岡山大学算数・数学教育学会誌
『パピルス』第28号（2021年）46頁～55頁

正負の数の単元において式の関係の意識を高める学習場面を捉える

岡崎正和* 大西修司** 横林慎也** 高田誠** 猪木実奈子** 川本芳弘***

研究の要約

本稿は，算数から数学への移行という視点から，正負の数の単元を構想する上での基礎資料として，これまで実施した3つの授業を採り上げ，生徒が式の関係性の認識を高め，その意義を感じ取れる学習場面を同定することを目的とした。答えを求める方法を探究することを超えて，数字式を見直して正当化する場づくりを行い，その中で生徒が式の関係性に目を向けて，理由，整合性，数の組み合わせを探究するところに，代数に向けた式の認識の向上が見られることを明らかにした。また，そのような場面は，生徒が式の意義を感じとる感情とともに構成されうること，また構成可能であることを示した。

1. 中学校数学における資質・能力の育成の場としての正負の数の学習

教育を通して豊かな創造性を備え持続可能な社会の創り手となることが期待される生徒に，知識及び技能の習得，思考力，判断力，表現力等の育成，学びに向かう力，人間性等の涵養を基本とした資質・能力の形成を目指す，新しい学習指導要領下での学習指導が開始されている．特に，教育における長年の課題として，受け身の児童・生徒像ではなく，未来を主体的に開拓する確かな力を有する力が求められている。そのためエージェンシーやコンピテンシーを身に付けることが，世界規模で議論されている(OECD Education 2030； 白井,2020)。

* 岡山大学学術研究院教育学域
** 岡山大学教育学部附属中学校
*** 岡山市立操山中学校

本研究は，中学校数学における正負の数の単元に注目して，この中で生徒が中学数学の学びの為の基礎的な資質や能力をどのように育成できるかに関心を持っている。というのも正負の数の単元は算数から数学への移行過程としての重要性を持ち(岩崎,岡崎,1999;岡崎,黒田,2003)，我々は正負の数の単元を，単に計算技能の定着を成果とするのでなく，代数の導入過程として，その後の学習を支える資質や能力を育成する場として捉えていく。

負の数は量として存在せず，その意味で具体的なモノとしての対象があるわけではないが，気温や東西の移動などに喩える比喩を通して，現実的感覚をもって学習することができる。一方で，この単元では計算そのものを対象化し，式を学習の対象として意識化する過程があり，この点において

代数への移行過程が含まれている。従って，生徒が式の学びの意義や価値を感じ，その後の数学の学びに向かう力となるように，式についての意識を高める学習場面を構想し，実践することが重要だと考える。

岡山大学附属中学校数学科(2017,2018)では「学びの意義」「自ら学び続ける生徒像」を策定し，これらを実現する為の単元構成モデル（図1）を提案し，実践を行ってきた。

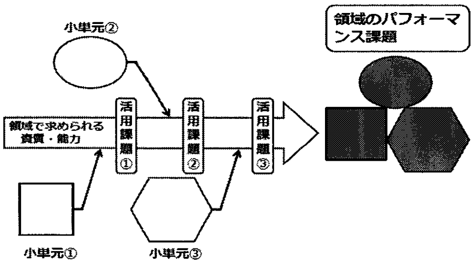


図1. 単元構成モデル

このモデルは，単元を3つ程度の小単元として構想し，単元全体，各小単元で必要な資質・能力を明確化し，小単元毎に学んだ数学を活用し解決する課題を配置するとともに単元末にその領域のパフォーマンス課題に取り組むことを通して資質・能力の育成を目指そうとしている。これら小単元及び単元末で生徒がどのような資質や能力を発揮するかを明確にすることは，評価の視点から重要となる。

本研究は正負の数の単元構成のあり方を明確化することを目指すが，本稿はそのための基礎資料として，3つの授業をとりあげて，生徒が単元の学習の中で式の意味と意義を感じ取れる場面を同定することを目的とする。1つは正負の数の減法の授業（岡崎,2003)であり，2つ目は正負の数の乗除の授業（岡崎,黒田,2003,2004)である。3つ目は，2021年に実践した単元末の授業であり，本稿ではこれらの授業をもとに単元構成を考えていく。

