Object 段階に移行することを目的にしている．すなわちこの起源分解を元にした授業は，教授学的状況理論の提案する定式化の状況までは相当すると考えられる．

以上の検討を元に，授業の本時案を作成した（図 6）．なお，この本時案はあくまで構想であるため，グループ分けの人数やその形式はクラスの環境によって変化しうると考えられる．また，今回の生徒像と実際の生徒像が異なる場合も考えられる．どちらの場合も，今回の検討事項を軸にしつつクラスの状況に合わせて再検討したい．

起源分解が定式化の状況までで止まっていることを踏まえると，この起源分解では妥当化の状況は生じないことが予想できる．実際，妥当化の状況では，言語化したアイデアの正しさを証明する活動が生じる必要があり，今回の題材で言えば「微分の定義を活用して，具体的な関数を考察する活動」がその 1 つである考えられるが，今回の計画ではそのような段階までは考慮できてはいない．これについての検討は，今後の課題としたい．

5．おわりに

本稿では，深い学びの知識観を協定的構成主義の観点から捉え，微分の定義の極限概念の理解が生じるような授業を目的に授業の構想を行った．授業構想に当たっては，授業題材と概念発達の視点を APOS 理論の起源分解から，実際の授業での生徒の活動の詳細を教授学的状況理論から検討した．その結果，2 つの理論を相補的に用いることで，微分の定義の極限概念の理解が生じていく過程を構想した．本稿では授業の構想段階、しかも微分の導入段階の授業にしか適用できていないが，この 2 つの理論を組み合わせることで，構想主義の視座から，生徒の学習過程をより精緻に設計できることは示すことができたと考える．

実際の授業づくりにおいては生徒が瞬間の変化量について考え議論する活動が必要であり，この活動を行うために平均変化量などの事前知識が必要であることや，微分の考えについて生徒達がどのように議論し，考えを深めていくかを実証的に検討することが必要であると考えている．今後はこの検討を元に実践・分析を行っていく．

引用・参考文献

Arnon, I et al. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht：Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1994). A theory and practice of learning college mathematics: A. Schoenfeld (ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving* (pp.221-243). Hillsdale; NJ: LEA.

濱中裕明，吉川昌慶（2018）．「複素数平面」の学習における「平面上の変換」の概念化についての考察．数学教育学研究，24(1)，37-45.

松岡沙知，安西一夫（2004）．数学的な見方・考え方に関する考察．香川大学教育実践総合研究，9，37-46.

文部科学省（2017）．新しい学習指導要領の考え方―中央教育審議会における議論から改定そして実施へ―．https://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/__icsFiles/afieldfile/2017/09/28/1396716_1.pdf（2023.3.19 最終確認）

文部科学省（2019）．高等学校学習指導要領解説数学編・理数編．学校図書株式会社.

中原忠男（1994）．数学教育における構成主義の展開―急進的構成主義から社会的構成主義へ―．日本数学教育学会誌，76(11)，302-311.

中村圭貴（2014）．授業実践における教授学的状況理論の可能性と限界―中学校数学における三角形の決定条件を題材に―. 上越数学教育研究, 29, 33-42.

岡崎正和（2003）．全体論的視座からの正負の数の加減の単元構成に関する研究―教授学的状況論と代数的思考のサイクルの視点から―．数学教育学研究，9，1-13.

茂野賢治（2018）．入門的極限指導の研究動向と展望―C. Nagle（2013）の極限概念構築モデルに着目して―. 東京大学大学院教育学研究科紀要, 58, 41-51.

杉能道明（2017）．「数学的な見方・考え方」と「深い学び」とのつながりについての考察. パピルス，24，53-65.

鈴木康志（1992）．数学的な見方・考え方と指導法．日本数学教育学会誌，74(7)，10-17.

山本慎他 10 名（2020）．改訂版最新数学Ⅱ．数研出版株式会社.

（令和５年３月２４日　受理）