博士論文

ホモロジー球面上の有限群の滑らかなodd-fixed-point actionの非許容性に関する研究

令和4年3月

田村 俊輔

岡山大学大学院
自然科学研究科

目 次

1　本論

1.1　導入

G を有限群，M を滑らかな多様体とし，$\mathrm{Homeo}(M)$ で M の自己同相群，$\mathrm{Diff}(M)$ で M の自己微分同相群を表す．群の準同型

$$G \to \mathrm{Homeo}(M)$$

のことを**M 上の G のトポロジカルな作用**といい，群の準同型

$$G \to \mathrm{Diff}(M)$$

のことを**M 上の G の滑らかな作用**という．この論文では，特に断りがない限り，多様体は滑らかであるとし，多様体上の有限群の作用は非自明で滑らかなものを扱うことにする．

H を G の部分群，M を G-作用をもつ多様体とする．M 上の H-作用によって動かない M の点全体の成す集合は M^H で表され，M における**H-不動点集合**と呼ばれる．M^H は M の部分多様体としての構造をもち，$N_G(H)/H$-作用をもつ．ここで，$N_G(H)$ は G における H の正規化部分群を表す．M 上の G-作用による G-不動点集合がちょうど 1 点から成るとき，T. Petrie はそのような作用を **one-fixed-point action** と呼んだ．これに倣い，M 上の G-作用による G-不動点集合が奇数個の点から成るとき，そのような作用を **odd-fixed-point action** と呼ぶことにする．M 上の G-作用が **fixed-point-free action** であるとは，M が G-不動点集合をもたないときをいう．R. Oliver [30] は，ある次元のディスク上の fixed-point-free action をもつ有限群の決定を行った．素数 p と q に対して，P が p 冪位数，H/P が巡回群，G/H が q 冪位数である正規列 $P \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ をもつ有限群 G の族を R. Oliver [30] に倣い，$\mathcal{G}_p^q$ で表すことにする．さらに，族 $\mathcal{G}_p^q$ の和をそれぞれ

$$\mathcal{G}^q = \bigcup_p \mathcal{G}_p^q,\ \mathcal{G}_p = \bigcup_q \mathcal{G}_p^q,\ \mathcal{G} = \bigcup_{p,q} \mathcal{G}_p^q$$

と表記する．有限群 G が **Oliver 群**であるとは，G が $\mathcal{G}$ に属さないときをいう．R. Oliver は有限群 G が Oliver 群であるときに限り，ある次元のディスク上の G の fixed-point-free action が存在することを示したのである．ディスク上の有限群 G の fixed-point-free action に対し，そのディスクの境界部分を潰すことにより球面上の G のトポロジカルな one-fixed-point action を得ることができる．逆に，球面上の有限群 G の one-fixed-point action に対し，その唯一の不動点まわりの G-不変なディスク近傍を取り除くことにより，ディスク上の G の fixed-point-free action を得ることができる．従って，ディスク上の fixed-point-free-action と球面上の one-fixed-point action との間には，ある対応が存在する．ゆえに，有限群 G が Oliver 群ならば，ある次元の球面上のトポロジカルな one-fixed-point action が存在する．この結果は滑らかな作用の範囲でも正しく，E. Laitinen–M. Morimoto [20] は，有限群 G が Oliver 群であるときに限り，ある次元の球面上の G の滑らかな one-fixed-point action が存

在することを示している．球面上の Oliver 群ではない有限群 G の one-fixed-point action が存在しないことの証明は節 1.2 の系 1.2.6 にて紹介する．まとめると，以下の 3 つの条件が同値であることがわかる．

- G が Oliver 群である．
- ある次元の球面上の有限群 G の one-fixed-point action が存在する．
- ある次元のディスク上の有限群 G の fixed-point free action が存在する．

ディスク上の有限群の作用のさらなる結果として，素数冪位数ではない有限群 G に対して，ある次元のディスク上の G-不動点集合として実現できる多様体の分類が R. Oliver[31] によって行われている．

R を単位元をもつ可換環とする．n 次元の閉多様体 M が**R-ホモロジーn-球面**であるとは，M と n-球面 S^n の R-係数での (全ての次数の) ホモロジー群が一致するときをいう．n 次元の閉多様体 M が**ホモトピーn-球面**であるとは，M が n-球面 S^n と同じホモトピー型をもつときをいう．この論文では，R-ホモロジー球面及びホモトピー球面といえば，閉多様体であることを想定し，R が整数環 $\mathbb{Z}$ である場合，単にホモロジー球面と呼ぶことにする．

現在知られている球面上の有限群の one-fixed-point action についての結果を紹介する．初めて球面上の有限群の one-fixed-point action を発見したのは，E. Stein [35] であり，彼は 7-球面 S^7 上の特殊線形群 $SL(2,5)$ の one-fixed-point action を構成した．この結果に対して，A. Borowiecka [6] は如何なるホモロジー 8-球面も $SL(2,5)$ の効果的な one-fixed-point action を許容しないことを示した．T. Petrie [32] は巡回群ではない Sylow 部分群を 3 つ以上含むような奇数位数の有限可換群 G に対して，ある次元の球面上の G の one-fixed-point action が存在することを示した．非負整数 m と G-作用をもつ多様体 M に対して，M 上の G-作用が **m-pseudofree** であるとは，全ての非自明な G の部分群 H に対して，$\dim M^H \leq m$ が成立するときをいう．E. Laitinen–P. Traczyk [21] は 5 次元以上のホモトピー球面 Σ 上の有限群 G の 2-pseudofree な one-fixed-point action が存在するならば，G は 5 次交代群 A_5 と同型であり，Σ は 6-球面 S^6 と微分同相でなければならないことを示した．(この論文の付録において，彼らの結果の別証明を与えている．) この結果を受け，M. Morimoto [25] は実際に 6-球面 S^6 上の A_5 の 2-pseudofree な one-fixed-point action を構成した．さらには，6 次元以上の球面は A_5 の one-fixed-point action を許容することが知られている．この結果は，6 あるいは 9 次元以上の球面に関しては，M. Morimoto [27, 28] により，7 と 8 次元の球面に関しては，A. Bak–M. Morimoto [3, 4] によりそれぞれ示されている．逆に，5 次元以下の球面は如何なる有限群の one-fixed-point action も許容しないことが知られている．

- M. Fututa [15] はホモトピー 4-球面上の向きを保つ有限群について
- M. Morimoto [26] はホモトピー 4-球面上のコンパクト Lie 群について
- S. Demichelis [13] はホモロジー 4-球面上の有限群について

- N. P. Buchdahl–S. Kwasik–R. Schultz [10] は5次元以下の球面上の有限群について

それぞれ one-fixed-point action が存在しないことを示した．これらの結果に対して，この論文の付録では，5次元以下の球面は有限群の odd-fixed-point action をもたないことを証明している．

E. Laitinen–M. Morimoto [20, Theorem B] において，任意の自然数 m と Oliver 群 G に対して，ある次元の球面上の G-作用であり，G-不動点集合がちょうど m 個の点から成る集合であるようなものが存在することが示されている．この結果により，ある次元の球面は Oliver 群の odd-fixed-point action を許容することがわかる．しかしながら，与えられたひとつの Oliver 群 G に対して，G の odd-fixed-point action を許容する球面の次元は制限される．5次対称群 S_5 と特殊線形群 $SL(2,5)$ に対して，これらの有限群の odd-fixed-point action を許容しない球面の次元を調べた結果として，M. Morimoto と筆者 [29] の次の結果がある．ホモロジー球面上の S_5 (resp. $SL(2,5)$) の効果的な odd-fixed-point action が存在するならば，そのホモロジー球面の次元は $\{0,1,2,3,4,5,7,8,9,13\}$ (resp. $\{0,1,2,3,4,5,6,8,9\}$) に属さない．この研究結果は，S_5 が A_5 を指数2の部分群にもつこと及び $SL(2,5)$ が A_5 の2重被覆群であることをそれぞれ利用し，ホモロジー球面上の A_5 の odd-fixed-point action の議論に帰着させる形で証明が行われている．上記の研究結果を深化させることにより，A_6 を指数2あるいは4の部分群にもつ有限群 S_6，$PGL(2,9)$，M_{10}，$\mathrm{Aut}(A_6)$ と A_6 の2重被覆群である特殊線形群 $SL(2,9)$ に対して，ホモロジー球面上の A_6 の odd-fixed-point action の議論に帰着させる形で次の定理を得ることことができた．ここで，$SL(2,9)$，S_6，$PGL(2,9)$，M_{10}，$\mathrm{Aut}(A_6)$ で表される有限群は，注意1に記載された有限群である．

定理 1.1.1. (cf. [1, Theorem 1.1–1.2]) Σ をホモロジー球面とする．Σ が有限群

$$A_6,\ SL(2,9),\ S_6,\ PGL(2,9),\ M_{10},\ \mathrm{Aut}(A_6)$$

の効果的な *odd-fixed-point action* を許容するならば，Σ の次元はそれぞれ以下の非負整数の集合

$$\begin{aligned}
T_{A_6} &= [0..7] \cup [9..12] \cup \{14,15\} \cup \{19,20\},\\
T_{SL(2,9)} &= [0..15] \cup [17..20] \cup \{22,23\} \cup \{27\},\\
T_{S_6} &= [0..15] \cup [17..20] \cup [22..24] \cup [27..29] \cup \{33\} \cup \{38\},\\
T_{PGL(2,9)} &= [0..7] \cup [9..15] \cup [19..23] \cup [29..31] \cup \{39\},\\
T_{M_{10}} &= [0..15] \cup [17..24] \cup [27..31] \cup \{33\} \cup [37..40] \cup \{47\} \cup \{49\},\\
T_{\mathrm{Aut}(A_6)} &= [0..15] \cup [17..24] \cup [27..31] \cup \{33\} \cup [37..40] \cup \{47\} \cup \{49\},
\end{aligned}$$

に属さない．ここで，$[m..n]$ は m 以上 n 以下の整数全体の集合を表している．

定理 1.1.1 は，定理 1.4.4，定理 1.4.6，定理 1.5.2 から従う．定理 1.4.4 と定理 1.4.6 の証明は節 1.4 で，定理 1.5.2 の証明は節 1.5 でそれぞれ行われる．

P. Mizerka [24] による球面上の Oliver 群の odd-fixed-point action に関する最近の結果を紹介する．$TL(2,5)$ で C_2 の $SL(2,5)$ による非自明な拡大を表す．(GAP [16] において，$TL(2,5)$ は SmallGroup(240,89) で与えられる．) 彼はホモロジー球面上の $TL(2,5)$ の効果的な odd-fixed-point action (resp. one-fixed-point action) が存在するならば，そのホモロジー球面の次元は [0..13] (resp. $[0..13] \cup \{15, 16, 17\}$) に属さないことを示した．さらには，ホモロジー球面上の $TL(2,5)$ の 5-pseudofree な one-fixed-point action が存在しないこと及びホモロジー球面上の $TL(2,5)$ の効果的な 6-pseudofree な one-fixed-point action が存在するならば，そのホモロジー球面の次元は $6 + 8k$ あるいは $18 + 8k$ ($k \geq 1$) 表されることも示している．

有限群の one-fixed-point action を許容する最低次元の球面である 6 次元の球面に関する結果として，A. Borowiecka–P. Mizerka [7] は S^6 上の one-fixed-point action を許容しない位数 216 以下の Oliver 群の例を挙げている．先程にも紹介したが，E. Laitinen–P. Traczyk [21] は 6-球面上の有限群 G の 2-pseudofree な one-fixed-point action が存在するならば，G は A_5 と同型でなければならないことを示している．この論文では，6-球面 S^6 上の有限群の odd-fixed-point action の結果として，以下の 2 つの結果を示した．

定理 1.1.2. (cf. [2, 定理 1.4]) 有限可解群 G がホモロジー 6-球面に作用しているならば，その G-不動点集合のオイラー標数は偶数である．

定理 1.1.3. (cf. [2, 定理 1.5]) G を一般線形群 $GL(3, \mathbb{C})$ の有限部分群とし，Σ を効果的な G-作用をもつホモロジー 6-球面とする．Σ 上の G の *odd-fixed-point action* が存在するならば，G は A_5 あるいは $A_5 \times C_2$ に同型であり，その作用は 3-*pseudofree* な *one-fixed-point action* である．

定理 1.1.2 は定理 1.7.5 から従い，その証明は節 1.7 で行われる．定理 1.1.3 は定理 1.8.5 から従い，その証明は節 1.8 で行われ，$GL(3, \mathbb{C})$ の有限部分群についても節 1.8 で記述する．

この節の残りにおいて，この論文で用いる記号の表記について説明する．$\mathbb{Z}$ で整数環，$\mathbb{N}$ で自然数全体の集合，$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ で非負整数全体の集合，$\mathbb{Q}$ で有理数体，$\mathbb{R}$ で実数体，$\mathbb{C}$ で複素数体，$\mathbb{F}_q$ で位数 q の有限体を表す．素数 p に対しては，$\mathbb{F}_p$ は $\mathbb{Z}_p$ で表すことにする．

この論文では，以下の有限群の表記を用いる．

E : 単位群

C_n : 位数 n の巡回群

D_n : 位数 n の二面体群

A_n : n 次の交代群

S_n : n 次の対称群

M_n : n 次のマシュー群

$SL(n,q)$: $\mathbb{F}_q$ 上の n 次の特殊線形群

$PSL(n,q)$: $\mathbb{F}_q$ 上 n 次の射影特殊線形群

$PGL(n,q)$: $\mathbb{F}_q$ 上の次数 n の射影一般線形群

$U(n,q)$: 体拡大 $\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q$ に対する n 次のユニタリー群

$PSU(n,q)$: 体拡大 $\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q$ に対する n 次の射影特殊ユニタリー群

有限群 H と K に対して，群の準同型の完全系列

$$E \to H \to G \to K \to E$$

が存在するとき，有限群 G は K の H による拡大であるという．この論文では，議論に支障がない限り，K の H による拡大である G を $H \star K$ で表すことにする．有限群 G とその部分群 H に対して，$Z(G)$ で G の中心，$C_G(H)$ で G における H の中心化部分群，$F(G)$ で G の Fitting 部分群 (節 1.3 にて定義を述べる) をそれぞれ表す．

注意 1. この論文では，有限群の具体的な部分群や実表現を GAP [16] を用いて調べる．以下にこの論文で用いる具体的な有限群の GAP における表記を記載する．

- A_5=SmallGroup(60,5)
- S_5=SmallGroup(120,34)
- $SL(2,5)$=SmallGroup(120,5)
- $PSL(2,7)$=SmallGroup(168,42)
- A_6=SmallGroup(360,118)
- S_6=SmallGroup(720,763)
- $PSL(2,11)$= SmallGroup(660,13)
- $SL(2,9)$=SmallGroup(720,409)
- $PGL(2,9)$=SmallGroup(720,764)
- M_{10}=SmallGroup(720,765)
- $\widetilde{A}_6$=SmallGroup(1080,260)
- $\mathrm{Aut}(A_6)$=SmallGroup(1440,5841)
- $U(3,3)$=PerfectGroup(6048,1)
- $PSU(4,2)$=PerfectGroup(25920,1)

1.2 球面上の odd-fixed-point action に関する基礎理論

この節では本論文で扱う球面上の有限群の odd-fixed-point action に関する基礎的な理論を述べる．

次の補題 1.2.1，1.2.2，1.2.3 は本研究における様々な証明の基盤となる結果である．

補題 1.2.1. (cf. [8, Chapter Ⅲ, Theorem 4.3]) p を素数，P を有限 p-群，X を有限 P-CW 複体とする．このとき，オイラー標数 $\chi(X)$ と $\chi(X^P)$ は p を法として等しい．

R を単位元をもつ可換環とする．前節の導入にて，閉多様体に対して定義した R-ホモロジー球面の定義は有限 CW-複体に対しても同様に定義することができる．位相空間 X が R-**非輪状**であるとは，X が 1 点集合と同じ R-係数でのホモロジー群をもつときをいう．

補題 1.2.2. (Smith の定理, cf. [8, Chapter Ⅲ, Theorem 5.1–5.2]) p を素数，P を有限 p-群，X を有限 P-CW 複体とする．

- X が $\mathbb{Z}_p$-ホモロジー球面ならば，X^P も $\mathbb{Z}_p$-ホモロジー球面である．
- X が $\mathbb{Z}_p$-非輪状ならば，X^P も $\mathbb{Z}_p$-非輪状である．

補題 1.2.3. G を有限群，S を G-作用をもつ球面とする．S の次元が 2 以下かつ S^G が空でないならば，S^G はある 2 次元以下の球面と微分同相である．

$\mathbb{Z}_p$-ホモロジー球面におけるいくつかの性質を確認する．X を $\mathbb{Z}_p$-ホモロジー n-球面とする．$0 \leq n \leq 2$ ならば，X は n-球面と微分同相である．さらに，$n > 0$ ならば X は連結で向きづけ可能な閉多様体である．$\mathbb{Z}_p$-ホモロジー球面が向きづけ可能であることの証明を A. Borowiecka–P. Mizerka [7, Lemma 3.2] に従って命題 1.2.4 にて行う．

命題 1.2.4. (cf. [7, Lemma 3.2]) n を自然数，p を素数とする．$\mathbb{Z}_p$-ホモロジー n-球面 Σ は向きづけ可能である．

証明．$1 \leq n \leq 2$ ならば，Σ は n-球面と微分同相であるので主張は明らかに正しい．$n \geq 3$ である場合において，Σ が向きづけ可能ではないと仮定しよう．すなわち，$H_n(\Sigma;\mathbb{Z}) = 0$ であると仮定する．普遍係数定理より，各 $0 \leq k \leq n$ に対して，分裂する完全系列

$$0 \to H_k(\Sigma;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \to H_k(\Sigma;\mathbb{Z}_p) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{k-1}(\Sigma;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_p) \to 0$$

が存在する．$0 < k < n$ を満たす k に対して，$H_k(\Sigma;\mathbb{Z}_p) = 0$ であるので，

$$H_k(\Sigma;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{k-1}(\Sigma;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_p) \cong 0$$

が成立する．従って，

$$H_{n-1}(\Sigma;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}$$

が成立する．ここで，各 m_i は $\gcd(m_i, p) = 1$ を満たす整数である．仮定より，$H_n(\varSigma; \mathbb{Z}) = 0$ であるので，

$$0 \to H_n(\varSigma; \mathbb{Z}_p) \underset{\cong}{\to} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(\varSigma; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p) \to 0$$