2. 理論的視点

(1) 関係の意識性としての代数学習

Caleb Gattegnoの思想は古典的ではあるが，にもかかわらず代数の本性についての重要な視点を示している(詳しくは，平林,1987; 岡田,1994,1995を参照)。「‘tap, pat, apt’，‘top, pot, opt”はその順序によって区別可能な3つの音の混成の3つ組である。どちらも最初の二つは逆の関係になっていて，3つ全てを順列と見ると，すべてが英単語にはならないが，6つできる。音やノイズや単語の基質に関する操作を自覚することが，言語を組織化する上で存在し，そのことは我々が代数へ到達したことの一部なのである。」,「我々がいったん代数の存在と役割を我々の生活の中に気づくようになると，我々は精神（数学）に関わるすべての我々の思考の産物を増幅させるような新しい方法を生み出すことができる」はGattegno(1983)からの引用であるが，代数はその本性において「関係への意識性」をもたらし，学校の教科「数学」を超えて日常生活に深く浸透したものと捉えられている。x+yと書けば，xやyの中身が何であろうと，足されるものと足すものがあり，その所産としての和が存在するということを顕示するが，2+3と書いてもこのことは明らかでない。さらに，式に対する「意識性」という人間の心の動きが伴うかどうかが，学習に大きく影響すると考えられている。

平林(1978)は「《関係そのものの意識》，《心の力動性そのものの意識》という言葉は，このようにガッテニョーの方法の根幹ともいうべきものであるが，その意味の正しい理解は，個々の授業場面について具体的に与えられるより他はなかろう」と述べたが，こうした関係の意識，心の力動性がどんな場面で生徒から発露するかを実践的

に明らかにする必要がある。

(2) 式の学習を捉える他の幾つかの視点

関係としての式の意味やその意義を捉える上で，幾つかの理論的視点について言及したい。

まずは，文字式の操作的な見方と構造的な見方についてである。文字式における生徒の種々の誤りの多くは算数での式の見方と中学での見方との違いによって引き起こされている。3(x+3)-2(3x-1)のような式の展開を行う際，教師は説明の中で「x+3に3をかけて、3x-1に2をかけます」と言う時，x+3や3x-1は一つのまとまり(数)を指しているし，答えの-3x+11も一つの数を表している。また，計算の途中ではそれぞれの項をバラに見て計算をしていく。しかし生徒は式をまとまりで見たり（構造的），バラで見たり（操作的）すること，さらにそれらを必要に応じて切り換えて考えることに困難を伴い，ここに文字式理解の難しさの一因がある(Sfard, 1991, 1994)。正負の数に関する単元までは計算指導が中心であり，従って式の見方は操作的であるが，文字式では式の見方が劇的に変化し，式を構造的に見ることを余儀なくされる。

2つ目の視点は代数的思考のサイクルである。代数的思考のサイクルとは「文字式利用の図式」（三輪, 1996, 図2)を，広く式の学習一般に適用する為に命名したものである。このサイクルには，「新しい発見・洞察」という式を学習する意義についての捉えが含まれている。

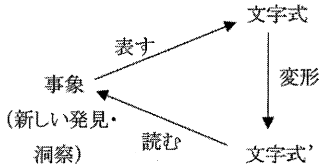


図2：文字式利用の図式.

文字式の最大の威力は具体的な事象から一度離れて，変形というプロセスが許されることにあり，時にそれは思考の肩代わりをしてくれるが，三輪は文字式の計算だけでなく，式の計算が思考をすすめる手段としての文字式の「使用」に着目する必要性を指摘し，サイクルが一回りすることによって「文字式の使用をいっそう高いものにすることにつながる」(p. 13)と述べている。

式を変形した後，事象をあらためて吟味したときに，新しい発見や洞察が生まれるかどうか，という視点を持つことが重要であると考える。

3つ目の視点は記号論的連鎖の図式である。Presmeg(2001, 2006)はパースによる記号の三項モデル（対象(O)，表現(R)，解釈項(I)）に基づいて，入れ子式記号論的連鎖のモデルを提案した。

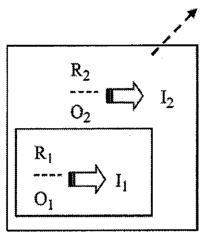


図3. 記号論的連鎖のモデル

このモデルでは，ある対象(O)を表現する記号(R)とそれらの間の解釈(I)を一セットに，人の認識を捉える。さらに記号表現の生産的な役割が強調され，記号に対するふり返りが次なる認識へと進ませることを示唆する。式の学習において，Rは式そのものであるが，それが意味をなすためには，それが表す対象(O)が想像できなければならないし，式とその対象がどのように結びつくのかの適切な解釈(I)を伴っている必要がある。生徒が3つの内の式表現Rのみに注力しているのなら，式を問題解決に活用したり，日常の事象の解決に適用したりす

ることは難しいであろう，ということは，この三つ組モデルから示唆される。

記号論的連鎖を繰り返す中で，生徒が式の役割を認めつつ，式表現の構造的な見方がどのように発達するか，特に式の操作的な見方が構造的な見方へと発達する数学的活動の構成とはどのようなものかを吟味することが課題となる。

3. 授業における生徒の認識について

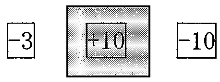
本稿で提示する3つの授業は，正負の数の加減，正負の数の乗除，正負の数の加減乗除に関する授業である。最初の2つの授業については，既出の論文（岡崎, 2003; 岡崎, 黒田, 2004）の中から再掲する形で，生徒が式の意味や意義を感じとった場面を採り上げ，説明する。3つ目の授業は2001年に実施したものであり，授業中での生徒の反応を述べるとともに，式の意義の認識に迫る為の授業過程について考察する。

(1) 正負の数の減法の仕組みの探究

最初に分析する授業は，正負の数の減法が加法になる理由を探究した授業である(岡崎, 2003)。教材として，トランプゲームを利用した（黒のカードを黒字，赤のカードを赤字として，とったりとられたりしながら，ある時点でストップをかけて点数計算をし，得点を競うもの）。

7時間目，(-3)－(+10)と(-3)－(-10)を事例に，減法の考え方を班で考え発表させた。最初の班は，答えの見当について発表し，続く班は，数直線を用いて答えがそれぞれ-13と7であることを述べ，答えが共有された。その後，減法を加法にすることを知っていた別の班の生徒が符号を変える説明を行ったが，他の生徒は意味が分からず，説明は認めなかった。

最後の班の発表で，生徒がトランプを使った説明を行った。黒板の前に出てきて，-3，+10, -10の3つのカードを提示して，「まずこれはこの式があって（-3のカードを指す）。+10と-10で0なんですけど，これ((-3)－(+10)の式)にするには0になっている10と10を，１つ+10を取らないといけないので，それをなくしちゃて（+10を隠す），それで後はこれとこれをたせば-13になる。（加法の式は）あってる。



(-3)－(+10) ＝ (-3)＋(-10)

図4. 減法の仕組みの正当化

この説明に何人かの生徒は感嘆の声を上げた。この考えは生徒の声として広がり，教室で共有されていった。

この生徒の最終的な式の認識は，減法の答え(-13)が合意されている状態で，ゲームの場面を利用して，減法を加法に直す式変形によって正当化するものであった。この正当化では，減法の答えを求める仕組みが一つの感動を伴って生徒の中に位置付いたと考えられる。ここでの代数的思考のサイクルは，次のように図示できる。

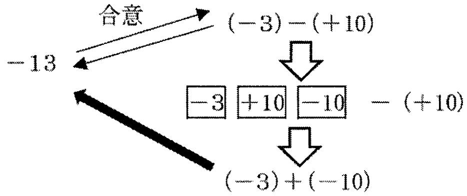


図5. 減法の正当化におけるサイクル

+10と-10の関係を元に被減数の分解が行われ，式が構造的に見られていることが特徴である。この時，式は「答えを求める手段」でなく，「原理を正当化する手段」となっており，式の中の被減数が減数とのキ