であり，$H_n(\varSigma; \mathbb{Z}_p) \cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(\varSigma; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$ が成立することがわかる．一方で，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(\varSigma; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p) &\cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}, \mathbb{Z}_p) \\
&\cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{m_1}, \mathbb{Z}_p) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{m_k}, \mathbb{Z}_p) \\
&\cong 0 \oplus \cdots \oplus 0 \qquad (\because \gcd(m_i, p) = 1) \\
&\cong 0
\end{aligned}$$

が成立するので矛盾が生じる．以上より，$\varSigma$ は向きづけ可能である． □

G を有限群，M を G-作用をもつ多様体とする．$x \in M^G$ に対して，M 上の G-作用は接空間 $T_x(M)$ 上の線形な G-作用を誘導する．よって，$T_x(M)$ は $\mathbb{R}[G]$-加群の構造をもつ．この論文では，$T_x(M)$ を x 上の**接空間加群**と呼ぶ．M 上の G-作用が効果的ならば，$T_x(M)$ は忠実な $\mathbb{R}[G]$-加群である．また，M が向きづけ可能であり，M 上の G-作用が M の向きを保つならば，$T_x(M)$ 上の G-作用も $T_x(M)$ の向きを保つ．

次の命題 1.2.5 は [29, Proposition 2.4] と [30, Proposition 1] の証明を併せることによって得ることができる．

命題 1.2.5. p と q を素数，R を単位元をもつ可換環，G を有限群，$\varSigma$ を G-作用をもつ R-ホモロジー n-球面とする．$G \in \mathcal{G}_p^q$ かつ $R = \mathbb{Z}_p$ あるいは $G \in \mathcal{G}^q$ かつ $R = \mathbb{Z}$ ならば，$\chi(\varSigma^G)$ は q を法として 0 あるいは 2 に等しい．特に，$q = 2$ ならば $\chi(\varSigma^G)$ は偶数である．

証明．$\varSigma^G = \emptyset$ あるいは $n \leq 2$ の場合，$\chi(\varSigma^G) = 0$ あるいは 2 であることは明らかである．$\varSigma^G \neq \emptyset$ かつ $n > 2$ である場合を考える．$G \in \mathcal{G}_p^q$ かつ $R = \mathbb{Z}_p$ である場合を示す．$G \in \mathcal{G}_p^q$ の仮定より，正規鎖 $P \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ であり，P が p 冪位数，H/P が巡回群，G/H が q-冪位数であるものを選ぶことができる．G-不動点 x まわりの G-不変なディスク近傍 U に対する同変 pinching 写像

$$f : \varSigma \to \varSigma/(\varSigma \setminus \mathrm{Int}(U)) \cong S(\mathbb{R} \oplus T_x(\varSigma))$$

の写像度は 1 であるので，n 次のホモロジー群の同型写像

$$f_* : H_n(\varSigma; \mathbb{Z}) \to H_n(S(\mathbb{R} \oplus T_x(\varSigma)); \mathbb{Z})$$

が誘導される．C_f で f の写像錐を表すと，f は $\mathbb{Z}_p$-ホモロジー同値写像であるので，C_f は $\mathbb{Z}_p$-非輪状である．補題 1.2.2 より，C_f^P も $\mathbb{Z}_p$-非輪状である (よって，$\mathbb{Q}$-非輪状である) ことが従う．H/P は巡回群であるので，$\chi((\varSigma^P)^{H/P}) = 1$ が成立する (参照．[30, Lemma 1])．このことはオイラー標数

$$\chi((\varSigma^P)^{H/P}) \text{ と } \chi((S(\mathbb{R} \oplus T_x(\varSigma))^P)^{H/P})$$

の値が等しく，それらの値が 0 あるいは 2 であることを意味する．

$$\Sigma^G = ((\Sigma^P)^{H/P})^{G/H}$$

であるので，補題 1.2.1 を用いると $\chi(\Sigma^G)$ が q を法として 0 あるいは 2 に等しいことが従う．$G \in \mathcal{G}^q$ かつ $R = \mathbb{Z}$ である場合にも，$G \in \mathcal{G}_p^q$ かつ $R = \mathbb{Z}_p$ の場合と同様な写像 f を考えると，f は $\mathbb{Z}$-ホモロジー同値写像となるので，ある素数 p に対して，写像錐 C_f は $\mathbb{Z}_p$-非輪状になる．あとは $G \in \mathcal{G}_p^q$ かつ $R = \mathbb{Z}_p$ の場合と全く同様の議論により証明することができる．□

命題 1.2.5 より直ちに次の系が得られる．以下の系 1.2.6 が有限群 G が Oliver 群でないならば，どんな次元の球面上の G の one-fixed-point action も存在しないことを示している．

系 1.2.6. G を有限群，Σ を G-作用をもつホモロジー球面とする．G が $\mathcal{G}$ に属するならば $\chi(\Sigma^G) \neq 1$ である．特に，G が $\mathcal{G}$ に属するならば，如何なるホモロジー球面上の G の *one-fixed-point action* も存在しない．

次の命題 1.2.7 は [29, Proposition 2.9] の一般化である．

命題 1.2.7. (cf. [1, Proposition 2.4]) G を有限群，Σ を G-作用をもつホモロジー球面する．有限群 G が次の 2 つの条件 (A) と (B) を満たすとする．

(A) 各 $g \in G$ の位数は素数冪である．

(B) 位数が 8 以上かつ 2 冪である $g \in G$ に対して，$V^g = \{0\}$ を満たす既約な $\mathbb{R}[G]$-加群 V は同型を除いて高々1 つしか存在しない．

このとき，任意の $x, y \in \Sigma^G$ に対して，$T_x(\Sigma)$ と $T_y(\Sigma)$ は $\mathbb{R}[G]$-加群として同型である．

証明．$|\Sigma^G| \geq 2$ の場合のみを示せば良い．x と y を Σ^G の異なる 2 点とする．任意の $g \in G$ に対して，$\mathrm{Res}^G_{\langle g \rangle} T_x(\Sigma)$ と $\mathrm{Res}^G_{\langle g \rangle} T_y(\Sigma)$ が $\mathbb{R}[\langle g \rangle]$-加群として同型であることを示せば良い．ここで，$\langle g \rangle$ は $g \in G$ によって生成される G の巡回部分群を表している．仮定 (A) より，各 $g \in G$ は素数冪位数であるので，補題 1.2.2 より，$\Sigma^{\langle g \rangle}$ は連結であるか 2 点から成る集合であるかのいずれかである．$\Sigma^{\langle g \rangle}$ が連結である場合は明らかに $\mathrm{Res}^G_{\langle g \rangle} T_x(\Sigma)$ と $\mathrm{Res}^G_{\langle g \rangle} T_y(\Sigma)$ は同型であるので，$\Sigma^{\langle g \rangle} = \{x, y\}$ である場合に $\mathrm{Res}^G_{\langle g \rangle} T_x(\Sigma)$ と $\mathrm{Res}^G_{\langle g \rangle} T_y(\Sigma)$ が同型であることを示す．$\Sigma^{\langle g \rangle} = \{x, y\}$ とする．$g \in G$ が奇素数冪位数である場合は，[33, Corollary 1.12] を応用することにより，$\mathrm{Res}^G_{\langle g \rangle} T_x(\Sigma)$ と $\mathrm{Res}^G_{\langle g \rangle} T_y(\Sigma)$ が同型であることがわかる．次に $g \in G$ が 2 冪位数である場合を考える．g の位数が 2 あるいは 4 である場合には，指標を具体的に確認することによって，$\mathrm{Res}^G_{\langle g \rangle} T_x(\Sigma)$ と $\mathrm{Res}^G_{\langle g \rangle} T_y(\Sigma)$ が同型であることを得ることができる．g の位数が 8 以上の場合には，仮定 (B) より，$V^g = \{0\}$ となる既約な $\mathbb{R}[G]$-加群 V が同型を除いてただ一つ存在するので，$\{x, y\}$ 上の接空間加群はいくつかの V の直和に同型である．従って，$\mathrm{Res}^G_{\langle g \rangle} T_x(\Sigma)$ と $\mathrm{Res}^G_{\langle g \rangle} T_y(\Sigma)$ は同型である．□

A_5，A_6 及び M_{10} は命題 1.2.7 の条件 (A) と (B) を満たすことに注意する．

節 1.5 における定理 1.5.2 の証明にて，系 1.2.10 が重要な役割を果たす．系 1.2.10 は以下の補題 1.2.8 及び命題 1.2.9 から従う．

補題 1.2.8. (cf. [11, Theorem 25.1]) M を C_2-作用をもつ正の次元の連結な閉多様体とする．M^{C_2} が空でない有限集合ならば M^{C_2} は偶数個の点から成る集合である．

命題 1.2.9. (cf. [29, Proposition 2.7]) G を有限群，L を G の指数 2 の部分群，M を G-作用をもつ正の次元の連結な閉多様体とする．M^G が奇数個の点から成る集合であるならば $\chi(M^L)$ は奇数であり，ある $x \in M^G$ に対して，$\dim T_x(M)^L = 0$ が成立する．

証明. 仮定より $|M^G| \equiv 1 \bmod 2$ であるので，$\chi(M^L)$ が奇数であることは補題 1.2.1 より直ちに従う．C を G-不動点を含むような M^L の連結成分とすると，C は G/L-作用をもち，$C^{G/L} = C^G$ を満たす．また，$M^G = \coprod_C C^G$ であることに注意する．全ての G-不動点を含む連結成分 C が正の次元であると仮定する．各連結成分 C に対して，$0 < |C^G| < \infty$ であるので，補題 1.2.8 より，C^G は偶数個の点から成る集合でなければならない．このことは M^G が奇数個の点から成る集合であることに矛盾するので，ある連結成分 C は次元 0 (孤立点) でなければならない． □

系 1.2.10. Σ を有限群 G の作用をもつホモロジー球面とし，L を G の指数 2 の部分群とする．L が命題 1.2.7 における条件 (A) と (B) を満たすならば，Σ^G が奇数個の点から成る集合であることと Σ^L が奇数個の点から成る集合であることは同値である．

証明. Σ の次元は正であるとして良い．$\Sigma^G \subset \Sigma^L$ であるので，$|\Sigma^L| \equiv 1 \bmod 2$ ならば $|\Sigma^G| \equiv 1 \bmod 2$ であることは補題 1.2.1 より直ちに従う．逆に $|\Sigma^G| \equiv 1 \bmod 2$ であるとする．このとき，命題 1.2.9 より，Σ^L はある孤立点を部分集合としてもち，$\chi(\Sigma^L)$ は奇数である．L は命題 1.2.7 における条件 (A) と (B) を満たすので，命題 1.2.7 より，$|\Sigma^L| \equiv 1 \bmod 2$ が従う． □

命題 1.2.11. (cf. [1, Proposition 2.5]) X を $\mathbb{Z}_2$-ホモロジー球面，A と B を正の次元の連結な X の閉部分多様体とする．A と B が X において有限個の点で横断的に交わっているならば $A \cap B$ は偶数個の点から成る集合である．

証明. A と B は X において有限個の点で横断的に交わっているので，A と B の次元をそれぞれ m と n とすると，X の次元は $(m+n)$ 次元である．X 上の $\mathbb{Z}_2$-交差形式

$$H_m(X;\mathbb{Z}_2) \times H_n(X;\mathbb{Z}_2) \to H_{m+n}(X;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$$

は自明であるので，有限個の点から成る集合 $A \cap B$ が偶数個の点から成る集合であることが従う． □

1.3　本研究における有限群の基礎理論

この節では，本論文で用いる有限群の基礎的な結果を紹介する．

6 次元以下の球面上の有限群の odd-fixed-point action の議論をする際，有限群の Fitting 部分群と呼ばれる部分群を調べることが有用である．以下に，Fitting 部分群の定義及び簡単な性質について記述する．

有限群 G に対して，$F(G)$ で G の **Fitting 部分群**を表す．$F(G)$ は G の全ての冪零正規部分群の積として定められる G の部分群である．以下の Fitting の定理 (補題 1.3.1) により，$F(G)$ は G の唯一の極大冪零正規部分群として定められることがわかる．特に，$F(G)$ は G の特性部分群であることが知られている．

補題 1.3.1. (Fitting の定理, cf. [14, Lemma 1.1, Chapter 6, p.217]) H と K が有限群 G の冪零正規部分群ならば，積 HK も G の冪零正規部分群である．

命題 1.3.2. G を有限群，Z を $Z(G)$ の部分群とする．

(1) $F(G)$ の各 *Sylow* 部分群は G の特性部分群である．

(2) G が非自明な可解群ならば $F(G)$ も非自明である．

(3) H が Z を含む G の部分群ならば H が冪零であることと H/Z が冪零であることは同値である．

(4) $F(G/Z)$ と $F(G)/Z$ は一致する．

証明．(1) の主張の証明．$F(G)$ は冪零なので，$F(G)$ は自身の Sylow 部分群の直積の形に表すことができる．P を $F(G)$ の非自明な Sylow 部分群とすると，位数の関係により，P は $F(G)$ の特性部分群であることがわかる．$F(G)$ は G の特性部分群であるので，P は G の特性部分群である．

(2) の主張は， [14, Chapter 6, Theorem 1.3, p.218] より，G が可解群ならば中心化部分群 $C_G(F(G))$ が $F(G)$ に含まれることから従う．

(3) の主張の証明．p_i を H の位数を割り切る素数とし，P_i を H の p_i-Sylow 部分群とする．$Q_i = Z \cap P_i$ と定めると，Q_i は Z の p_i-Sylow 部分群であり，P_i の正規部分群である．さらに，H/Z の p_i-Sylow 部分群は P_i/Q_i であり，Z は冪零群なので，自身の Sylow 部分群の直積の形で表せることに注意する．このとき，H が自身の Sylow 部分群の直積

$$P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_m$$

の形で表すことができることと，H/Z が自身の Sylow 部分群の直積

$$P_1/Q_1 \times P_2/Q_2 \times \cdots \times P_m/Q_m$$

の形で表すことができることは同値である．従って，(3) の主張が示された．

(4) の主張の証明．対応定理 (参照．[14, Chapter 1, Theorem 2.4, p.6]) より，G の正規部分群 H であり，$F(G/Z) = H/Z$ を満たすものが存在する．H/Z は冪零であるので，(3) の主張より H は冪零である．従って，$F(G/Z) \subset F(G)/Z$ である．逆に，$F(G)$ は冪零なので，$F(G)/Z$ は冪零である．$F(G)/Z$ は G/Z の冪零正規部分群であるので，$F(G)/Z \subset F(G/Z)$ である．ゆえに，$F(G/Z)$ と $F(G)/Z$ は一致する． □

6 次元以下の球面上の有限群 G の作用を調べるためには，G が 4 次の特殊直交群 $SO(4)$ の有限部分群である場合について調べることが必要である．そこで，$SO(4)$ の有限部分群について調べる．$SO(4)$ は非自明な中心をもち，その中心は $SO(4)$ の位数 2 の元 $-\mathrm{id}$ で生成される．さらに，$SO(4)$ の中心 $\langle -\mathrm{id} \rangle$ での商群は $SO(3) \times SO(3)$ に同型であるので，$SO(4)$ は $SO(3) \times SO(3)$ の 2 重被覆群である．$\pi : SO(4) \to SO(3) \times SO(3)$ で，その 2 重被覆写像を表す．H を $SO(3) \times SO(3)$ の有限部分群とすると，ある $SO(3)$ の有限部分群 H_1 と H_2 が存在して，H は $H_1 \times H_2$ の部分群となる．$SO(3) \times SO(3)$ の有限部分群の構造を知るためには，次の Goursat の補題が有用である．

補題 1.3.3. (Goursat の補題, cf. [22, Exercise 5, p.75]) H_1 と H_2 を有限群，H を $H_1 \times H_2$ の部分群であり，射影 $\pi_1 : H \to H_1$ と $\pi_2 : H \to H_2$ が全射となるものとする．N_1 を π_2 の核，N_2 を π_1 の核とすると，N_1 と N_2 はそれぞれ H_1 と H_2 の正規部分群と見做すことができ，$H_1/N_1 \times H_2/N_2$ における H の像は H_1/N_1 から H_2/N_2 へのある同型写像のグラフと一致する．

証明．H_1 の自明な部分群を $\{e_1\}$，H_2 の自明な部分群を $\{e_2\}$ で表す．まず，N_1 と N_2 がそれぞれ $H_1 \times \{e_2\}$ と $\{e_1\} \times H_2$ の正規部分群となることを示す．N_1 の定義の仕方より，N_1 は H の正規部分群である．π_1 は全射であるので，任意の $g_1 \in H_1$ に対して，$h = (g_1, g_2)$ となる H の元が存在する．任意の $g_1 \in H_1$ に対して，

$$g_1\pi_1(N_1) = \pi_1(h)\pi_1(N_1) = \pi_1(hN_1) = \pi_1(N_1h) = \pi_1(N_1)g_1$$

が成立するので，$\pi_1(N_1)$ は H_1 の正規部分群である．さらに，$N_1 = \pi_1(N_1) \times \{e_2\}$ であることに気をつけると，任意の $(g_1, e_2) \in H_1 \times \{e_2\}$ に対して，

$$(g_1, e_2)(\pi_1(N_1) \times \{e_2\}) = g_1\pi_1(N_1) \times \{e_2\} = \pi_1(N_1)g_1 \times \{e_2\} = (\pi_1(N_1), \{e_2\})(g_1, e_2)$$

が成立するので，N_1 は $H_1 \times \{e_2\}$ の正規部分群である．同様の議論を行うことにより，N_2 が $\{e_1\} \times H_2$ の正規部分群であることを示すことができる．以下の証明において，H_1 と $H_1 \times \{e_2\}$ を同一視することによって，剰余群 $(H_1 \times \{e_2\})/N_1$ を H_1/N_1 で表すことにする．同様に，H_2 と $\{e_1\} \times H_2$ を同一視することによって，剰余群 $(\{e_1\} \times H_2)/N_2$ を H_2/N_2 で表す．H から $H_1/N_1 \times H_2/N_2$ への写像を

$$(g_1, g_2) \mapsto (g_1N_1, g_2N_2)$$

で定める．この写像による H の像の集合は

$$\{\,(g_1N_1, g_2N_2) \in H_1/N_1 \times H_2/N_2 \,|\, (g_1, g_2) \in H\,\}$$

である．$\pi_1 : H \to H_1$ は全射であるので，well-defined な群の準同型 $\psi : H_1/N_1 \to H_2/N_2$ が定まる．ψ が well-defined であることを示すためには，任意 H の元 (g_1, g_2) と (g_1', g_2') に対して，

$$g_1N_1 = g_1'N_1 \Rightarrow g_2N_2 = g_2'N_2$$

が成立することを示せば良い．$g_1N_1 = g_1'N_1$ であるとする．これは，$(g_1, e_2)N_1 = (g_1', e_2)N_1$ であることを意味するので，$({g_1'}^{-1}g_1, e_2) \in N_1 \subset H$ である．従って，

$$(g_1', g_2')^{-1}(g_1, g_2)({g_1'}^{-1}g_1, e_2)^{-1} = (e_1, {g_2'}^{-1}g_2) \in H$$