ャンセルを想定して分解されたことは式が考察の対象であったことを示している。

(2) 正負の数の乗除の式作りの探究

二つ目の授業は，2003年に実施した正負の数の乗除の授業である(岡崎,黒田,2003)。式の操作的な見方から構造的な見方への転換を促す上で「総合式をつくる」活動を位置づけ，それまで計算の命令であった式をひとまとまりの対象と見て，括弧を施しながら式づくりをしていく活動を設定した。

課題設定においては，平林(1996)による総合式をつくる活動を参考にした。式は数学的には，

①対象記号(1, 2. . . a, x...)，

②演算記号(+,−,×,÷...)，

③括弧

の3つの構成要素を次の規則に従って並べた有限の記号列である(平林,1996)。

ⅰ 数字，文字はそれだけで式である。

ⅱ A，B が式であれば(A)+(B)，(A)−(B)，(A)×(B)，(A)÷(B)はいずれも式である。

ⅲ ⅰⅱで構成されたものだけが式である。

この規則によって，((((1)+(2))×(3))−(5))のような式が次々に構成されるが，乗除先行規則などの補助規則を設ければ，括弧を省くことができ，(1+2)×3−5 といった通常の表記となる。

平林の提案した活動は次である。

①「6になる式をつくりましょう。」

5+1，2×3，1+2+3，8−(4÷2)，1+2+9÷3 などいろいろつくらせる。

②「下のような形の式で、□に数字を入れて，6になるものを作りましょう。」

□+□−□，□×□+□，□×□−□÷□

③「上で、□の中へ、式をいれてもよいことにしたら，どんな式ができますか。」

例えば，□+□−□に対しては，

1×2+(6÷3+1)−(7−6)

文字式への一般化の対象が通常は分解式でなく総合式であり，方程式が総合式として立式されねばならないように，総合式の構成は代数の認識を促すものと考える。これを元に，次のようなゲームを構想し，実践した。ゲームのルールは次である。

まず 2 チームに分かれ，手札の式を数枚ずつ持つ。例えば A チームが $\boxed{(+3)\times(\ \ )}$，$\boxed{(\ \ )\div(\ \ )}$，B チームが $\boxed{(-1)\times(-2)}$，$\boxed{(-1)^3}$ の２枚ずつを手札として持ったとする。最初に教師が式を提示して，その式の中の数字に手札の式を正確に置き換え，長い式を作っていく。空白の括弧は適当に考えればよい。考える時間を区切って相手チームに解答権が移るようにし，先に手札を式に組み込み終えたチームが勝ちである。

ゲームのやり方を具体的に示した後、代表２人ずつ(A：吉，朝；B：関，星)が黒板で対戦した。手札は次のようであった。教師は「式がうまくあわない」ともめていた班のゲーム展開を発表させた。

A.	B.
1. $\boxed{(-12)\div(+2)}$	1. $\boxed{(-1/3)\times(+12)}$
2. $\boxed{(\ \ )\div(+2)}$	2. $\boxed{(-1)\times(\ \ )}$
3. $\boxed{(\ \ )\times(\ \ )}$	3. $\boxed{(\ \ )\div(\ \ )}$
4. $\boxed{(-2)^2}$	4. $\boxed{(-1)^3}$

$-8=(+32)\div(-4)$

$=(+32)\div(-4)\times(+1)$ A-3

$=(+32)\div(-4)\times(-1)\times(-1)$ B-2

$=(+32)\div(-8)\div(+2)\times(-1)\times(-1)$ A-2

$=(+32)\div(-8)\div(+2)\times(-1)^3\times(-1)$ B-4

図 6. ゲームの状況とある班の式作りの様相

F：おかしい。(最後の式)ここで−4 になって，2 でわると 2 になって，後は 1 だから。

Y：先生，書いていいですか。(...)ここからこれがうまくいってなかった。(下線を

ひく)