が成立する．よって，$(e_1, {g_2'}^{-1}g_2) \in N_2$ であるので，$g_2N_2 = g_2'N_2$ が従う．ψ が群の準同型であることは，

$$(g_1, g_2), (g_1', g_2') \in H \Rightarrow (g_1g_1', g_2g_2') \in H$$

であることから従う．ψ の構成において，H_1/N_1 と H_2/N_2 を入れ替えることによって，グラフが

$$\{\,(g_2N_2, g_1N_1) \,|\, (g_1, g_2) \in H\,\}$$

となるような well-defined な群の準同型 $\phi : H_2/N_2 \to H_1/N_1$ を定めることができる．このとき，構成の仕方より ϕ と ψ は互いの逆写像であるので，同型写像であることがわかる． □

注意 2. G_1 と G_2 を有限群とし，H を $G_1 \times G_2$ の部分群とする．2 つの射影 $\pi_1 : H \to G_1$ と $\pi_2 : H \to G_2$ の像をそれぞれ H_1 と H_2 とすると，$\pi_1 : H \to H_1$ と $\pi_2 : H \to H_2$ は共に全射となる．従って，H は $H_1 \times H_2$ の部分群として，補題 1.3.3 を利用することができる．さらに，補題 1.3.3 の状況において，N_2 が自明，すなわち，π_1 が同型である場合には，H は H_1 と同型である．同様に，N_1 が自明である場合には，H は H_2 と同型である．

命題 1.3.4. $G = D_{2m} \times D_{2n}$ の任意の部分群 H は 2-群の冪零群による拡大である．

証明. 容易にわかるように，G は 2-群 Q_2 の $F(G)$ による拡大である，すなわち，$G = F(G) \star Q_2$ と表すことができる．同型定理 (参照. [14, Chapter 1, Theorem 2.6, p.6]) を用いると，

$$HF(G)/F(G) \cong H/(H \cap F(G))$$

が成立する．$P_2 = HF(G)/F(G)$ とおくと，$H = (H \cap F(G)) \star P_2$ と表すことができる．$H \cap F(G)$ は冪零群，P_2 は 2-群であるので，命題 1.3.4 の主張を示せた． □

次の命題 1.3.5 の証明において，補題 1.3.3 で用いた記号を使用する．また，$SO(3)$ の非自明な有限部分群は

$$C_n,\ D_{2n},\ A_4,\ S_4,\ A_5$$

のいずれかに同型であるという事実を用いる (参照. [34, chapter 5]).

命題 1.3.5. H を $SO(3)\times SO(3)$ の非自明な有限部分群とする．このとき，H は次の (1) から (3) の少なくともひとつを満たす.

(1) $F(H)$ は巡回群ではない.

(2) H は 2-群の冪零群による拡大である.

(3) H は $SO(3)$ のある部分群 K と A_5 の直積である.

証明. H は $SO(3)$ の有限部分群 H_1 と H_2 の直積の部分群であり，射影 $\pi_1 : H \to H_1$ と $\pi_2 : H \to H_2$ は全射であるとして良い．また，H はそれぞれ $\ker\pi_2$ と $\ker\pi_1$ に同型な正規部分群 N_1 と N_2 をもつことに注意する．N_1 あるいは N_2 が自明である場合において，H は

$$C_n,\ D_{2n},\ A_4,\ S_4,\ A_5$$

のいずれかと同型であるので，命題 1.3.5 の主張が正しいことが直ちにわかる．従って，以下の証明では N_1 と N_2 は共に非自明であるとする.

初めに，H が可解である場合に (1) あるいは (2) の少なくとも一方が成立することを示す. H_1 が A_4 あるいは S_4 と同型である場合は，N_1 が D_4 を特性部分群として含むので，$F(H)$ は巡回群ではないことがわかる．同様の議論により，H_2 が A_4 あるいは S_4 と同型である場合にも，H が主張 (1) を満たすことがわかる．H_1 と H_2 の両方ともが A_4 でも S_4 でもない場合には，H が 2-群の冪零群による拡大であることは命題 1.3.4 より従う.

次に H が可解ではない場合に (3) が成立することを示す．H は可解ではないので，N_1 あるいは N_2 の少なくとも一方は A_5 と同型でなければならない．そこで，N_1 が A_5 と同型であるとする．$SO(3)$ の有限部分群の中で A_5 は極大であるので，$H_1 = N_1$ が A_5 と同型であることがわかる．補題 1.3.3 より，H_1/N_1 と H_2/N_2 は共に自明であるので，H は A_5 と H_2 の直積であることが従う．N_2 が A_5 と同型である場合も同様の議論により (3) が成り立つことがわかる. □

命題 1.3.6. G を $SO(4)$ の非自明な有限部分群とする．$F(G)$ が自明ならば，G は A_5 と同型である.

証明. $-\mathrm{id}\in G$ である場合は明らかに $F(G)$ は非自明であるので，$-\mathrm{id}\notin G$ であるとして良い．この場合，2 重被覆写像 $\pi : SO(4)\to SO(3)\times SO(3)$ は G を $SO(3)\times SO(3)$ のある有限部分群に同型に射影することに注意する．命題 1.3.5 によると，$SO(3)\times SO(3)$ の非自明な有限部分群の中で Fitting 部分群が自明であるものは，A_5 であるか $A_5\times A_5$ であるかのいずれかである．$A_5\times A_5$ は明らかに $SO(4)$ の部分群になり得ないので，G が A_5 と同型であることがわかる. □

有限群 G が**特性単純群 (characteristically simple group)** であるとは，ある単純群 Q が存在して，G が幾らかの Q の直積と同型であるときをいう．任意の有限群 G に対して，G

の極小正規部分群は特性単純群であることが知られている (参照．[14, p.17, Theorem 1.5])．6 次元以下有限群の作用をもつ多様体の不動点上の接空間加群を調べるためには，6 次元以下の $\mathbb{R}[G]$-加群をもつ非可換な特性単純群を調べる必要がある．そのためには，$SO(6)$ の有限部分群である非可換な特性単純群を探せば良い．$SO(4)$ の非可換な特性単純部分群は A_5 のみであり，A_5 は $SO(3)$ の部分群でもあることに注意する．次数 6 以下の既約な複素表現をもつ非可換な有限単純群の結果を以下に紹介する．

- 非可換な有限単純群 G が次数 3 の既約な複素表現 $\rho : G \to SU(3)$ をもつならば，G は A_5 あるいは $PSL(2,7)$ のいずれかと同型である (参照．[5, Section 82, p.113])．
- 非可換な有限単純群 G が次数 5 の既約な複素表現 $\rho : G \to SU(5)$ をもつならば，G は A_5, A_6, $PSL(2,11)$, $PSU(4,2)$ のいずれかと同型である (参照．[9, Theorem 9.A])．
- 非可換な有限単純群 G が次数 6 の既約な複素表現 $\rho : G \to SU(6)$ をもつならば，G は A_7，$PSL(2,7)$，$PSU(4,2)$，$U(3,3)$ のいずれかと同型である (参照．[23, Section 3, p.773])．

上記の非可換な有限単純群の既約な複素表現の Frobenius-Schur indicator を GAP [16] を用いて調べることにより，対応する既約な実表現を得ることができる．以下の表 1 にはその対応が記載されている．

既約な複素表現	Frobenius-Schur indicator	対応する既約な実表現
$A_5 \to SU(3)$	1	$A_5 \to SO(3)$
$A_5 \to SU(3)$	1	$A_5 \to SO(3)$
$PSL(2,7) \to SU(3)$	0	$PSL(2,7) \to SO(6)$
$PSL(2,7) \to SU(3)$	0	$PSL(2,7) \to SO(6)$
$A_5 \to SU(4)$	1	$A_5 \to SO(4)$
$A_5 \to SU(5)$	1	$A_5 \to SO(5)$
$A_6 \to SU(5)$	1	$A_6 \to SO(5)$
$A_6 \to SU(5)$	1	$A_6 \to SO(5)$
$PSL(2,11) \to SU(5)$	0	$PSL(2,11) \to SO(10)$
$PSL(2,11) \to SU(5)$	0	$PSL(2,11) \to SO(10)$
$PSU(4,2) \to SU(5)$	0	$PSU(4,2) \to SO(10)$
$PSU(4,2) \to SU(5)$	0	$PSU(4,2) \to SO(10)$
$A_7 \to SU(6)$	1	$A_7 \to SO(6)$
$PSL(2,7) \to SU(6)$	1	$PSL(2,7) \to SO(6)$
$PSU(4,2) \to SU(6)$	1	$PSU(4,2) \to SO(6)$
$U(3,3) \to SU(6)$	-1	$U(3,3) \to SO(12)$

表 1: 次数 6 以下の非可換な単純群の既約な複素表現と実表現の対応表

表 1 より，以下の命題を得ることができる．

命題 1.3.7. G を非可換な有限特性単純群とする．

- G が 3 次元の既約な $\mathbb{R}[G]$-加群をもつならば，G は A_5 と同型である．

- G が 4 次元の既約な $\mathbb{R}[G]$-加群をもつならば，G は A_5 と同型である．

- G が 5 次元の既約な $\mathbb{R}[G]$-加群をもつならば，G は A_5 あるいは A_6 のいずれかに同型である．

- G が 6 次元の既約な $\mathbb{R}[G]$-加群をもつならば，G は $A_5 \times A_5$，A_7，$PSL(2,7)$ あるいは $PSU(4,2)$ のいずれかに同型である．

1.4 $\mathbb{Z}_2$-ホモロジー球面上の A_6 と $SL(2,9)$ の作用

この節を通して，$G = A_6$，$\widetilde{G} = SL(2,9)$ とし，Σ は効果的な G あるいは $\widetilde{G}$-作用をもつ $\mathbb{Z}_2$-ホモロジー球面とする．$\widetilde{G}$ は G の 2 重被覆群であるので，

$$|Z(\widetilde{G})| = 2 \text{ かつ } \widetilde{G}/Z(\widetilde{G}) \cong G$$

が成立する．既約な $\mathbb{R}[G]$-加群は同型を除いて 7 個存在し，それらを

$$\mathbb{R}_G,\ V_{5.1},\ V_{5.2},\ V_{8.1},\ V_{8.2},\ V_9,\ V_{10}$$

で表す．ここで，

$$\dim \mathbb{R}_G = 1, \dim V_{k.i} = \dim V_k = k$$

である．

次の表 2 は補題 1.4.1 の証明に必要な G の部分群 H による既約な $\mathbb{R}[G]$-加群 V の H-不動点集合の次元 $\dim V^H$ が記載された表である．

	E	C_2	D_8	$C_3 \times C_3$	S_4	$\mathfrak{S}_4$	$(C_3 \times C_3) \rtimes C_4$	G
$\mathbb{R}_G$	1	1	1	1	1	1	1	1
$V_{5.1}$	5	3	1	1	1	0	0	0
$V_{5.2}$	5	3	1	1	0	1	0	0
$V_{8.i}(i=1,2)$	8	4	1	0	0	0	0	0
V_9	9	5	2	1	1	1	1	0
V_{10}	10	4	0	2	0	0	0	0

表 2: 既約な $\mathbb{R}[G]$-加群の不動点集合の次元

表 2 における G の部分群は

$$
\begin{aligned}
C_2 &= \langle (3,5)(4,6) \rangle \\
D_8 &= \langle (3,5)(4,6), (3,6)(4,5), (1,2)(3,5) \rangle \\
C_3 \times C_3 &= \langle (1,3,2)(4,5,6), (1,2,3)(4,5,6) \rangle \\
S_4 &= \langle (4,5,6), (1,2)(3,4,6,5) \rangle \\
\mathfrak{S}_4 &= \langle (1,3,6)(2,5,4), (1,2)(3,4,6,5) \rangle \\
(C_3 \times C_3) \rtimes C_4 &= \langle (4,5,6), (1,2)(3,4,6,5) \rangle \\
G &= \langle (1,2,3,4,5), (4,5,6) \rangle
\end{aligned}
$$

によって定められる部分群である．$\mathfrak{S}_4$ は S_4 と同型であるが A_6 において共役ではない部分群であり，

$$S_4 \cap \mathfrak{S}_4 = D_8 \text{ かつ } \langle S_4, \mathfrak{S}_4 \rangle = G$$

を満たす．

補題 1.4.1. (cf. [1, Lemma 3.1]) G が Σ に $0 < |\Sigma^G| < \infty$ を満たすように作用しているとする．F を接空間加群 $T_x(\Sigma)$ が

$$V_{5.1}, V_{5.2}, V_9, V_{10}$$

により生成されている G-不動点 x 全体の集合とする．このとき，F は偶数個の点から成る集合である．

証明. 各 $x \in F$ に対して，x 上の接空間加群 $T_x(\Sigma)$ は，非負整数 a_1，a_2，b，c を用いて

$$T_x(\Sigma) \cong V_{5.1}^{\oplus a_1} \oplus V_{5.2}^{\oplus a_2} \oplus V_9^{\oplus b} \oplus V_{10}^{\oplus c}$$

と表すことができる．また，表 2 と $0 < |\Sigma^G| < \infty$ という仮定により，G-不動点 x が $x \in F$ であることの必要十分条件が

$$\dim T_x(\Sigma)^{D_8} = \dim T_x(\Sigma)^{S_4} + \dim T_x(\Sigma)^{\mathfrak{S}_4}$$

が成り立つことであることに注意する．$x \in \Sigma^G$ と G の部分群 H に対して，Σ_x^H で x を含む Σ^H の連結成分を表す．また，Σ_F^H で G-不動点 y が F を動いたときの Σ_y^H の非交和を表す．すなわち，

$$\Sigma_F^H = \bigsqcup_{y \in F} \Sigma_y^H$$

である．次の 4 つの場合に分けて，F が偶数個の点から成る集合であることを示す．

(A) ある $x \in F$ に対して，$\dim T_x(\Sigma)^{D_8} = 0$ が成立する．

(B) ある $x \in F$ に対して，$\dim T_x(\Sigma)^{D_8} = \dim T_x(\Sigma)^{S_4} > 0$ が成立する．

(C) ある $x \in F$ に対して，$\dim T_x(\Sigma)^{D_8} = \dim T_x(\Sigma)^{\mathfrak{S}_4} > 0$ が成立する．

(D)　すべての $x \in F$ に対して，$\dim T_x(\Sigma)^{S_4} > 0$ かつ $\dim T_x(\Sigma)^{\mathfrak{S}_4} > 0$ が成立する．

(A) の場合の証明．補題 1.2.2 より，$|\Sigma^{D_8}| = 2$ である．このとき，$F = \Sigma^G$ が成り立つことに注意する．S_4 と $\mathfrak{S}_4$ は $\mathcal{G}$ に属するので，系 1.2.6 より，$|\Sigma^{S_4}| \neq 1$ かつ $|\Sigma^{\mathfrak{S}_4}| \neq 1$ である．よって，

$$\Sigma^{D_8} = \Sigma^{S_4} \cap \Sigma^{\mathfrak{S}_4} = \Sigma^G = F$$

が成立し，F は 2 点から成る集合であることを得る．

(B) の場合の証明．補題 1.2.2 より，Σ^{D_8} は $\mathbb{Z}_2$-ホモロジー球面である．

$$\dim T_x(\Sigma)^{D_8} = \dim T_x(\Sigma)^{S_4} > 0$$

の仮定より，

$$\Sigma^{S_4} \subset \Sigma^{D_8} = \Sigma_x^{S_4}$$

が成り立つので，Σ^{S_4} は Σ^{D_8} と一致する．従って，

$$\Sigma^G = \Sigma^{S_4} \cap \Sigma^{\mathfrak{S}_4} = \Sigma^{D_8} \cap \Sigma^{\mathfrak{S}_4} = \Sigma^{\mathfrak{S}_4}$$

が成立する．$\Sigma^G = \Sigma^{\mathfrak{S}_4}$ は有限集合かつ $\Sigma^{D_8} = \Sigma^{S_4}$ であるので，表 7 より，F と Σ^G が一致することがわかる．$\mathfrak{S}_4$ は $\mathcal{G}_2^2$ に属するので，命題 1.2.5 より，$\chi(\Sigma^{\mathfrak{S}_4})$ は偶数である．従って，$F = \Sigma^G = \Sigma^{\mathfrak{S}_4}$ は偶数個の点から成る集合である．

(C) の場合の証明．(B) の場合の証明における S_4 と $\mathfrak{S}_4$ を入れ替えることによって，全く同様の議論により $F = \Sigma^G = \Sigma^{S_4}$ が偶数個の点から成る集合であることを証明することができる．

(D) の場合の証明．初めに $\Sigma_F^{S_4} \cap \Sigma_F^{\mathfrak{S}_4} = F$ であることを示す．$F \subset \Sigma_F^{S_4} \cap \Sigma_F^{\mathfrak{S}_4}$ であることは明らかであるので，$\Sigma_F^{S_4} \cap \Sigma_F^{\mathfrak{S}_4} \subset F$ であることを示す．そのためには各 $x \in F$ に対して，$\Sigma_x^{S_4} \cap \Sigma_x^{\mathfrak{S}_4} \subset F$ であることを示せば良い．$x \in F$ に対して，接空間加群 $T_x(\Sigma)$ は，ある非負整数 a_1，a_2，b，c を用いて，

$$V_{5,1}^{\oplus a_1} \oplus V_{5,2}^{\oplus a_2} \oplus V_9^{\oplus b} \oplus V_{10}^{\oplus c}$$

と表せることを思い出す．n_1，n_2，n_3，n_4，n_5 を以下の等式

$$\begin{aligned}
\dim \Sigma \quad &= 5a_1 + 5a_2 + 9b + 10c &&= 5n_1 + 5n_2 + 8n_3 + 9n_4 + 10n_5, \\
\dim \Sigma^{C_2} &= 3a_1 + 3a_2 + 5b + 4c &&= 3n_1 + 3n_2 + 4n_3 + 5n_4 + 4n_5, \\
\dim \Sigma^{D_8} &= a_1 + a_2 + 2b &&= n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4, \\
\dim \Sigma_x^{S_4} &= a_1 + b &&= n_1 + n_4, \\
\dim \Sigma_x^{\mathfrak{S}_4} &= a_2 + b &&= n_2 + n_4
\end{aligned}$$

を満たす非負整数とする．(D) の場合において，

$$\Sigma,\ \Sigma^{C_2},\ \Sigma^{D_8},\ \Sigma_x^{S_4},\ \Sigma_x^{\mathfrak{S}_4}$$

は連結であり，正方行列

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

の行列式は 0 ではないので，非負整数 n_1，n_2，n_3，n_4，n_5 は一意に定まる．このことは任意の $y \in \Sigma_x^{S_4} \cap \Sigma_x^{\mathfrak{S}_4}$ に対して，$T_y(\Sigma)$ と $T_x(\Sigma)$ が同型であることを意味する．従って，$\Sigma_x^{S_4} \cap \Sigma_x^{\mathfrak{S}_4} \subset F$ であることがわかる．(D) の場合において，$\Sigma_F^{S_4}$ と $\Sigma_F^{\mathfrak{S}_4}$ の各連結成分は正の次元であり，$\Sigma_F^{S_4}$ と $\Sigma_F^{\mathfrak{S}_4}$ は Σ^{D_8} において有限個の点から成る集合 $\Sigma_F^{S_4} \cap \Sigma_F^{\mathfrak{S}_4} = F$ で横断的に交わる．このとき，命題 1.2.11 より，$\Sigma_F^{S_4} \cap \Sigma_F^{\mathfrak{S}_4} = F$ は偶数個の点から成る集合である． □

コメント 1. 補題 1.4.1 の証明は [Tam20, Lemma 3.1] に基づいて証明している．[1] の初稿では，(B) の場合の証明に過ちがあることをレフェリーに指摘していただいた．出版時，訂正した証明が上記のものである．

系 1.4.2. (cf. [1, Corollary 3.2]) Σ 上の G の *odd-fixed-point action* が存在するならば，接空間加群 $T_x(\Sigma)$ が 8 次元の既約な $\mathbb{R}[G]$-加群を含むような $x \in \Sigma^G$ が奇数個存在する．

証明．仮定より $|\Sigma^G| \equiv 1 \bmod 2$ である．特に，Σ^G は空でない有限集合であるので，各 G-不動点上の接空間加群は

$$V_{5.1}, V_{5.2}, V_{8.1}, V_{8.2}, V_9, V_{10}$$

により生成される．補題 1.4.1 によると，接空間加群が

$$V_{5.1}, V_{5.2}, V_9, V_{10}$$

により生成される G-不動点が存在するならばその個数は偶数であるので，$V_{8.1}$ あるいは $V_{8.2}$ を接空間加群に部分加群として含むような G-不動点は奇数個存在することが従う． □

次の系 1.4.3 は命題 1.2.7 と系 1.4.2 を併せることにより直ちに従う．

系 1.4.3. (cf. [1, Corollary 3.3]) X を効果的な G-作用をもつホモロジー球面とする．X 上の G の *odd-fixed-point action* が存在するならば，各 $x \in X^G$ 上の接空間加群 $T_x(X)$ は 8 次元の既約な $\mathbb{R}[G]$-加群を含まなければならない．

定理 1.4.4. (cf. [1, Theorem 3.4]) Σ 上の G の *odd-fixed-point action* が存在するならば，Σ の次元は $[0..7] \cup [9..12] \cup \{14, 15\} \cup \{19, 20\}$ に属さない．

証明．$T = [0..7] \cup [9..12] \cup \{14, 15\} \cup \{19, 20\}$ とおく．このとき，T は非負整数の集合

$$\mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus \{\, 5k + 8l + 9m + 10n \,|\, (k, l, m, n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \,\}$$

と一致することに注意する．仮定より $|\Sigma^G| \equiv 1 \bmod 2$ であるので，各 G-不動点上の接空間加群は

$$V_{5.1}, V_{5.2}, V_{8.1}, V_{8.2}, V_9, V_{10}$$

により生成される．Σ の次元が T に属することは，全ての G-不動点上の接空間加群が 8 次元の既約な $\mathbb{R}[G]$-部分加群を含まないことを意味する．一方で，系 1.4.2 によると $|\Sigma^G| \equiv 1 \bmod 2$ ならば，ある G-不動点での接空間加群は 8 次元の既約な $\mathbb{R}[G]$-部分加群を含まなければならないので，Σ の次元は T には属さないことがわかる． □

先程の Σ 上の G の odd-fixed-point action に関する結果を応用して，Σ 上の $\widetilde{G}$ の odd-fixed-point action について議論する．

既約な $\mathbb{R}[\widetilde{G}]$-加群は同型を除いて 13 個存在し，それらを

$$\mathbb{R}_{\widetilde{G}},\ \widetilde{V}_{5.1},\ \widetilde{V}_{5.2},\ \widetilde{V}_{8.1},\ \widetilde{V}_{8.2},\ \widetilde{V}_9,\ \widetilde{V}_{10},\ W_{8.1},\ W_{8.2},\ W_{16.1},\ W_{16.2},\ W_{20.1},\ W_{20.2}$$

で表す．ここで，

$$\dim \mathbb{R}_{\widetilde{G}} = 1,\ \dim \widetilde{V}_{k.i} = \dim \widetilde{V}_k = \dim W_{k.i} = k$$

である．中心 $Z(\widetilde{G})$ に対して，

$$\widetilde{V}_*^{Z(\widetilde{G})} \cong V_* \text{ かつ } W_*^{Z(\widetilde{G})} = \{0\}$$

が成立する．ここで，V_* は $\widetilde{V}_*$ に対応する既約な $\mathbb{R}[G]$-加群を表している．$\mathbb{R}[\widetilde{G}]$-加群 $\widetilde{V}$ が忠実であるならば，$\widetilde{V}$ は

$$W_{8.1},\ W_{8.2},\ W_{16.1},\ W_{16.2},\ W_{20.1},\ W_{20.2}$$

のいずれかを部分加群として含まなければならないことに注意する．

命題 1.4.5. (cf. [1, Proposition 3.5]) Σ 上の $\widetilde{G}$ の *odd-fixed-point action* が存在するならば，接空間加群 $T_x(\Sigma)$ が $\widetilde{V}_{8.1}$ あるいは $\widetilde{V}_{8.2}$ を含むような $x \in \Sigma^{\widetilde{G}}$ が奇数個存在する．

証明．中心 $Z(\widetilde{G})$ を Z とおくと，$\widetilde{V}_{8.i}^Z \cong V_{8.i}$ $(i = 1, 2)$ が成立する．さらに，仮定より $\mathbb{Z}_2$-ホモロジー球面 Σ^Z 上の G の odd-fixed-point action が存在する．系 1.4.2 によると，接空間加群 $T_x(\Sigma^Z)$ が $V_{8.1}$ あるいは $V_{8.2}$ を含むような $x \in (\Sigma^Z)^G$ が奇数個存在する．$\Sigma^{\widetilde{G}} = (\Sigma^Z)^G$ かつ任意の $y \in \Sigma^{\widetilde{G}}$ に対して，$T_y(\Sigma^Z)$ は $T_y(\Sigma)^Z$ と $\mathbb{R}[G]$-加群として同型であるので，接空間加群 $T_y(\Sigma)$ が $\widetilde{V}_{8.1}$ あるいは $\widetilde{V}_{8.2}$ を含むような $y \in \Sigma^{\widetilde{G}}$ は奇数個存在する． □

定理 1.4.6. (cf. [1, Theorem 3.6]) Σ 上の $\widetilde{G}$ の効果的な *odd-fixed-point action* が存在するならば，Σ の次元は $[0..15] \cup [17..20] \cup \{22, 23\} \cup \{27\}$ に属さない．

証明. $T = [0..15] \cup [17..20] \cup \{22, 23\} \cup \{27\}$ とおく．このとき，T は非負整数の集合

$$\mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus \bigcup_{\alpha=8,16,20} \{\, 5i + 8j + 9k + 10l + \alpha m \mid (i,j,k,l,m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{N} \,\}$$

と一致することに注意する．仮定より，$|\Sigma^{\widetilde{G}}| \equiv 1 \bmod 2$ であるので，命題 1.4.5 より，接空間加群 $T_x(\Sigma)$ が $\widetilde{V}_{8.1}$ あるいは $\widetilde{V}_{8.2}$ を含むような $x \in \Sigma^{\widetilde{G}}$ が奇数個存在する．さらに，Σ 上の $\widetilde{G}$-作用は効果的であるので，各 $y \in \Sigma^{\widetilde{G}}$ 上の接空間加群 $T_y(\Sigma)$ は

$$W_{8.1}, W_{8.2}, W_{16.1}, W_{16.2}, W_{20.1}, W_{20.2}$$

の少なくとも一つを含まなければならない．Σ の次元が T に属するならば，全ての $\widetilde{G}$-不動点上の接空間加群が 8 次元の既約な $\mathbb{R}[\widetilde{G}]$-加群を含まないか忠実でないかのいずれかが成立することになる．これは Σ 上の $\widetilde{G}$ の効果的な odd-fixed-point action が存在するという仮定に反するので，Σ の次元は T には属さない． □

1.5 ホモロジー球面上の S_6, $PGL(2,9)$, M_{10}, $\mathrm{Aut}(A_6)$ の作用

この節を通して，G は $\mathrm{Aut}(A_6)$ とする．G は S_6，$PGL(2,9)$，M_{10} に同型な指数 2 の部分群をもち，それらの部分群に含まれる指数 4 の部分群として A_6 と同型な部分群をもつ．そこで，S_6 に同型な G の部分群を H_1，$PGL(2,9)$ に同型な G の部分群を H_2，M_{10} に同型な G の部分群を H_3，A_6 に同型な G の部分群を L でそれぞれ表す．Σ は，G，H_1，H_2，H_3 のいずれかの作用をもつホモロジー球面とする．

補題 1.5.1. (cf. [1, Corollary 4.2]) K を G，H_1，H_2．H_3 のいずれかとする．このとき，Σ^K が奇数個の点から成る集合であることと，Σ^L が奇数個の点から成る集合であることは同値である．

証明. L と H_3 が命題 1.2.7 の条件 (A) と (B) を満たすことに気をつけると，系 1.2.10 を 1 あるいは 2 回適用することにより，$|\Sigma^K| \equiv 1 \bmod 2$ と $|\Sigma^L| \equiv 1 \bmod 2$ が同値であることが従う． □

K を G，H_1，H_2．H_3 のいずれかとする．補題 1.5.1 と系 1.4.3 より，Σ 上の K の odd-fixed-point action が存在するならば，各 $x \in \Sigma^G$ に対して，$\mathrm{Res}^K_L T_x(\Sigma)$ は 8 次元の既約な $\mathbb{R}[L]$-部分加群を含む必要がある．そこで，以下に既約な $\mathbb{R}[K]$-加群 U_* の L への制限 $\mathrm{Res}^K_L U_*$ を既約な $\mathbb{R}[L]$-加群に分解したときの対応の表を記載する．

U_*	$\mathbb{R}_{H_1}$	$\mathbb{R}_{\pm,H_1}$	$U_{5.i(i=1,2)}$	$U_{5.j(j=3,4)}$	$U_{9.i(i=1,2)}$	$U_{10.i(i=1,2)}$	V_{16}
$\mathrm{Res}^{H_1}_L U_*$	$\mathbb{R}_L$	$\mathbb{R}_L$	$V_{5.1}$	$V_{5.2}$	V_9	V_{10}	$V_{8.1} \oplus V_{8.2}$

表 3: 既約な $\mathbb{R}[H_1]$-加群の L への制限

U_*	$\mathbb{R}_{H_2}$	$\mathbb{R}_{\pm,H_2}$	$U_{8.i(i=1,2)}$	$U_{8.j(j=3,4)}$	$U_{9.i(i=1,2)}$	$U_{10.i(i=1,2)}$	$U_{10.3}$
$\mathrm{Res}_L^{H_2} U_*$	$\mathbb{R}_L$	$\mathbb{R}_L$	$V_{8.1}$	$V_{8.2}$	V_9	V_{10}	$V_{5.1} \oplus V_{5.2}$

表 4: 既約な $\mathbb{R}[H_2]$-加群の L への制限

U_*	$\mathbb{R}_{H_3}$	$\mathbb{R}_{\pm,H_3}$	$U_{9.i(i=1,2)}$	U_{10}	U_{16}	$U_{20.i(i=1,2)}$
$\mathrm{Res}_L^{H_3} U_*$	$\mathbb{R}_L$	$\mathbb{R}_L$	V_9	$V_{5.1} \oplus U_{5.2}$	$V_{8.1} \oplus U_{8.2}$	$V_{10}^{\oplus 2}$

表 5: 既約な $\mathbb{R}[H_3]$-加群の L への制限

U_*	$\mathbb{R}_{k(k=1,2,3,4)}$	$U_{9.k(k=1,2,3,4)}$	$U_{10.i(i=1,2)}$	$U_{16.i(i=1,2)}$	U_{20}
$\mathrm{Res}_L^{G} U_*$	$\mathbb{R}_L$	V_9	$V_{5.1} \oplus U_{5.2}$	$V_{8.1} \oplus U_{8.2}$	$V_{10}^{\oplus 2}$

表 6: 既約な $\mathbb{R}[G]$-加群の L への制限

表 3, 4, 5, 6 において，V_k 及び $V_{k.i}$ の表記は節 1.4 での既約な $\mathbb{R}[L]$-加群の表記を用いている．非負整数の集合 T_{H_1}，T_{H_2}，T_{H_3}，T_G をそれぞれ以下のように定める:

$$\begin{aligned}
T_{H_1} &= [0..15] \cup [17..20] \cup [22..24] \cup [27..29] \cup \{33\} \cup \{38\} \\
&= \mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus \{\ 5a + 9b + 10c + 16d \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{N}\ \}, \\
T_{H_2} &= [0..7] \cup [9..15] \cup [19..23] \cup [29..31] \cup \{39\} \\
&= \mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus \{\ 8a + 9b + 10c \mid (a,b,c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}\ \}, \\
T_{H_3} &= [0..15] \cup [17..24] \cup [27..31] \cup \{33\} \cup [37..40] \cup \{47\} \cup \{49\} \\
&= \mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus \{\ 9a + 10b + 16c + 20d \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}\ \}, \\
T_G &= [0..15] \cup [17..24] \cup [27..31] \cup \{33\} \cup [37..40] \cup \{47\} \cup \{49\} \\
&= \mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus \{\ 9a + 10b + 16c + 20d \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}\ \}.
\end{aligned}$$

H_1，H_2，H_3，G の既約な実加群の L への制限の表と T_{H_1}，T_{H_2}，T_{H_3}，T_G の定め方より次の定理を得ることができる．

定理 1.5.2. (cf. [1, Theorem 4.3]) K を H_1，H_2，H_3，G のいずれかとする．Σ 上の K の *odd-fixed-point action* が存在するならば，Σ の次元は T_K に属さない．

証明. 仮定より $|\Sigma^K| \equiv 1 \bmod 2$ であるので，補題 1.5.1 と系 1.4.3 より，各 $x \in \Sigma^K$ 上の接空間加群の L への制限 $\mathrm{Res}_L^K T_x(\Sigma)$ は 8 次元の既約な $\mathbb{R}[L]$-加群を含まなければならない．しかしながら，もし Σ の次元が T_K に属するならば，すべての $y \in \Sigma^K$ に対して，$\mathrm{Res}_L^K T_y(\Sigma)$ は 8 次元の既約な $\mathbb{R}[L]$-部分加群を含まない．従って，Σ の次元は T_K に属さないことがわかる． □

1.6 6 次元以下のホモロジー球面上の A_5-作用の不動点集合について

この節では，6 次元以下のホモロジー球面上の A_5-作用による不動点集合ついて調べることが目標である．この節を通して，G は有限群，Σ は G-作用をもつホモロジー n-球面とする．さらに，Σ 上の G-作用は効果的であり，Σ^G は空ではないと仮定する．特に記載がない限りは，Σ は A_5-作用をもっていると仮定する．

この節で必要となる有限群 A_5 に関する情報を以下に記載する．A_5 は共役なものを除くと

$$E,\, C_2,\, C_3,\, D_4,\, C_5,\, D_6,\, D_{10},\, A_4, A_5$$

の 9 個の部分群をもつ．既約な $\mathbb{R}[A_5]$-加群は同型を除いて 5 個存在し，それらを

$$\mathbb{R}_{A_5}, U_{3.1}, U_{3.2}, U_4, U_5$$

で表す．ここで，

$$\dim \mathbb{R}_{A_5} = 1,\, \dim U_{k.l} = \dim U_k = k$$

である．

Σ の A_5-作用による不動点集合について調べるためには，不動点上の接空間加群を調べる必要がある．そのために，既約な $\mathbb{R}[A_5]$-加群 V の A_5 の部分群 H による不動点集合の次元 $\dim V^H$ の情報が必要である．以下の表 7 にその情報を記載してある．表 7 は [27, Table 1.1] から引用している．

	C_2	C_3	C_5	D_4	D_6	D_{10}	A_4	A_5
$\mathbb{R}_{A_5}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$U_{3.1}$	1	1	1	0	0	0	0	0
$U_{3.2}$	1	1	1	0	0	0	0	0
U_4	2	2	0	1	1	0	1	0
U_5	3	1	1	2	1	1	0	0

表 7: 既約な $\mathbb{R}[A_5]$-加群の不動点集合の次元の表

命題 1.6.1. M を効果的な G-作用をもつ $\mathbb{Z}_2$-ホモロジー 3-球面とする．$\chi(\Sigma^G)$ が奇数ならば，G は A_5 と同型であり，$|M^G| = 1$ である．特に，M^{A_5} は 1 点あるいは 2 点集合のいずれかである．

証明．V を $x \in M^G$ 上の接空間加群とする．V は忠実な 3 次元の $\mathbb{R}[G]$-加群であるので，G は $O(3)$ のある有限部分群と同型である．初めに，G が $SO(3)$ の部分群である場合を考える．このとき，G は

$$C_n,\ D_{2n},\ A_4,\ S_4,\ A_5$$

のいずれかに同型である．G が $SO(3)$ の可解部分群ならば，G は $\mathcal{G}_2^2$ に属するので，命題 1.2.5 の主張により，$\chi(M^G)$ は偶数である．従って，$\chi(M^G)$ が奇数であるならば，G は A_5