$[=(+32)\div\underline{(-4)}\times(-1)\times(-1)$

$=(+32)\div\underline{(-8)\div(+2)}\times(-1)\times(-1)]$

この班は，−4 にうまく(−8)÷(+2)を置き換えたはずなのに，答えが−8 にならないために，班の中で議論していた。そしてどの置き換えが原因かを突きとめていたが，どう対処してよいか分からなかった。

ある生徒は「(−8)÷(+2)を(−2)÷(+2)に変えればよい」と，式全体の値が−8 になるように調整したが，それでは−4 を置き換えたことにはならず，すぐに却下された。少しして生徒 J が「括弧をつける」と発言し，「そこ」と指さした。

J：$[(+32)\div\{\underline{(-8)\div(+2)}\}\times(-1)\times(-1)]$

S：うぉー

S：そうですね。

S：括弧だよ。

T：順番が変わってきたんですかね。括弧の中，ここを一番にやります。(生徒と共に検算を行う)。次の式はどうなりますか。

S：うーんと，そこに括弧。

T：括弧ってすごいな。パワフルだな。

このやりとりは生徒達に強烈なインパクトを与え，括弧を使えば計算の順番が変わるということを真剣に記録していた。実際に次の班活動では「でかい括弧−4 プラス，括弧−2・・・括弧使わないとできないの」といった声がどの班からも聞こえてきた。

このゲームの意義について述べる。この総合式作りに取り組むまでは，式は場面をうまく記述する為のものであり，算術的な計算と結びついた操作的な特徴を持つものである。しかし，ゲームを通して式を置き換える時，式は計算される何かでなく，数と同値な何かであり，ひとまとまりのものとして認識される。その認識を促進したのが括弧であった。生徒達は，ゲームを通して式をまとまりとして見るだけでなく，括弧を通して式の順序性の認識を新たにした。

ただしこの認識は式づくりの文脈で認識されるのであって，最初から付いている括弧をはずすだけの計算練習で身に付くとは思われない。式を仲間と共につくり，変形し，それの正しさを皆で判定しながら，括弧や演算の意味や役割を把握するなかで，代数的思考の一連のサイクルが回転し，式の構造的認識が図られる。

(3) 正負の数の加減乗除の総合的探究

3 つ目の実践は，2021 年に附属中学で実施された正負の数の単元末の授業である。5 枚のカードをひき，黒をプラスの数，赤をマイナスの数とするが，5 枚の内の一つのカードのみ，黒の場合は演算「＋」，赤の場合は演算「−」として用いる。それらを，

□×□ (演算) □×□

のように並べて，一番大きな数になるようにして勝ち負けを競う(藤井他,2012)。例えば，+5，-4，-2，-6，+2 をひいたときに，(+5)×(-4)−(-6)×(+2)と並べれば，計算結果は-8 となる。数の並べ方によって，計算結果は異なり，思考の中で答えが最も大きくなる組み合わせを考える必要がある。グループ学習を取り入れ，多様な意見を知るとともに，答えがより大きくなる場合があるか，互いにチェックする活動を仕組む。

先ず教師は，ルールの説明をして，

$\boxed{-6}$ $\boxed{-4}$ $\boxed{+2}$ $\boxed{+5}$ $\boxed{-2}$

に関して，「並び替えてもいいよ」と投げかけると，生徒たちは「ああ，そういうことか」と言いながら考えルールを理解し，

その後に班でゲームの活動に入った。

班活動での後の発表では，教師は次の 2 つのパターンを例に説明させた。

ア $\boxed{-3}$ $\boxed{-7}$ $\boxed{-4}$ $\boxed{-2}$ $\boxed{+9}$

イ $\boxed{-6}$ $\boxed{+4}$ $\boxed{+9}$ $\boxed{+5}$ $\boxed{+10}$

ア，イそれぞれについて，生徒は次のように並び替えて答えを出した。

ア $\boxed{-4}$ $\boxed{-3}$ $\boxed{-2}$ $\boxed{+9}$ $\boxed{-7}$

$$(+12)-(-63)=+75$$

イ $\boxed{+10}$ $\boxed{+9}$ $\boxed{-6}$ $\boxed{+5}$ $\boxed{+4}$

$$(+90)-(+20)=+70$$

教師が「この並びが一番大きいの」と問いかけると，生徒たちは考え始めた。班で確認する時間を少し取り，その後にもう一度，教師は「どうしてこの並びが一番大きくなるのか」と問うた。