と同型であり，V は 3 次元の既約な $\mathbb{R}[G]$-加群でなければならない．表 7 より，$\dim V^{D_4} = 0$ であるので，補題 1.2.2 を用いると M^{D_4} は S^0 と微分同相である．$\chi(M^G)$ が奇数という仮定により，$|M^G| = 1$ でなければならない．

次に G が $SO(3)$ に含まれない $O(3)$ の部分群である場合を考える．このとき，G の正規部分群 Z で位数 2 のものが存在する．補題 1.2.2 より，M^Z はある 2 次元以下の球面と微分同相であるので，$M^G = (M^Z)^{G/Z}$ もある 2 次元以下の球面に微分同相であることが補題 1.2.3 より従う．以上より，$\chi(\Sigma^G)$ が奇数ならば，G は A_5 と同型であり，$|M^G| = 1$ であることが従う． □

命題 1.6.2. Σ の次元が 4 ならば，Σ^{A_5} は S^0 か S^1 のいずれかと同型である．

証明．V を $x \in \Sigma^{A_5}$ 上の接空間加群とする．表 7 より，V は U_4 あるいは $\mathbb{R}_{A_5} \oplus U_{3.i}$ のいずれかに同型である．まず初めに，V が U_4 と同型である場合を考える．表 7 より，$\dim V^{C_5} = 0$ であるので，$|\Sigma^{C_5}| = 2$ である．従って，$|\Sigma^{A_5}| = 1$ あるいは 2 のいずれかである．$\Sigma^{A_5} = \{x\}$ であると仮定する．x を含むような Σ^{D_6} の連結成分を $\Sigma_x^{D_6}$ で表す．このとき，$\Sigma_x^{D_6}$ と Σ^{D_4} はそれぞれ 1 次元の連結な閉多様体であり，2 次元の球面 Σ^{C_2} において，1 点集合 $\{x\}$ で横断的に交わる．しかしながら，命題 1.2.11 は $\Sigma_x^{D_6} \cap \Sigma^{D_4} = \{x\}$ に対する矛盾を与える．よって，$|\Sigma^{A_5}| = 2$ であることが従う．

次に，V が $\mathbb{R}_{A_5} \oplus U_{3.1}$ である場合を考える．この場合，$\dim V^{A_5} = \Sigma^{D_4} = 1$ であるので，補題 1.2.2 より，Σ^{A_5} は S^1 と微分同相であることがわかる． □

命題 1.6.3. Σ の次元が 5 ならば，Σ^{A_5} はある 2 次元以下の球面と微分同相である．

証明．V を $x \in \Sigma^{A_5}$ 上の接空間加群とする．表 7 より，V は $\mathbb{R}_{A_5}^{\oplus 2} \oplus U_{3.i}$，$\mathbb{R}_{A_5} \oplus U_4$ あるいは U_5 のいずれかに同型である．それぞれの場合に関して，Σ^{A_5} がある 2 次元以下の球面と微分同相となることを示そう．

$V \cong \mathbb{R}_{A_5}^{\oplus 2} \oplus U_{3.i}$ である場合．$\dim V^{D_4} = \dim V^{A_5} = 2$ であるので，補題 1.2.2 より，$\Sigma^{A_5} = \Sigma^{D_4}$ は 2 次元球面と微分同相である．

$V \cong \mathbb{R}_{A_5} \oplus U_4$ である場合．$\dim V^{C_5} = \dim V^{A_5} = 1$ であるので，補題 1.2.2 より，$\Sigma^{A_5} = \Sigma^{C_5}$ は 1 次元球面と微分同相である．

$V \cong U_5$ である場合．$\dim V^{D_4} = 2$ であるので，補題 1.2.2 より，Σ^{D_4} は 2 次元球面と微分同相であり，A_4/D_4-作用をもつ．補題 1.2.3 と $\dim V^{A_4} = 0$ を併せると，$|\Sigma^{A_4}| = 2$ であることが従うので，$|\Sigma^{A_5}| = 1$ あるいは 2 である．$\Sigma^{A_5} = \{x\}$ であると仮定する．$\Sigma_x^{D_6}$ で Σ^{D_6} の x を含む連結成分を表すと，$\Sigma_x^{D_6}$ は 1 次元の球面と微分同相であり，$\Sigma_x^{D_6} \cap \Sigma^{D_4} = \{x\}$ を満たす．このとき，Σ^{D_4} と $\Sigma_x^{D_6}$ は $\mathbb{Z}_2$-ホモロジー 3-球面 Σ^{C_2} において，1 点集合 $\{x\}$ で横断的に交わっている．しかしながら，命題 1.2.11 は $\Sigma^{D_4} \cap \Sigma_x^{D_6} = \{x\}$ であることの矛盾を与える．従って，$|\Sigma^{A_5}| = 2$ でなければならない．以上より，全ての場合において，Σ^{A_5} はある 2 次元以下の球面と微分同相であることを得た． □

命題 1.6.4. Σ の次元が 6 次元ならば，次の 3 つのいずれかが成立する．

- Σ^{A_5} は 3 次元以下の $\mathbb{Z}_2$-ホモロジー 3-球面である．

- Σ^{A_5} は幾らかの S^1 の非交和である．

- Σ^{A_5} は 1 点集合である．

特に，Σ 上の A_5-作用が 2-*pseudofree* であるならば，$|\Sigma^{A_5}| = 1$ あるいは 2 である．

証明．V を $x \in \Sigma^{A_5}$ 上の接空間加群とする．表 7 より，V は次のいずれかの 6 次元の $\mathbb{R}[A_5]$-加群に同型である．

$$\mathbb{R}_{A_5}^{\oplus 3} \oplus U_{3.i},\ \mathbb{R}_{A_5}^{\oplus 2} \oplus U_4,\ \mathbb{R}_{A_5} \oplus U_5,\ U_{3.i} \oplus U_{3.j}.$$

ここで，Σ 上の A_5-作用が 2-pseudofree であるならば，V は $U_{3.i} \oplus U_{3.j}$ に同型でなければならないことに注意する．

$V \cong \mathbb{R}_{A_5}^{\oplus 3} \oplus U_{3.i}$ である場合．$\dim V^{A_5} = \dim V^{D_4} = 3$ であるので，補題 1.2.2 より，Σ^{A_5} は $\mathbb{Z}_2$-ホモロジー 3-球面である．

$V \cong \mathbb{R}_{A_5}^{\oplus 2} \oplus U_4$ である場合．$\dim V^{A_5} = \dim V^{C_5} = 2$ であるので，補題 1.2.2 より，Σ^{A_5} は 2 次元球面と微分同相である．

$V \cong \mathbb{R}_{A_5} \oplus U_5$ である場合．命題 1.2.7 より，任意の $y \in \Sigma^{A_5}$ の対して，$V \cong T_y(\Sigma)$ である．連結な 1 次元の閉多様体は S^1 と微分同相であるので，Σ^{A_5} は幾らかの S^1 の非交和である．

$V \cong U_{3.i} \oplus U_{3.j}$ である場合．$\dim V^{D_4} = 0$ であるので，補題 1.2.2 より，$|\Sigma^{D_4}| = 2$ である．従って，$|\Sigma^{A_5}| = 1$ あるいは 2 である． □

この節の最後に A_5 を正規部分群にもつ有限群 G のホモロジー 6-球面上の odd-fixed-point action について論じる．そのために 5 次対称群 S_5 に関する情報を以下に記載する．

既約な $\mathbb{R}[S_5]$-加群は同型を除いて 7 個存在し，それらを

$$\mathbb{R}_{S_5}, \mathbb{R}_{\pm,S_5}, V_{4.1}, V_{4.2}, V_{5.1}, V_{5.2}, V_6$$

で表す．ここで，

$$\dim \mathbb{R}_{S_5} = \dim \mathbb{R}_{\pm,S_5} = 1, \dim V_{k.l} = \dim V_k = k$$

である．それらの既約 $\mathbb{R}[S_5]$-加群の A_5 への制限は，[29, Chapter 4, Theorem 4.1, p.5] によると，

$$\mathrm{Res}_{A_5}^{S_5} \mathbb{R}_{S_5} \cong \mathrm{Res}_{A_5}^{S_5} \mathbb{R}_{\pm,S_5} \cong \mathbb{R}_{A_5}, \mathrm{Res}_{A_5}^{S_5} V_{4.1} \cong \mathrm{Res}_{A_5}^{S_5} V_{4.2} \cong U_4,$$

$$\mathrm{Res}_{A_5}^{S_5} V_{5.1} \cong \mathrm{Res}_{A_5}^{S_5} V_{5.2} \cong U_5\ \mathrm{Res}_{A_5}^{S_5} V_6 \cong U_{3.1} \oplus U_{3.2}.$$

で与えられる．

位数 2 の S_5 部分群で A_5 に含まれないものを Z_2 で表し，C_2，C_3，C_5 で A_5 に含まれる S_5 の非自明な巡回部分群を表す．ここで，S_5 は共役なものを除くと，Z_2，C_2，C_3，C_5 を非

自明な巡回部分群として含むことに注意する．V_6 は $\mathbb{R}[A_5]$-加群 $U_{3.1}$ から誘導される，つまり，$V_6 \cong \mathbb{R}[S_5] \otimes_{\mathbb{R}[A_5]} U_{3.1}$ である．従って，S_5 の非自明な巡回部分群による V_6 の不動点集合の次元の表 8 を得ることができる．

	Z_2	C_2	C_3	C_5
V_6	3	2	2	2

表 8: 非自明な巡回群による V_6 の不動点集合の次元の表

定理 1.6.5. (cf. [2, 命題 3.5]) F を有限群，$G = A_5 \star F$ とし，Σ を効果的な G-作用をもつホモロジー 6-球面とする．Σ 上の G-作用は Σ の向きを保ち，$\chi(\Sigma^G)$ が奇数であると仮定する．このとき，G は A_5 と同型であり，Σ 上の G-作用は 2-*pseudofree* な *one-fixed-point action* である．さらに，その唯一の不動点上の接空間加群は 3 次元の既約な $\mathbb{R}[A_5]$-加群の 2 つの直和と同型である．

証明．命題 1.6.4 より，$\chi(\Sigma^G)$ が奇数となり得る可能性があるのは，Σ^{A_5} が $\mathbb{Z}_2$-ホモロジー 3-球面である場合か，$|\Sigma^{A_5}| = 1$ である場合のいずれかである．これらの場合において，$x \in \Sigma^{A_5}$ 上の接空間加群 V の A_5 への制限 $\mathrm{Res}^G_{A_5} V$ はそれぞれ $\mathbb{R}^{\oplus 3}_{A_5} \oplus U_{3.i}$ あるいは $U_{3.i} \oplus U_{3.j}$ に同型であることに注意する．まず初めに Σ^{A_5} が $\mathbb{Z}_2$-ホモロジー 3-球面である場合に $\chi(\Sigma^G)$ が奇数とはなり得ないことを示そう．$\rho : G \to SO(V)$ を x 上の接空間表現とすると，A_5 は G の正規部分群であるので，ρ は 2 つの部分表現

$$\rho^{A_5} : G \to O(V^{A_5}) \text{ と } \rho_{A_5} : G \to O(V_{A_5})$$

に分解することができる．ここで，$V = V^{A_5} \oplus V_{A_5}$ かつ $\dim V^{A_5} = \dim V_{A_5} = 3$ を満たす．$H = \ker \rho^{A_5}$ とすると，$A_5 \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ が成立する．さらに，$\rho^{A_5}|_H$ は自明であり，$\rho|_H$ は忠実かつ向きを保つので，$\rho_{A_5}|_H$ は忠実かつ向きを保つ．従って，H は $SO(3)$ のある有限部分群と同型である．$SO(3)$ の有限部分群の中で A_5 は極大であるので，H は A_5 と一致し，V^{A_5} は 3 次元の忠実な $\mathbb{R}[F]$-加群であることがわかる．$\Sigma^G = (\Sigma^{A_5})^F$ のオイラー標数が奇数であるという仮定より，命題 1.6.1 を用いると，F は A_5 と同型であり，$(\Sigma^{A_5})^F = \Sigma^G = \{x\}$ でなければならないことが判明する．そこで，F を F_{A_5} で表すことにすると，$G = A_5 \star F_{A_5}$ は $A_5 \times F_{A_5}$ と同型である．さらに，V は 6 次元の忠実な $\mathbb{R}[G]$-加群であるので，V は

$$U_{3.i} \otimes \mathbb{R}'_{A_5} \oplus \mathbb{R}_{A_5} \otimes U'_{3.j}$$

と同型でなけらばならない．ここで，$\mathbb{R}'_{A_5}$ は 1 次元の $\mathbb{R}[F_{A_5}]$-加群であり，$U'_{3.j}$ は 3 次元の既約な $\mathbb{R}[F_{A_5}]$-加群である．従って，Σ^{A_5} と $\Sigma^{F_{A_5}}$ は共に $\mathbb{Z}_2$-ホモロジー 3-球面であり，それらは唯一の不動点 x で Σ において横断的に交わっていることがわかる．しかしながら，命題 1.2.11 の主張によると，$\Sigma^{A_5} \cap \Sigma^{F_{A_5}} = \{x\}$ とはなり得ないことが従う．よって，Σ^{A_5} が $\mathbb{Z}_2$-ホモロジー 3-球面である場合は，$\chi(\Sigma^G)$ は奇数とはなり得ない．

次に，$|\Sigma^{A_5}| = 1$ である場合に G が A_5 と同型であることを示す．G が A_5 と同型であることを示すためには任意の素数 p に対して，A_5 が $[G : A_5] = p$ となる有限群 G に拡張されないことを示せれば良い．A_5 の外部自己同型群 $\mathrm{Out}(A_5)$ は位数 2 であるので，G は $A_5 \times C_p$ あるいは S_5 のいずれかと同型である．最初に G が $A_5 \times C_p$ と同型である場合を考える．V 上の G-作用は効果的かつ向きを保つので，V は 3 次元の既約な $\mathbb{R}[A_5]$-加群 $U_{3.i}$ と 2 次元の忠実な $\mathbb{R}[C_p]$-加群 W とのテンソル積 $U_{3.i} \otimes W$ により与えられる．このとき，V^{C_p} は自明であるので，補題 1.2.2 より Σ^{C_p} は S^0 と微分同相であり，A_5-作用をもつ．従って，$\Sigma^G = (\Sigma^{C_p})^{A_5}$ は S^0 と微分同相であり，$\chi(\Sigma^G) \equiv 1 \bmod 2$ である仮定に矛盾する．次に G が S_5 に同型である場合を考える．このとき，V は V_6 と同型であることに注意する．表 8 によると，$\dim V_6^{Z_2} = 3$ であり，これは Σ 上の G-作用が Σ の向きを保たないことを意味し，Σ 上の G-作用が Σ の向きを保つという仮定に矛盾する．以上より，G は A_5 と同型であり，唯一の G-不動点上の接空間加群は，3 次元の既約な $\mathbb{R}[A_5]$-加群の 2 つの直和と同型であることを得ることができる．Σ 上の G-作用が 2-pseudofree であることを示すためには，V 上の G-作用が 2-pseudofree であることを示せば良い．表 7 によると，すべての A_5 の非自明な巡回部分群 C に対して，$\dim V^C \leq 2$ が成立するので，V 上の G-作用は 2-pseudofree であることがわかる． □

定理 1.6.6. (cf. [2, 系 3.6]) F を有限群，$G = A_5 \star F$ とし，Σ を効果的な G-作用をもつホモロジー 6-球面とする．Σ 上の G-作用は Σ の向きを保たず，$\chi(\Sigma^G)$ は奇数であると仮定する．このとき，G は $A_5 \times C_2$ あるいは S_5 と同型であり，Σ 上の G-作用は 3-*pseudofree* な *one-fixed-point action* である．

証明．Σ 上の G-作用は Σ の向きを保たないので，G の指数 2 の部分群 L であり，Σ 上の L-作用が Σ の向きを保つものが存在する．補題 1.2.1 より，$\chi(\Sigma^L)$ は奇数であり，ある有限群 F' を用いて，L は $A_5 \star F'$ と表すことができる．定理 1.6.5 によると，L は A_5 と同型であり，$\Sigma^L = \{x\}$ でなければならないので，G は S_5 あるいは $A_5 \times Z$ と同型であり，$\Sigma^G = \{x\}$ である．ここで，Z は位数 2 の群である．初めに G が S_5 と同型である場合に Σ 上の G-作用が 3-pseudofree であることを示す．定理 1.6.5 より，$T_x(\Sigma)$ は V_6 と同型であることに注意する．表 8 より，非自明な G の巡回部分群 C に対して，$\dim V_6^C \leq 3$ であるので，Σ 上の G-作用は 3-pseudofree である．次に G が $A_5 \times Z$ と同型である場合に Σ 上の G-作用が 3-pseudofree であることを示す．このとき，$T_x(\Sigma)$ は

$$V = U_{3.i} \otimes \mathbb{R}_Z \oplus U_{3.j} \otimes \mathbb{R}_{\pm}$$

と同型でなければならないことが容易にわかる．ここで，$\mathbb{R}_Z$ は 1 次元の自明な $\mathbb{R}[Z]$-加群，$\mathbb{R}_{\pm}$ は 1 次元の非自明な $\mathbb{R}[Z]$-加群を表している．$\mathrm{Res}^G_{A_5} V \cong U_{3.i} \oplus U_{3.j}$ より，任意の非自明な A_5 の部分群 H に対して，$\dim V^H \leq 2$ が成立し，$\dim V^Z = 3$ であるので，Σ 上の $A_5 \times Z$-作用は 3-pseudofree である． □

1.7 有限可解群のホモロジー 6-球面上の作用

この節での目標は，有限可解群 G がホモロジー 6-球面 Σ に作用するならば，オイラー標数 $\chi(\Sigma^G)$ が偶数になることを示すことである．この節の主張は，[2, 定理 1.4] にて記載されているものである．この節を通して，G は有限可解群，Σ は効果的な G-作用をもつホモロジー 6-球面を表し，Σ^G は空でないとする．

補題 1.7.1. (cf. [2, 補題 2.2]) Σ 上の G-作用は Σ の向き保つと仮定する．$F(G)$ が巡回群でないならば，$\chi(\Sigma^G)$ は偶数である．

証明. V を $x \in \Sigma^G$ 上の接空間加群とする．$F(G)$ は巡回群でないので，$F(G)$ のある p-Sylow 部分群 P で巡回群でないものが存在する．$\dim V^P \leq 2$ であるならば，補題 1.2.2 より，Σ^P は 2 次元以下のある球面と微分同相であり，G/P-作用をもつ．この場合，補題 1.2.3 より，Σ^G もある 2 次元以下の球面と微分同相であるので，$\chi(\Sigma^G)$ は偶数である．P が奇素数 p 冪位数で巡回群でない場合には，$\dim V^P \leq 2$ が成立する．P が巡回群でない 2-群かつ $\dim V^P = 3$ である場合を考える．このとき，Σ^P は $\mathbb{Z}_2$-ホモロジー 3-球面であり，G/P-作用をもつ．G/P は可解群であるので，$\chi(\Sigma^G)$ が偶数であることが命題 1.6.1 より従う． □

補題 1.7.2. Z を位数が 1 あるいは 2 である中心 $Z(G)$ の部分群とする．Σ 上の G-作用は Σ の向きを保つと仮定する．このとき，以下の 2 つが成立する．

(1) $F(G/Z)$ が巡回群でないならば，$\chi(\Sigma^G)$ は偶数である．

(2) G/Z が 2-群の冪零群による拡大ならば，$\chi(\Sigma^G)$ は偶数である．

証明. まず $|Z| = 1$ である場合において，(1) と (2) の主張を示す．(1) の主張は補題 1.7.1 より直ちに従う．(2) の場合を考える．G は 2-群 P_2 と冪零群 N を用いて，$G = N \star P_2$ と表すことができる．このとき，N は G の Fitting 部分群であるとして良い．$\chi(\Sigma^G)$ が奇数であると仮定する．補題 1.7.1 より，N は巡回群であるため，G は $\mathcal{G}_2^2$ に属する．このとき，命題 1.2.5 は $\chi(\Sigma^G)$ が奇数である仮定に対する矛盾を与える．ゆえに，$\chi(\Sigma^G)$ は偶数である．

次に $|Z| = 2$ である場合を示す．まずは (1) の主張を示す．$\chi(\Sigma^G)$ が奇数であると仮定しよう．このとき，補題 1.7.1 より，$F(G)$ は巡回群なので，$F(G/Z) = F(G)/Z$ も巡回群である．従って，(1) の主張の対偶が示せたので，(1) の主張は正しい．

最後に $|Z| = 2$ の場合において，(2) の主張を示す．G/Z は 2-群 P_2 と冪零群 N を用いて，$G/Z = N \star P_2$ と表すことができる．このとき，N は G/Z の Fitting 部分群であるとして良い．$\chi(\Sigma^G)$ が奇数であると仮定しよう．補題 1.7.1 より，$F(G)$ は巡回群であるので，$N = F(G/Z) = F(G)/Z$ も巡回群である．補題 1.2.2 より，Σ^Z は $N \star P_2$-作用をもつ $\mathbb{Z}_2$-ホモロジ球面である．$N \star P_2$ は $\mathcal{G}_2^2$ に属するので，命題 1.2.5 より，$\chi(\Sigma^G)$ は奇数とはなり得ない．従って，$\chi(\Sigma^G)$ は偶数である． □

補題 1.7.3. G は $SO(4)$ の有限可解部分群とし，Σ 上の G-作用は Σ の向きを保つとする．このとき，$\chi(\Sigma^G)$ は偶数である．

証明．$\pi : SO(4) \to SO(3)\times SO(3)$ を 2 重被覆写像，id を $SO(4)$ の恒等写像とする．$-\mathrm{id} \notin G$ ならば G は π によって $SO(3) \times SO(3)$ のある有限部分群に同型に写されるので，G は $SO(3) \times SO(3)$ のある有限可解部分群と同型である．$-\mathrm{id} \in G$ ならば G は $SO(3) \times SO(3)$ のある有限可解部分群の 2 重被覆群である．すなわち，$G/\langle -\mathrm{id}\rangle$ は $SO(3) \times SO(3)$ のある有限可解部分群と同型である．このとき，補題 1.7.2 と命題 1.3.5 を併せることにより，$\chi(\Sigma^G)$ が偶数であることが従う． □

補題 1.7.3 の $SO(4)$ の有限可解部分群に対する結果は $O(4)$ の有限可解部分群の結果に拡張することができる．

系 1.7.4. G は $O(4)$ の有限可解部分群であり，Σ 上の G-作用は Σ の向きを保つとする．このとき，$\chi(\Sigma^G)$ は偶数である．

証明．G の指数 1 あるいは 2 の部分群 L で $SO(4)$ に含まれるものが存在することに注意する．このとき，補題 1.7.3 によると，$\chi(\Sigma^L)$ は偶数である．補題 1.2.1 より，$\chi(\Sigma^G)$ も偶数であることが従う． □

定理 1.7.5. G が可解ならば $\chi(\Sigma^G)$ は偶数である．

証明．Σ 上の G-作用が Σ の向きを保つ場合に $\chi(\Sigma^G)$ が偶数になることを示せば，向きを保たない場合も $\chi(\Sigma^G)$ が偶数となることが補題 1.2.1 より従うので，Σ 上の G-作用が Σ の向きを保つ場合のみを考える．$\chi(\Sigma^G)$ が奇数であると仮定して矛盾を見出そう．G は可解であるので，$F(G)$ は非自明であり，補題 1.7.1 より，$F(G)$ は非自明な巡回群である．V を $x \in \Sigma^G$ 上の接空間加群とし，$\rho : G \to SO(V)$ を x 上の接空間表現とする．$F(G)$ は G の正規部分群であるので，ρ は 2 つの部分表現

$$\rho^{F(G)} : G \to O(V^{F(G)}) \text{ と } \rho_{F(G)} : G \to O(V_{F(G)})$$

に分解できる．ここで，$V = V^{F(G)} \oplus V_{F(G)}$ である．$K = \ker \rho_{F(G)}$ と定める．$\rho|_K$ は忠実かつ向きを保ち，$\rho_{F(G)}|_K$ は自明であるので，$\rho^{F(G)}|_K$ は忠実かつ向きを保つ．従って，K は G の正規部分群であり，$SO(V^{F(G)})$ のある有限部分群と同型であることがわかる．さらに，K は $\rho_{F(G)}$ の核であるので，G/K は $O(V_{F(G)})$ のある有限部分群と同型である．$H = \ker \rho^{F(G)}$ と定めると，H は $F(G)$ を含み，ρ は忠実であるので，$H \cap K = E$ が成立する．非自明な巡回群 $F(G)$ が 6 次元の忠実な $\mathbb{R}[G]$-加群 V に向きを保つように作用しているので，$V^{F(G)}$ の次元は 0，2，4 のいずれかである．そこで，次の 3 つの場合に分けて，$\chi(\Sigma^G)$ が奇数であるという仮定への矛盾を見出そう．

(I) ある $x \in \Sigma^G$ に対して，$\dim V^{F(G)} = 4$ である．

(II) ある $x \in \Sigma^G$ に対して，$\dim V^{F(G)} = 2$ である．

(III) 任意の $x \in \Sigma^G$ に対して，$\dim V^{F(G)} = 0$ である．

(Ⅰ) の場合の証明．K が非自明であると仮定する．K は $SO(4)$ のある有限可解部分群に同型であるので，K の Fitting 部分群 $F(K)$ は非自明な K の特性部分群である．よって，$F(K)$ は G の非自明な冪零正規部分群である．このとき，$F(G) \cap F(K) = E$ であるので，補題 1.3.1 より $F(G)F(K)$ は $F(G)$ を真の部分群にもつ G の冪零正規部分群になる．しかしながら，このことは $F(G)$ が G の最大の冪零正規部分群であることに矛盾する．従って，K は自明でなければならない．このとき，G/K は $O(2)$ の有限部分群なので，G は $O(2)$ の有限部分群である．$O(2)$ の有限部分群は巡回群か二面体群であるので，命題 1.2.5 より $\chi(\Sigma^G)$ は偶数である．よって，$\chi(\Sigma^G)$ が奇数である仮定に矛盾する．

(II) の場合の証明．K が非自明であると仮定する．K は $SO(2)$ のある有限部分群と同型であるので，K は非自明な巡回群であることがわかる．$F(G) \cap K = E$ であるので，補題 1.3.1 より，$F(G)K$ は $F(G)$ を真の部分群にもつ G の冪零正規部分群である．これは $F(G)$ が最大の冪零正規部分群であることに反するので，K は自明でなければならない．G/K は $O(4)$ のある有限部分群と同型であったので，G は $O(4)$ のある有限可解部分群と同型である．系 1.7.4 より，$\chi(\Sigma^G)$ は偶数であるはずなので，$\chi(\Sigma^G)$ が奇数である仮定に矛盾する．

(Ⅲ) の場合の証明．G の部分群 L に対して，Σ_T^L で $X \cap \Sigma^G \neq \emptyset$ を満たす Σ^L の連結成分 X 全体の非交和を表す．任意の $x \in \Sigma^G$ に対して，$\dim T_x(\Sigma)^{F(G)} = 0$ であるという仮定より，$\Sigma_T^{F(G)}$ は Σ^G と一致する．さらに，$\chi(\Sigma^G)$ が奇数であるという仮定により，$\Sigma_T^{F(G)}$ は奇数個の点から成る集合であることがわかる．$F(G)$ が素数冪位数ならば，補題 1.2.2 より，$\Sigma^{F(G)}$ は S^0 と微分同相であり，Σ^G も S^0 と微分同相となる．このことは $\chi(\Sigma^G)$ が奇数であること反するので，$F(G)$ は素数冪位数ではない．Q を $F(G)$ の非自明な p-Sylow 部分群とすると，$F(G)$ はある奇数位数の巡回群 Z を用いて，$Q \times Z$ と表すことができる．$\dim V^Q \leq 2$ であるならば，補題 1.2.2 より，Σ^Q は 2 次元以下のある球面と微分同相であり，G/Q-作用をもつ．この場合，補題 1.2.3 より，Σ^G はある 2 次元以下の球面と微分同相であるので，$\chi(\Sigma^G)$ が奇数である仮定に矛盾する．従って，$\dim V^Q = 4$ であるので，補題 1.2.2 より，Σ^Q は連結な 4 次元の閉多様体である．各 $x \in \Sigma_T^{F(G)}$ に対して，$T_x(\Sigma)$ は $T_x(\Sigma)^Q$ と $T_x(\Sigma)^Z$ の直和であり，$\dim T_x(\Sigma)^Q = 4$ かつ $\dim T_x(\Sigma)^Z = 2$ であることに注意する．このことは Σ^Q と Σ_T^Z は奇数個の点から成る集合 $\Sigma_T^{F(G)}$ で Σ において横断的に交わっていることを意味する．しかしながら，命題 1.2.11 を用いると，$\Sigma_T^{F(G)}$ が偶数個の点から成る集合とはなり得ないことがわかる．以上より，$\chi(\Sigma^G)$ は偶数でなければならない． □

1.8 $GL(3, \mathbb{C})$ の有限部分群のホモロジー 6-球面上の作用

この節を通して，G は有限群，Σ は効果的な G-作用をもつホモロジー 6-球面とし，Σ^G は空でないとする．この節での目標は，$GL(3, \mathbb{C})$ の有限部分群 G のホモロジー 6-球面上の odd-fixed-point action が存在するならば，G は A_5 あるいは $A_5 \times C_2$ の one-fixed-point action に限られることを示すことである．節 1.7 での議論より，G が可解であるとき $\chi(\Sigma^G)$ が偶数であることを得たので，Σ 上の G の効果的な odd-fixed-point action を論じる際には，G は非可解な有限群であると仮定して良い．この節での主張は [2, 定理 1.5] にて記載されて

いるものである．

$SL(3,\mathbb{C})$ の非可解な有限部分群は以下のいずれかの有限群に同型であることが知られている (参照. [12]).

- A_5
- $A_5 \times C_3$
- $SL(2,5) \star C$
- $\widetilde{A}_6$
- $PSL(2,7)$
- $PSL(2,7) \times C_3$

ここで，C はある有限巡回群を表している．

行列式をとる準同型写像

$$\det : GL(n,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\};\ X \mapsto \det X$$

の核は $SL(n,\mathbb{C})$ であるので，$GL(n,\mathbb{C}) = SL(n,\mathbb{C}) \star \mathbb{C}^*$ が成立することがわかる．$\mathbb{C}^*$ の有限部分群は巡回群のみであるので，$GL(n,\mathbb{C})$ の有限部分群 G は有限巡回群 C の $SL(3,\mathbb{C})$ の有限部分群 L による拡大である．よって，$G = L \star C$ と表すことができる．従って，$GL(3,\mathbb{C})$ の非可解な有限部分群 G は次のいずれかの形で表される群と同型である．

- $A_5 \star F$
- $SL(2,5) \star F$
- $\widetilde{A}_6 \star F$
- $PSL(2,7) \star F$

ここで，F はある有限可解群である．

以下，この節では上記の 4 つのタイプの非可解な有限群に対するホモロジー 6-球面上の作用について議論する．

$SL(2,5)$ は A_5 の 2 重被覆群であるので，

$$|Z(SL(2,5))| = 2 \text{ かつ } SL(2,5)/Z(SL(2,5)) \cong A_5$$

が成立する．既約な $\mathbb{R}[SL(2,5)]$-加群は同型を除いて 9 個存在し，それらを

$$\mathbb{R}_{SL(2,5)},\ \widetilde{U}_{3.1},\ \widetilde{U}_{3.2},\ \widetilde{U}_4,\ \widetilde{U}_5,\ W_{4.1},\ W_{4.2},\ W_8,\ W_{12}$$

で表す．ここで，

$$\dim \mathbb{R}_{SL(2,5)} = 1,\ \dim \widetilde{U}_k = \dim \widetilde{U}_{k.i} = \dim W_k = \dim W_{k.i} = k$$

である．また，中心 $Z(SL(2,5))$ に対して，

$$\widetilde{U}_*^{Z(SL(2,5))} \cong U_* \text{ かつ } W_*^{Z(SL(2,5))} = \{0\}$$

が成立する．ここで，U_* は $\widetilde{U}_*$ に対応する既約な $\mathbb{R}[A_5]$-加群である．定理 1.8.1 を証明するためには，既約な $\mathbb{R}[SL(2,5)]$-加群のいくつかの $SL(2,5)$ の部分群による不動点集合の次元の情報が必要である．表 9 には定理 1.8.1 の証明に必要な不動点集合の情報が記載されている．表 9 は [6, Table 4] から引用している．

	E	$Z(SL(2,5))$	$SL(2,5)$
$\mathbb{R}_{SL(2,5)}$	1	1	1
$\widetilde{U}_{3.1}$	3	3	0
$\widetilde{U}_{3.2}$	3	3	0
$W_{4.1}$	4	0	0
$W_{4.2}$	4	0	0
$\widetilde{U}_4$	4	4	0
$\widetilde{U}_5$	5	5	0
W_8	8	0	0
W_{12}	12	0	0

表 9: 既約な $\mathbb{R}[SL(2,5)]$-加群の不動点集合の次元の表

V が忠実な $\mathbb{R}[SL(2,5)]$-加群であるならば，V は $W_{4.1}$，$W_{4.2}$，W_8，W_{12} のいずれかを部分加群として含まなければならないことに注意する．

定理 1.8.1. (cf. [2, 命題 3.1]) F を有限群，$G = SL(2,5) \star F$ とする．このとき，Σ^G はある 2 次元以下の球面と微分同相である．

証明. V を $x \in \Sigma^G$ 上の接空間加群とし，$W = \mathrm{Res}^G_{SL(2,5)} V$ とする．W は忠実であるので，W は $\mathbb{R}^{\oplus 2}_{SL(2,5)} \oplus W_{4.1}$ あるいは $\mathbb{R}^{\oplus 2}_{SL(2,5)} \oplus W_{4.2}$ のいずれかと同型である．表 9 によると，$\dim W^{Z(SL(2,5))} = 2$ である．$Z(SL(2,5)$ は $SL(2,5)$ の中心であるので，$Z(SL(2,5))$ は G の正規部分群である．補題 1.2.2 より，$\Sigma^{Z(SL(2,5))}$ は S^2 と微分同相であり，$G/Z(SL(2,5))$-作用をもつ．補題 1.2.3 より定理 1.8.1 の主張が従う． □

既約な $\mathbb{R}[\widetilde{A}_6]$-加群は同型を除いて 17 個存在し，それらを

$$\mathbb{R}_{\widetilde{A}_6},\ \widetilde{V}_{5.1},\ \widetilde{V}_{5.2},\ \widetilde{V}_{8.1},\ \widetilde{V}_{8.2},\ \widetilde{V}_9,\ \widetilde{V}_{10},$$

$$W_{6.a},\ W_{12.b},\ W_{18.c},\ W_{30.d}$$

で表す．ここで，$1 \le a \le 4, 1 \le b \le 2, 1 \le c \le 2, 1 \le d \le 2$ あり，

$$\dim \mathbb{R}_{\widetilde{A}_6} = 1,\ \dim \widetilde{V}_{k.i} = \dim \widetilde{V}_k = W_{k.i} = k$$

である．$\widetilde{A}_6$ は A_6 の 3 重被覆群であるので，

$$|Z(\widetilde{A}_6)| = 3 \text{ かつ } \widetilde{A}_6/Z(\widetilde{A}_6) \cong A_6$$

が成立する．また，中心 $Z(\widetilde{A}_6)$ に対して，

$$\widetilde{V}_*^{Z(\widetilde{A}_6)} = \widetilde{V}_* \text{ かつ } W^{Z(\widetilde{A}_6)} = \{0\}$$

が成立する．ここで，V_* は対応する既約な $\mathbb{R}[A_6]$-加群を表している．$\mathbb{R}[\widetilde{A}_6]$-加群 $\widetilde{V}$ が忠実であるならば，$\widetilde{V}$ は

$$W_{6.a},\ W_{12.b},\ W_{18.c},\ W_{30.d}$$

のいずれかを部分加群として含まなければならないことに注意する．

定理 1.8.2. F を有限群，$G = \widetilde{A}_6 \star F$ とする．このとき，Σ^G は S^0 と微分同相である．

証明. V を $x \in \Sigma^G$ 上の接空間加群とし，$U = \mathrm{Res}^G_{\widetilde{A}_6} V$ とする．U は 6 次元の忠実な $\mathbb{R}[\widetilde{A}_6]$-加群であるので，$U$ は $W_{6.a}$ と同型であり，$\dim U^{Z(\widetilde{A}_6)} = 0$ が成立する．補題 1.2.2 より，$\Sigma^{Z(\widetilde{A}_6)}$ は S^0 と微分同相であり，$G/Z(\widetilde{A}_6)$-作用をもつ．従って，$\Sigma^G = (\Sigma^{Z(\widetilde{A}_6)})^F$ も S^0 と微分同相である． □

最後に $G = PSL(2,7) \star F$ である場合に Σ 上の G の odd-fixed-point action が存在しないことを示す．そのための準備として，次の補題を証明する必要がある．

補題 1.8.3. (cf. [2, 補題 3.3]) G を *Oliver* 群，V を $V^G = \{0\}$ を満たす $\mathbb{R}[G]$-加群とし，X を G-作用をもつホモロジー球面とする．G の部分群の 3 つ組 (H_1, H_2, P) であり， 次の条件を満たすものが存在すると仮定する．

(1) H_1 と H_2 は $\mathcal{G}$ に属し，H_1 と H_2 は G を生成する．

(2) P は $H_1 \cap H_2$ の 2 冪位数の部分群である．

(3) $\dim V^P = \dim V^{H_1} + \dim V^{H_2}$ が成立する．

接空間加群 $T_x(X)$ が V と同型となるような G-不動点 x が存在するならば $X^G \neq \{x\}$ である．さらなる仮定として，G の素数冪位数の部分群 Q であり，$V^Q = \{0\}$ を満たすものが存在することを加える．このとき，接空間加群 $T_x(X)$ が V と同型となるような G-不動点 x が存在するならば $|X^G| = 2$ である．

補題 1.8.3 において，$V^G = \{0\}$ を満たす $\mathbb{R}[G]$-加群 V に対して，補題 1.8.3 の条件 (1)〜(3) を満たすような有限群 G の部分群の 3 つ組 (H_1, H_2, P) が存在するとき，V は **good**

splitting をもつという．補題 1.8.3 の証明は，[24, Lemma 2.2, Lemma 2.3] での証明を参考に行っている．

証明．$X^G = \{x\}$ かつ $T_x(X)$ と V が $\mathbb{R}[G]$-加群として同型であると仮定する．このとき，

$$X^P \supset X^{H_1} \cap X^{H_2} = X^G = \{x\}$$

が成立することに注意する．次の 4 つの場合に分けて矛盾が生じることを示す．

(A) $\dim V^P = 0$.