アについての生徒の反応は次であった。

S1: マイナス×プラスでマイナスになっても，マイナス，マイナス… マイナスかっこマイナス 63 みたいにプラスになるから

S2: この数字の積の絶対値が一番大きくなる場合を中心に考えて，この場合(+9)×(-7)の-63 が一番大きいので，-63 が一番生きるのは，－(-63)で確定して，残りのマイナスで一番大きい数を作れるものを前側にやって，(-4)×(-3)だから，それで。

イについては，次のように述べた。

S3: 負の数が 1 個あるとき，棒の方にマイナスを持ってきて…ひく数の方が最小の数を持ってくれば，最大の値になるから，それで最大になる。

S4: N さんと同じだけど，マイナスが 1 つの時に，何かひく方にマイナスを持ってくるより符号にマイナスを持ってくる方が一番大きくなるから，一番小さい数をひくことでできるので，差が一番小さくなることができる。

S5: 一番大きい数から一番小さい数をひいたのだから。一番初めのプラスがプラスで一番大きい数で，3 番目，4 番目，5 番目のどこにマイナスが来てもマイナスになるから，最後の 2 つを一番小さくして…」

この授業では，生徒はあらゆる場合を考えて，正確に一番大きい数をつくり出していた。部分的な数の大小と演算の両方を考えることは，式とその結果を互いに比較するプロセスを含み，式の構造的な認識を高めることになると考える。また，負の数をひくということによって，たし算にすることができることは，本稿で示した一つ目の事例にあるが，答えを大きくする為に，それを活用することで，負の数をひくことと答えを大きくすることとの関係性の認識を高めることにつながると考える。

4. 考察

正負の数の単元では，加法の仕組みを理解する際にも，例えば(+5)＋(-3)を，{(+2)＋(+3)}＋(-3)，(+2)＋{(+3)＋(-3) }のように考えて，答えの+2 を導く思考のように，式と式の間の結びつきや関係性を意識できる場面はあるが，加法の段階はある種の日常感覚を伴った直観を働かせて答えを導くことが多くの生徒に可能であろう。しかし，減法になれば答えを導くことに困難が生じ始め，さらにはそれが加法に変形できることの理解は，そうした感覚だけでは難しいと思われる。

提示した一つ目の授業での最終的な生徒の認識は，「プラスを取られれば減り，マイナスを取られると増える」というゲーム

での素朴なアイデアから減法の答えの確信を得た状態から生じていた。被減数の-3 のみならず，カードを手元に持っていることのイメージから，3 枚のカード 13, -10, +10 のカードを持っているとし，反数関係にある一つのカード(+10)が抜かれた場合にもう一方のカード(-10)をたすことになる，というアイデアが創出された。この場面は，答えを求める方法を探究するのではなく，減法の仕組みの正当化の状況であり，式を対象にし，式変形を通して場を捉え直すことの意味と意義の理解が図られている。ここでの式の認識は，ゲームでの得点変化を記述し答えを導くものから，加減の式を対象化し，その関係性や仕組みを表す式への発展に繋がるものと見ることができる。

2 つ目の授業でも，ゲーム以前では，多くの生徒にとっての式は，場面を記述するような，算術的な計算と結びついたプロセス的，操作的な特徴を持つものであったと考えられる。しかしゲームの中で式を置き換える時には，式は計算される何かでなく，数と同値な何かであり，ひとまとまりのものとして見ることが要請される。式の部分と全体とを調整し，答えの同値性を確保する活動は，式の構造的認識を促進するものと考えられる。その認識を促進したのが括弧であった。つまり，括弧を施せば，式の順序性とそれに伴う演算の仕組みが変容する可能性があることを，ゲームの中で学んだ。ここでは括弧は，式を語る為のメタ言語としての役割を果たしていると考えることができる (平林,1987)。式には一定のリズムや動きがあり，それを括弧が制御している(Radford,2003)。括弧は式の数学的本性において中心的な役割を持つものであり，括弧を通した式の意識性が式を構造的に見ることと深く関係していることが示唆される。