(B) $\dim V^P = \dim V^{H_1} > 0$.

(C) $\dim V^P = \dim V^{H_2} > 0$.

(D) $\dim V^{H_1} > 0$ かつ $\dim V^{H_2} > 0$.

(A) の場合の証明．補題 1.2.2 より，X^P は S^0 と微分同相である．つまり，$X^P = \{x, y\}$ $(x \neq y)$ である．H_1 と H_2 は $\mathcal{G}$ に属しているので，系 1.2.6 を用いると，$|X^{H_1}| \neq 1$ かつ $|X^{H_2}| \neq 1$ であることがわかる．このとき，

$$\{x, y\} = X^P = X^{H_1} \cap X^{H_2} = X^G$$

となり，矛盾が生じる．

(B) の場合の証明．補題 1.2.2 より，X^P は正の次元の連結な閉多様体である．$X_x^{H_1}$ で x を含むような X^{H_1} の連結成分を表すと，$X^P = X_x^{H_1}$ が成立することがわかる．さらに，

$$X^{H_1} \subset X^P = X_x^{H_1}$$

より，X^{H_1} は X^P と一致することがわかる．このとき，

$$X^G = X^{H_1} \cap X^{H_2} = X^P \cap X^{H_2} = X^{H_2}$$

が成立する．系 1.2.6 より，$X^G = X^{H_2} \neq \{x\}$ が従う．

(C) の場合の証明．(B) の場合の証明における H_1 と H_2 を入れ替えて議論することにより，同様にして $X^G = X^{H_1} \neq \{x\}$ を得ることができる．

(D) の場合の証明．$m = \dim V^{H_1}$ かつ $n = \dim V^{H_2}$ とおく．このとき，$X_x^{H_1}$ と $X_x^{H_2}$ はそれぞれ m 次元と n 次元の連結な多様体であり，$\mathbb{Z}_2$-ホモロジー球面 X^P において 1 点集合 $\{x\}$ で横断的に交わっている．しかしながら，命題 1.2.11 より，$X_x^{H_1} \cap X_x^{H_2} = \{x\}$ とはなり得ないことがわかる．よって，$X^G = X_x^{H_1} \cap X_x^{H_2} \neq \{x\}$ である．

ある $x \in X^G$ に対して，$T_x(X) \cong V$ であり，ある素数冪位数の G の部分群 Q に対して，$V^Q = \{0\}$ であると仮定する．補題 1.2.2 より，X^Q は S^0 と微分同相であるので，$|X^G| = 1$ あるいは 2 である．前半の議論より，$|X^G| \neq 1$ であるので，$|X^G| = 2$ である．$\square$

既約な $\mathbb{R}[PSL(2,7)]$-加群は同型を除いて 6 個存在し，それらを

$$\mathbb{R}_{PSL(2,7)},\, T_{6.1},\, T_{6.2},\, T_{6.3},\, T_7,\, T_8$$

で表す．ここで，

$$\dim \mathbb{R}_{PSL(2,7)} = 1,\, \dim T_{k.l} = \dim T_k = k$$

である．$PSL(2,7)$ は C_7，D_8，S_4，$\mathfrak{S}_4$ で表される部分群をもつ．ここで，$\mathfrak{S}_4$ は $PSL(2,7)$ において S_4 と同型であるが共役ではない部分群であり，S_4 も $\mathfrak{S}_4$ も $\mathcal{G}_2^2$ に属する．さらに，これらの部分群は

$$\langle S_4, \mathfrak{S}_4 \rangle = PSL(2,7)\ ,\ S_4 \cap \mathfrak{S}_4 = D_8$$

を満たすように選ぶことができる．以下の表 10 にて，これらの部分群による 6 次元の既約な $\mathbb{R}[PSL(2,7)]$-加群 $T_{6.1}$，$T_{6.2}$，$T_{6.3}$ の不動点集合の次元を記載している．

	C_7	D_8	S_4	$\mathfrak{S}_4$	$PSL(2,7)$
$T_{6.1}$	0	0	0	0	0
$T_{6.2}$	0	0	0	0	0
$T_{6.3}$	0	2	1	1	0

表 10: 6 次元の既約な $\mathbb{R}[PSL(2,7)]$-加群の不動点集合の次元の表

定理 1.8.4. F を有限群，$G = PSL(2,7) \star F$ とする．このとき，Σ^G は S^0 と微分同相である．

証明. V を $x \in \Sigma^G$ 上の接空間加群とし，$U = \mathrm{Res}^G_{PSL(2,7)} V$ とする．U は忠実なので，U は 6 次元の既約な $\mathbb{R}[PSL(2,7)]$-加群である．$PSL(2,7)$ の部分群の 3 つ組 $(S_4, \mathfrak{S}_4, D_8)$ に対して，S_4 と $\mathfrak{S}_4$ は $\mathcal{G}_2^2$ に属していて，D_8 は 2 冪位数である．表 10 より，6 次元の既約な $\mathbb{R}[PSL(2,7)]$-加群は good splitting をもつことがわかる．さらには，6 次元の既約な $\mathbb{R}[PSL(2,7)]$-加群に対して，$PSL(2,7)$ の部分群 C_7 での不動点集合は自明である．以上のことを併せて，補題 1.8.3 を用いると，$\Sigma^{PSL(2,7)}$ が S^0 と微分同相であることがわかる．従って，$\Sigma^G = (\Sigma^{PSL(2,7)})^F$ も S^0 と微分同相である． □

定理 1.6.5，1.6.6，1.8.1，1.8.2，1.8.4 及び定理 1.7.5 を併せることにより次の定理を得ることができる．

定理 1.8.5. G を $GL(3,\mathbb{C})$ の有限部分群，Σ を効果的な G-作用をもつホモロジー 6-球面とする．Σ 上の G の *odd-fixed-point action* が存在するならば，G は A_5 あるいは $A_5 \times C_2$ に同型であり，Σ 上の G-作用は 3-*pseudofree* な *one-fixed-point action* である．

証明. G が可解ならば，定理 1.7.5 より，$\chi(\Sigma^G)$ は偶数となるので，G が $GL(3,\mathbb{C})$ の非可解な有限部分群である場合に確認すれば良い．定理 1.6.5, 1.6.6, 1.8.1, 1.8.2, 1.8.4 を併せると，G が A_5，$A_5 \times C_2$，S_5 のいずれかの有限群の 3-pseudofree な one-fixed-point action に

限られることがわかる．S_5 は複素 3 次元以下の忠実な表現をもたないので，$GL(3,\mathbb{C})$ の有限部分群ではない．従って，A_5 あるいは $A_5 \times C_2$ の 3-pseudofree な one-fixed-point action に限られることがわかる． □

2 付録

本論文の付録として，以下の 3 つの結果をまとめた．

- 5 次元以下の球面の有限群の作用による不動点集合のオイラー標数の偶数性.
- ホモロジー球面上の 2-pseudofree な有限群の作用の不動点集合の分類.
- Smith の定理の証明.

以下の 3 つの結果がそれぞれ示される．

定理 2.0.1. G を有限群，S を G-作用をもつホモトピー n-球面とする．n が 5 以下ならば，$\chi(S^G)$ は偶数である．

定理 2.0.1 の結果は，補題 1.2.3，定理 2.1.3，定理 2.2.3 及び定理 2.3.4 より従う．

定理 2.1.3，定理 2.2.3，定理 2.3.4 は節 2.1，節 2.2, 節 2.3 にてそれぞれ証明される．

定理 2.0.2. (cf. [定理 2.4.5]) G を有限群，Σ を 2-*pseudofree* な G-作用をもつホモロジー球面とする．このとき，Σ^G はある 2 次元以下の球面であるか，1 点集合であるかのいずれかである．特に，1 点集合の場合は，G は A_5 と同型であり，Σ の次元は 3 あるいは 6 でなければならない．

定理 2.0.2 の証明は，節 2.4 にて行われる．

定理 2.0.3. ([Smith の定理 1.2.2]) P を有限 p-群，X を有限 P-CW 複体とする．X が $\mathbb{Z}_p$-ホモロジー球面ならば，X^P も $\mathbb{Z}_p$-ホモロジー球面である．

Snith の定理の証明は，節 2.5 にて，変換群論 [17] の第 39, 40 節を参考に行われる．

コメント 2. 5 次元以下の球面の有限群の作用による不動点集合のオイラー標数が偶数となる結果は，5 次元以下の球面は有限群の *odd-fixed-point action* が存在しないことの証明を与えている．従って，この結果は 5 次元以下の球面は有限群の *one-fixed-point action* を許容しない結果の拡張となっている．また，ホモロジー球面上の 2-*pseudofree* な有限群の作用による不動点集合の結果を利用して，E. Laitinen–P. Traczyk の定理 [21, Theorem 1] 証明の別証明を与えることができた．

2.1 ホモロジー 3-球面上の有限群の作用

この節では，ホモロジー 3-球面上の有限群の作用による不動点集合が 2 次元以下の球面あるいは 1 点集合のいずれかになることを証明することが目標である．この節を通して，G は有限群，Σ は G-作用をもつホモロジー 3-球面とし，Σ 上の G-作用は効果的であると仮定する．また，Σ^G は空ではないとし，$x \in \Sigma^G$ 上の接空間加群を V で表す．

命題 2.1.1. Σ^G はある 2 次元以下の球面に微分同相であるか，1 点集合であるかのいずれかである．特に，1 点集合であるならば，G は A_5 と同型でなければならない．

証明. V を $x \in \Sigma^G$ 上の接空間加群とする．V は忠実な 3 次元の $\mathbb{R}[G]$-加群であるので，G は $O(3)$ のある有限部分群と同型である．命題 1.6.1 より，$\chi(\Sigma^G)$ が奇数ならば，G は A_5 と同型かつ $|\Sigma^G| = 1$ であることが従う．以下，$\chi(\Sigma^G)$ は偶数であると仮定する．

初めに，G が $SO(3)$ の有限部分群である場合を考える．$F(G)$ が非自明である場合には，$F(G)$ のある非自明な p-Sylow 部分群 P が存在する．このとき，Σ^P は 2 次元以下のある球面と微分同相であり，G/P-作用をもつ．従って，補題 1.2.3 より，Σ^G もある 2 次元以下の球面と微分同相であることが従う．$F(G)$ が自明である場合は，命題 1.3.6 より，G は A_5 と同型であり，V は 3 次元の既約な $\mathbb{R}[A_5]$-加群であることがわかる．このとき，A_5 の部分群 D_4 に対して，$\dim V^{D_4} = 0$ が成り立つ．補題 1.2.2 より，$|\Sigma^{D_4}| = 2$ となるので，$|\Sigma^G| \leq 2$ である．$\chi(\Sigma^G)$ は偶数であるので，$|\Sigma^G| = 2$ が従う．

次に，G が $SO(3)$ に属さない $O(3)$ の部分群である場合を考える．このとき，G の正規部分群 Z で位数 2 のものが存在する．補題 1.2.2 より，Σ^Z はある 2 次元以下の球面と微分同相である．従って，$\Sigma^G = (\Sigma^Z)^{G/Z}$ もある 2 次元以下の球面に微分同相であることが補題 1.2.3 より従う． □

ここで，向きづけ可能で連結な 3 次元閉多様体上の one-fixed-point action に関する結果を紹介する．

定理 2.1.2. (cf. [10, Theorem I.1]) M を G-作用をもつ向きづけ可能な 3 次元の連結な閉多様体とする．基本群 $\pi_1(M)$ が $SU(2)$ への非自明な表現をもたないならば，M^G は 1 点集合にはなり得ない．特に，M が単連結ならば，M^G は 1 点集合になり得ない．

注意 3. 次数 3 の既約な実表現 $\rho : A_5 \to SO(3)$ から標準的に A_5 から $SO(3)$ への作用を得ることができる．このとき，軌道空間 $SO(3)/A_5$ は (滑らかな多様体かつ) ホモロジー 3-球面であり，自然な A_5 の *one-fixed-point action* をもつ (参照．[8, p.57])．さらに，基本群 $\pi_1(SO(3)/A_5)$ は $SL(2,5)$ と同型である．

定理 2.1.2 を用いるとホモトピー 3-球面に関する次の結果を得ることができる．

定理 2.1.3. 有限群 G の非自明な作用をもつホモトピー 3-球面の空でない G-不動点集合は，ある 2 次元以下の球面に微分同相である．

証明．命題 2.1.1 より，G-不動点集合は 2 次元以下の球面であるか 1 点集合のいずれかである．しかしながら，定理 2.1.2 より，G-不動点集合は 1 点集合にはなり得ないので，定理 2.1.3 の主張が従う． □

2.2 ホモロジー 4-球面上の有限群の作用

この節では，ホモロジー 4-球面の有限群の作用による不動点集合が 3 次元以下の $\mathbb{Z}_2$-ホモロジー球面となることを示すことが目標である．ホモトピー 4-球面上の有限群の one-fixed-point action が存在しないことは，[13] 及び [15] において既に証明されている．この節を通して，G は有限群，Σ は G-作用をもつホモロジー 4-球面とし，Σ 上の G-作用は効果的であると仮定する．また，Σ^G は空ではないとし，$x \in \Sigma^G$ 上の接空間加群を V で表す．

命題 2.2.1. Σ 上の G-作用は Σ の向きを保つとする．G の *Fitting* 部分群 $F(G)$ が非自明ならば，Σ^G はある 2 次元以下の球面と微分同相である．

証明．$F(G)$ が非自明であるという仮定より，$F(G)$ のある Sylow 部分群 P は非自明である．このとき，$\dim V^P \leq 2$ であるので，Σ^P はある 2 次元以下の球面と微分同相であり，G/P-作用をもつ．補題 1.2.3 より，Σ^G もある 2 次元以下の球面と微分同相であることが従う． □

定理 2.2.2. Σ 上の G-作用は Σ の向きを保つとする．Σ^G はある 2 次元以下の球面に微分同相である．

証明．V 上の G-作用は効果的かつ V の向きを保つので，G は $SO(4)$ のある有限部分群と同型である．G が A_5 と同型でないとする．このとき，命題 1.3.6 によると，$F(G)$ は非自明である．この場合，Σ^G がある 2 次元以下の球面と微分同相であることが命題 2.2.1 から従う．G が A_5 と同型である場合にも，命題 1.6.2 より，Σ^G がある 2 次元以下の球面と微分同相であることがわかる． □

定理 2.2.3. Σ^G は 3 次元以下の $\mathbb{Z}_2$-ホモロジー球面である．

証明．Σ の向きを保つ $g \in G$ 全体によって成される G の部分群を L で表すと，L は $SO(4)$ の有限部分群であることに注意する．L が非自明であるとき，定理 2.2.2 より，Σ^L はある 2 次元以下の球面と微分同相であるので，Σ^G もある 2 次元以下の球面と微分同相となることが補題 1.2.3 より従う．L が自明であるとき，G の位数は 2 であるので，補題 1.2.2 より，Σ^G は 3 次元以下の $\mathbb{Z}_2$-ホモロジー球面であることが従う． □

2.3 ホモロジー 5-球面上の有限群の作用

この節では，ホモロジー 5-球面上の有限群の作用による不動点集合のオイラー標数が偶数となることを示す．ホモロジー 5-球面上の有限群の one-fixed-point action が存在しないことは，[10, Theorem Ⅱ.4] において既に証明されている．この節を通して，G は有限群，Σ は G-作用をもつホモロジー 5-球面とする．Σ 上の G-作用は効果的であり，Σ^G は空ではな

いとし，$x \in \Sigma^G$ 上の接空間加群を V で表す．Σ 上の G-作用が Σ の向きを保つ場合において，オイラー標数 $\chi(\Sigma^G)$ が偶数であることを示せれば，補題 1.2.1 より，Σ 上の G-作用が Σ の向きを保たない場合においても $\chi(\Sigma^G)$ が偶数になることに注意する．

補題 2.3.1. Σ 上の G-作用は Σ の向きを保つとする．$F(G)$ が巡回群でないならば，Σ^G はある 2 次元以下の球面と微分同相である．

証明. $F(G)$ が巡回群でないならば，$F(G)$ のある Sylow 部分群 P で巡回群でないものが存在する．このとき，$\dim V^P \leq 2$ であるので，補題 1.2.2 より，Σ はある 2 次元以下の球面と微分同相であり，G/P-作用をもつ．補題 1.2.3 より，Σ^G もある 2 次元以下の球面と微分同相であることが従う． □