式の記号論的連鎖の視点からは，最初の式の見方は具体と結びつき，具体を数字式化したものであるが，中学校の文字式で求められる式の認識は，数字式を思考の対象として，数字式を文字式化したものであるので，台数の導入ではこの記号論的連鎖が首尾よく達成されることが必要となる。しかし，数字式は簡単に対象化されるものではないことに学習と指導の難しさがある。この授業ではこれらを媒介する学習活動として，数を数字式化し，さらに数字式を数字式で考察することが必然的に生じるような状況を構成している。これによって数字式の対象化が図られ，文字式へと接続されていくことが期待される。

3 つ目の授業の活動では，演算の意識性がより顕著になる。まずは，数の色々な組み合わせを考えて数の大小を判定する際には，潜在的に幾つかの式が比較対照されている。また，負の数をひくことは，1 つ目の授業で考察した時には仕組みを理解することに主眼があるが，この場面では，式の値をできるだけ大きくするために「使用する」ということに特徴がある。

ただし，今回分析した授業では，附属中の生徒たちは誤答を示さず，正解例とともにその理由をも説明したので，生徒の議論を通して式の認識が高まるプロセスを吟味することはできなかった。従ってここからは，生徒が辿ったと思われる思考プロセスを想定し，今後の授業研究での生徒の考えの採り上げ方について考えていく。

この授業では，次のアの場面では，大きく 3 つの解答を生徒が示すと考えられる。

ア $\boxed{-3}$ $\boxed{-7}$ $\boxed{-4}$ $\boxed{-2}$ $\boxed{+9}$

① $(-7)\times(-4)+(-3)\times(-2)$
② $(-7)\times(-4)-(-3)\times(+9)$
③ $(-3)\times(-4)-(-7)\times(+9)$

もし①から③の考えが出たなら，①から③の順にとりあげるのがよいと考える。①は，正の数と正の数の和を考える場合である。ミスコンセプションや暗黙モデルの研究で，乗除を中心に「かけ算をすれば必ず積は被乗数より大きくなる，わり算をすれば商は被除数より必ず小さくなる」というイメージを多くの生徒が共有しているということがしばしば述べられてきたが(例えばBell,1989)，たし算，ひき算もそれに類するミスコンセプションを抱きがちであろう。その点では①の解答をする生徒はかなりいるのではないかと思う。③の絶対値を一番大きくするという考えは，分析した授業でも見られたが，①と③の間には，①における式の前半を最大にしつつ，残りを－（負数）にして，和を大きくする中間的な段階の②を考える生徒も存在するのではないかと思う。もしこの順番にとりあげることができれば，「ひく負数」が「たす正数」になることの意味をより明確に意識することができると考えられる。

この活動の後に，更に式の関係性の意識を高めることを考えるなら，与えられた数値に依存するかどうかを考えることが挙げられる。$\boxed{+9}$のカードがもし$\boxed{+1}$であるなら，①の場合が一番大きくなるのであるし，$\boxed{+3}$であれば②式の答えが一番大きいのである。選ぶ数の組み合わせから，式を判断し，そして答えの比較を行うことまでできれば，数の計算をしているというより，既に方程式を解いているような思考になると考えられる。

5．おわりに

本稿での提案は，生徒が代数の学習に向けて，式の認識を操作的なものから構造的なものへと高めていく単元構成を明らかにする為の基礎資料の提供にあった。もう一つは，生徒の活動の中から式の関係性を，心の力動性を伴って認識する授業場面を同定することであった。3 つの状況に共通して，生徒が意義を伴って知識を獲得することができた理由には，幾つか要因が考えられる。まず答えを求める場ではなく，答えはある意味で共有された形で，答えと式との関係性を探究したことである。次に，式についての不確かさが問いとなって，その仕組みの探究，さらには正当化の活動へと繋がったことが考えられる。これらは文脈をもった一連のゲーム活動の中で生じたのであって，式を計算するだけの活動ではほとんど成し得ないことであったと思われる。代数的思考の一連のサイクルが回転するように活動がなされることが重要だと考える。

文字式は基本的には数字式が潜在的に持つ一般性や数の間の関係性を捉え，記述するものであって，具体的事象と直接的に繋がるものではない。従って文字式へのステップアップには，式の見方が連鎖して高まっていくように，数や数字式の構造を見直すような活動が不可欠だろうと考える。

今後の課題は，本稿で検討した授業の様相をもとに，正負の数の単元を再度構想し直し，実践を通して，単元構成の内実を明らかにすることである。

引用参考文献

Bell,A.,Greer,B.,Grimison,L., & Mangan,C. (1989). Children's performance on multiplicative word problems: Elements of a descriptive theory. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*, 434-449.

Gattegno, C. (1983). On algebra. *Mathematics Teaching*, *105*, 34-35.

藤井斉亮 (2012). 新しい数学1. 東京書籍.

平林一栄. (1987). 数学教育の活動主義的展

開. 東洋館出版社.
平林一栄. (1996). 式について. 新しい算数研究, 11月号, 6-9.
岩崎秀樹, 岡崎正和 (1999). 算数から数学への移行について(1)－代数和の位置づけとその指導－. 全国数学教育学会, 数学教育学研究, 5, 85-90.
三輪辰郎.(1996). 文字式の指導序説. 筑波数学教育研究, 15, 1-14.
文部科学省初等中等教育局教育課程課教育課程企画室. OECD Education 2030 プロジェクトについて. https://www.oecd.org/education/2030-project/about/documents/OECD-Education-2030-Position-Paper_Japanese.pdf（原文は, OECD, The future of education and skills: Education 2030, The future we want.）
岡田禕雄 (1994). Gattegnoの教育思想(I) 人間観と数学教育の目標. 日本数学教育学会, 数学教育学論究, 61・62, 3-25.
岡田禕雄 (1995). 算数教育の在り方についての一考察―ガッテニョーの数の指導を例として―, 日本数学教育学会誌, 77(4), 52-59.
岡崎正和 (2003) 全体論的視座からの正負の数の加減の単元構成に関する研究－教授学的状況論と代数的思考のサイクルの視点から－. 全国数学教育学会, 数学教育学研究, 9, 1-13.
岡崎正和, 黒田匠 (2003). 算数の式から代数の式への転換を促す正負の数の乗除の単元の再構成に関する研究. 日本数学教育学会, 第36回数学教育論文発表会論文集, 157-162.
岡崎正和, 黒田匠 (2004). 代数の導入過程としての正負の数の乗除の単元開発における授業展開の様相. 日本数学教育学会, 第37回数学教育論文発表会論文集, 241-246.
岡山大学教育学部附属中学校数学科. (2017). 数学の事象について統合的・発展的に考え, 問題を解決することができる生徒の育成―数学的活動の過程と振り返りを意識した単元構成―. 岡山大学教育学部附属中学校, 研究紀要, 第52号, 45-50.
岡山大学教育学部附属中学校数学科. (2018). 数学の事象について統合的・発展的に考え, 問題を解決する生徒の育成～数学的活動の過程と振り返りを意識した単元構成～. 岡山大学教育学部附属中学校, 研究紀要, 第53号, 53-60.
Presmeg, N. (2001). Progressive mathematizing using semiotic chaining. Discussion Group 3: Semiotics in Mathematics Education in the 25th PME Conference.
Presmeg, N. (2006). Semiotics and the “connections” standard: Significance of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 163–182.
Radford, L. (2003). Gestures, speech, and sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*, (1), 37-70.
Sfard, A.(1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.
Sfard, A. (1994). The gain and the pitfall of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26,* 191-228.
白井俊. (2020). OECD Education2030プロジェクトが描く教育の未来―エージェンシー, 資質・能力とカリキュラム―. ミネルヴァ書房.

（令和４年２月３日　受理）