補題 2.3.2. Σ 上の G-作用は Σ の向きを保つとする．$F(G)$ が非自明ならば，$\chi(\Sigma^G)$ は偶数である．

証明. $\chi(\Sigma^G)$ が奇数であると仮定する．このとき，補題 2.3.1 より，$F(G)$ は非自明な巡回群でなければならない．従って，$\dim V^{F(G)} = 1$ あるいは 3 であるかのいずれかである．x 上の接空間表現を $\rho \quad : G \to SO(V)$ で表すと，$F(G)$ は G の正規部分群であるので，

$$\rho^{F(G)} : G \to O(V^{F(G)}) \text{ と } \rho_{F(G)} : G \to O(V_{F(G)})$$

に分解することができる．H と K でそれぞれ $\rho^{F(G)}$ と $\rho_{F(G)}$ の核を表すと，ρ は忠実であるので，$H \cap K = E$ が成立する．$\rho^{F(G)}|_H$ かつ $\rho_{F(G)}|_K$ は共に自明であり，$\rho|_H$ と $\rho|_K$ は共に忠実かつ向きを保つので，$\rho_{F(G)}|_H$ かつ $\rho^{F(G)}|_K$ は共に忠実かつ向きを保つ．従って，H と K はそれぞれ $SO(V_{F(G)})$ と $SO(V^{F(G)})$ の部分群である．さらに，G/H と G/K はそれぞれ $O(V^{F(G)})$ と $O(V_{F(G)})$ の部分群であることに注意する．次の 2 つの場合に分けて，$\chi(\Sigma^G)$ が奇数である仮定に対する矛盾を見出そう．

- ある $x \in \Sigma^G$ に対して，$\dim V^{F(G)} = 3$ である．
- 任意の $x \in \Sigma^G$ に対して，$\dim V^{F(G)} = 1$ である．

初めに，ある $x \in \Sigma^G$ に対して，$\dim V^{F(G)} = 3$ である場合を考える．このとき，K は $SO(3)$ の部分群である．$F(K)$ が非自明であるならば，補題 1.3.1 より，$F(G)F(K)$ が $F(G)$ を真に含む G の冪零正規部分群となってしまい矛盾が生じる．従って，$F(K)$ は自明でなければならない．$SO(3)$ の有限部分群で Fitting 部分群が自明なものは E か A_5 のいずれかである．K が A_5 と同型である場合は，命題 1.6.3 より，Σ^K はある 2 次元以下の球面と微分同相である．ゆえに，補題 1.2.3 より，Σ^G もある 2 次元以下の球面と微分同相であることが従い，$\chi(\Sigma^G)$ が奇数であるという仮定に矛盾する．K が自明な場合は G は $O(2)$ の有限部分群である．すなわち，G は巡回群であるか二面体群である．この場合，G は $\mathcal{G}^2$ に属するので，命題 1.2.5 より，$\chi(\Sigma^G)$ は偶数となる．これも $\chi(\Sigma^G)$ が奇数である仮定に矛盾する．

次に，任意の $x \in \Sigma^G$ に対して，$\dim V^{F(G)} = 1$ である場合を考える．$\Sigma_T^{F(G)}$ で $\Sigma^{F(G)}$ の連結成分 C であり，$C \cap \Sigma^G \neq \emptyset$ を満たすものの非交和を表す．このとき，$\Sigma_T^{F(G)}$ は S^1 の

非交和となり，$G/F(G)$-作用をもつ．補題 1.2.3 より，$\chi(\Sigma^G)$ は偶数となり，$\chi(\Sigma^G)$ が奇数である仮定に矛盾する．以上の議論より，$F(G)$ が非自明ならば $\chi(\Sigma^G)$ が偶数となることが従う． □

命題 2.3.3. G が A_6 と同型であるならば，Σ^G は S^0 と微分同相である．

証明．接空間加群 V は表 2 における $V_{5.1}$ あるいは $V_{5.2}$ のいずれかに同型である．さらに，表 2 によると，$\dim V^{C_3\times C_3}=1$ かつ $\dim V^{(C_3\times C_3)\rtimes C_4}=0$ であるので，補題 1.2.2 と補題 1.2.3 を併せることにより，$\Sigma^{(C_3\times C_3)\rtimes C_4}$ は S^0 と微分同相である．従って，$|\Sigma^G|=1$ あるいは 2 であるが，定理 1.4.4 より，$|\Sigma^G|=1$ とはなり得ない．よって，$|\Sigma^G|=2$ である． □

定理 2.3.4. 有限群 G がホモロジー 5-球面 Σ に効果的に作用しているならば，$\chi(\Sigma^G)$ は偶数である．

証明．Σ 上の G-作用が Σ の向きを保つ場合に $\chi(\Sigma^G)$ が偶数となることを示せば良い．G の極小正規部分群を K をすると，K は特性単純群である．K が可換ならば $F(G)$ は非自明であるので，補題 2.3.2 より，$\chi(\Sigma^G)$ は偶数である．K が非可換ならば，K は非可換な特性単純群である．V 上の K-作用は効果的で V の向きを保つので，K は $SO(5)$ のある有限部分群と同型である．命題 1.3.7 を用いると，K は A_5 あるいは A_6 のいずれかと同型である．命題 1.6.3 と命題 2.3.3 より，Σ^K はある 2 次元以下の球面と微分同相であることがわかる．従って，補題 1.2.3 より，Σ^G もある 2 次元以下の球面と微分同相であることが従う．以上より，$\chi(\Sigma^G)$ は偶数になる． □

2.4 ホモロジー球面上の 2-pseudofree な有限群の作用について

この節では，ホモロジー球面上の 2-pseudofree な有限群の作用による不動点集合がある 2 次元以下の球面に微分同相であるか，1 点集合になるかのいずれかであることを証明する．その系として，E. Laitinen–P. Traczyk の定理 [21, Theorem 1] を証明する．この節を通して，G は有限群とし，多様体上の G-作用は効果的であり，G-不動点集合は空でないとする．

定理 2.0.2 を証明するために幾つかの補題を用意する．

補題 2.4.1. Σ を 2-*pseudofree* な G-作用をもつホモロジー球面とする．Σ の次元が 4 以下であるとき，Σ^G はある 2 次元以下の球面であるか，1 点集合であるかのいずれかである．特に，1 点集合の場合は，G は A_5 と同型であり，Σ の次元は 3 である．

証明．$\dim\Sigma^G\le 2$ であることに気をつけると，補題 1.2.3，命題 2.1.1 及び定理 2.2.3 より直ちに従う． □

補題 2.4.2. Σ を 2-*pseudofree* な G-作用をもつホモロジー球面とする．*Fitting* 部分群 $F(G)$ が非自明ならば，Σ^G はある 2 次元以下の球面と微分同相である．

証明．$F(G)$ は非自明であるので，$F(G)$ の非自明な Sylow 部分群 P が存在する．補題 1.2.2 より，Σ^P はある 2 次元以下の球面と微分同相であり，G/P-作用をもつ．Σ^G もある 2 次元以下の球面と微分同相であることが補題 1.2.3 より従う． □

G を有限群，V を $\mathbb{R}[G]$-加群とする．V 上の G-作用が n-pseudofree であるとき，対応する表現 $\rho : G \to O(V)$ も n-pseudofree であると呼ぶことにする．補題 2.4.2 より，$F(G)$ が自明である有限群 G に対する議論が残っている．有限群 G の極小正規部分群は特性単純群であるので，$F(G)$ が自明ならば，G の極小正規部分群は非可換な特性単純群ある．そこで，2-pseudofree な表現をもつ非可換な特性単純群を見つける必要がある．そのためには，次の補題 2.4.3 が有用である．この補題は [21, Lemma 2.1] による主張である．

位数 $2m$ の二面体群 D_{2m} は

$$D_{2m} = \langle\, A,\, B \mid A^m = E,\, B^2 = E,\, BAB = A^{-1} \,\rangle$$

のように A と B の 2 つの元で生成される．$a = AB$，$b = B$ とおくと，a と b は D_{2m} の生成元であり，共に位数 2 である．

補題 2.4.3. (cf. [21, Lemma 2.1]) G を二面体群，V を $\mathbb{R}[G]$-加群とする．対応する表現 $\rho : G \to O(V)$ が *n-pseudofree* ならば，$\dim V \leq 3n$ が成立する．$\dim V \geq 3n - 1$ である場合において，$\rho(G) \subset SO(V)$ であることと $\dim V = 3n$ であることは同値である．さらに，$\dim V = 3n$ ならば，$V^G = \{0\}$ が成立する．

証明．a と b を G を生成する位数 2 の元とする．$V_1 = V^a$，$V_2 = V^b$ とし，$U_1 = V_1^{\perp}$，$U_2 = V_2^{\perp}$ と定める．V_1 と V_2 はそれぞれ $\rho(a)$ と $\rho(b)$ の固有値 1 の固有空間であるので，U_1 と U_2 はそれぞれ $\rho(a)$ と $\rho(b)$ の固有値 -1 の固有空間である．このとき，

$$\begin{aligned} x \in U_1 \cap U_2 &\iff x \in V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp} \\ &\iff x \notin V_1,\ x \notin V_2 \\ &\iff x \notin V_1 + V_2 \\ &\iff x \in (V_1 + V_2)^{\perp} \end{aligned}$$

より，$U_1 \cap U_2 = (V_1 + V_2)^{\perp}$ である．また，$x \in U_1 \cap U_2$ に対して，

$$\rho(ab)(x) = \rho(a)(\rho(b)(x)) = \rho(a)(-x) = x$$

が成立するので，$x \in V^{ab}$ である．従って，

$$U_1 \cap U_2 = (V_1 + V_2)^{\perp} \subset V^{ab}$$

が成立する．$a \neq b = b^{-1}$ であるので，ab は G の非自明な元である．V 上の G-作用は

n-pseudofree であるので，次の不等式 (A) が成立することがわかる．

$$\begin{aligned} n &\geq \dim(U_1 \cap U_2) = \dim V - \dim(V_1 + V_2) \\ &\geq \dim V - \dim V_1 - \dim V_2 \geq \dim V - 2n. \end{aligned} \qquad \cdots (A)$$

よって，$\dim V \leq 3n$ である．

a と b は G を生成するので，$\rho(G) \subset SO(V)$ であることと $\rho(a)$ と $\rho(b)$ が共に行列式 1 をもつことは同値である．$\rho(a)$ と $\rho(b)$ の行列式はそれぞれ $(-1)^{\dim U_1}$ と $(-1)^{\dim U_2}$ で与えられることに注意する．$\dim V = 3n - 1$ である場合を考える．n-pseudofree の仮定より，$\dim V_1 \leq n$ かつ $\dim V_2 \leq n$ であり，不等式 (A) より，$n \geq \dim V - \dim V_1 - \dim V_2$ が成立するので，不等式

$$2n - 1 \leq \dim V_1 + \dim V_2 \leq 2n$$

が成立する．このことは V_1 か V_2 の少なくとも一方は n 次元であることを意味する．そこで，$\dim V_1 = n$ とすると，$\dim U_1 = 2n - 1$ となるので，$\rho(a)$ の行列式は -1 である．従って，$\dim V = 3n - 1$ であるとき，$\rho(G) \not\subset SO(V)$ である．次に $\dim V = 3n$ である場合を考える．$\dim V = 3n - 1$ の場合と同様に不等式評価をすると，不等式

$$2n \leq \dim V_1 + \dim V_2 \leq 2n$$

を得ることができ，V_1 と V_2 の次元は共に n でなければならないことがわかる．よって，U_1 と U_2 の次元は共に $2n$ 次元であり，$\rho(a)$ と $\rho(b)$ の行列式は共に 1 であることがわかる．従って，$\dim V \geq 3n - 1$ ならば，$\rho(G) \subset SO(V)$ であることと $\dim V = 3n$ であることは同値である．

最後に，$\dim V = 3n$ であるとき，$V^G = \{0\}$ であることを示す．a と b は G の生成元なので，$V^G = V_1 \cap V_2$ である．不等式 (A) と $\dim V = 3n$ であることを併せると，不等式

$$n \geq 3n - \dim(V_1 + V_2) \geq 3n - \dim V_1 - \dim V_2 \geq n$$

を得ることができ，$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2)$ が従う．これは，$\dim V_1 \cap V_2 = 0$ であることを意味するので，$V^G = V_1 \cap V_2 = \{0\}$ である． □

注意 4. 補題 2.4.3 の主張は二面体群を含むような有限群 G に対して，適用することができることに注意する．特に，非可換な特性単純部分群は二面体群を含むことが知られている．

命題 2.4.4. 非可換な有限特性単純群 G が 2-*pseudofree* な 5 次元以上の $\mathbb{R}[G]$-加群 V をもつならば，次のいずれかである．

- G は A_5 と同型であり，V は 1-*pseudofree* な 3 次元の既約な $\mathbb{R}[G]$-加群の 2 つの直和である．
- G は $PSL(2,7)$ と同型であり，V は 2-*pseudofree* な 6 次元の既約な $\mathbb{R}[G]$-加群である．

証明. V 上の G-作用は V の向きを保つので，補題 2.4.3 より，V の次元は 6 に限定されることに注意する．1-pseudofree な $\mathbb{R}[G]$-加群をもつ非可換な有限特性単純群 G が A_5 のみであることは，$SO(3)$ の非可換な特性単純部分群は A_5 のみであることと，表 7 より直ちに従う．このことは，G が 2-pseudofree な 6 次元の $\mathbb{R}[G]$-加群 V をもつならば，V は 1-pseudofree な 3 次元の $\mathbb{R}[A_5]$-加群の 2 つの直和であるか，2-pseudofree な 6 次元の既約な $\mathbb{R}[G]$-加群のいずれかであることを意味している．G が 2-pseudofree な 6 次元の既約な $\mathbb{R}[G]$-加群 V をもつ場合を考える．命題 1.3.7 より，G は

$$A_5 \times A_5,\ A_7,\ PSL(2,7),\ PSU(4,2)$$

のいずれかと同型である．GAP [16] を用いて，これらの有限群 G の 6 次元の既約な $\mathbb{R}[G]$-加群の不動点集合の次元を調べると，G が $PSL(2,7)$ と同型の場合に限り，2-pseudofree な 6 次元の既約な $\mathbb{R}[G]$-加群 V をもつことがわかる． □

定理 2.4.5. G を有限群，Σ を 2-*pseudofree* な G-作用をもつホモロジー球面とする．このとき，Σ^G はある 2 次元以下の球面であるか，1 点集合であるかのいずれかである．特に，1 点集合の場合は，G は A_5 と同型であり，Σ の次元は 3 あるいは 6 でなければならない．

証明. Σ の次元が 4 以下である場合及び $F(G)$ が非自明である場合には，補題 2.4.1 と補題 2.4.2 より，定理 2.4.5 の主張が正しいことがわかる．以下，$F(G)$ は自明であり，Σ の次元は 5 以上であるとする．V を $x \in \Sigma^G$ 上の接空間加群とする．$F(G)$ は自明であるので，G の極小正規部分群 K は非可換な特性単純群である．命題 2.4.4 を用いると，K は A_5 あるいは $PSL(2,7)$ のいずれかと同型であり，Σ の次元は 6 であることが従う．K が A_5 と同型である場合には，命題 1.6.4，定理 1.6.5 及び定理 1.6.6 より，Σ^G は 1 点あるいは 2 点から成る集合であることがわかる．K が $PSL(2,7)$ と同型である場合には，定理 1.8.4 より，Σ^G は 2 点から成る集合であることが従う． □

コメント 3. E. Laitinen–P.Traczyk の定理 [21, Theorem 1] の証明では，2-*pseudofree* な有限群 G の作用をもつ 5 次元以上のホモトピー球面 Σ に対して，$|\Sigma^G| \geq 2$ である場合には，任意の非自明な G の部分群 H に対して，Σ^H がある 2 次元以下の球面と微分同相であり，$|\Sigma^G| = 1$ である場合には，G が A_5 と同型かつ Σ の次元が 6 であることを示している．従って，上記の定理 2.4.5 は彼らが証明したことの一般化となっている．

定理 2.4.5 を利用して，E. Laitinen–P. Traczyk の定理 [21, Theorem 1] を示す．

定理 2.4.6. (cf. [21, Theorem 1]) n を 5 以上の整数，G を有限群，Σ を 2-*pseudofree* な G-作用をもつホモトピー n-球面とする．このとき，以下の 3 つのことが成立する．

(1) $|\Sigma^G| \geq 2$ ならば，任意の $x, y \in \Sigma^G$ に対して，$T_x(\Sigma)$ と $T_y(\Sigma)$ は G-位相同型である．

(2) $|\Sigma^G| \geq 2$ ならば，Σ は $S(\mathbb{R}_G \oplus T_x(\Sigma))$ と G-位相同型である．ここで，$\mathbb{R}_G$ は 1 次元の自明な $\mathbb{R}[G]$-加群である．

(3) $|\Sigma^G| = 1$ ならば，G は A_5 と同型であり，Σ は 6-球面 S^6 と微分同相である．

証明．任意の非自明な G の部分群 H に対して，Σ^H がある 2 次元以下の球面と微分同相であることを示すことができれば，S. Illman の定理 [19, Theorem 5, Corollary B] より，定理 2.4.6 の主張 (1) と (2) が成立することに注意する．$|\Sigma^G| \geq 2$ であると仮定する．このとき，定理 2.4.5 より，任意の非自明な G の部分群 H に対して，Σ^H はある 2 次元以下の球面と微分同相であることが従う．従って，$|\Sigma^G| \geq 2$ ならば，定理 2.4.6 の主張 (1) と (2) が成立することがわかる．$|\Sigma^G| = 1$ である場合も，定理 2.4.5 を用いると，G が A_5 と同型であり，$\dim \Sigma = 6$ であることが従う．Σ は 6-球面と同相であり，6-球面は微分構造をひとつしか持たないので，Σ は 6-球面 S^6 と微分同相である． □

2.5 Smith の定理の証明

この節では，この論文において重要な定理である Smith の定理 (補題 1.2.2) の証明を行う．本節での証明は変換群論 [17] の第 39, 40 節を参考に行っている．この節を通して，p を素数，G を位数 p の巡回群，X を有限 G-CW 複体とし，Y を X の G-CW 部分複体とする．

g を G の生成元として固定する，群環 $\mathbb{Z}_p[G]$ における元 α，β をそれぞれ

$$\alpha = 1 + g + g^2 + \cdots + g^{p-1},$$
$$\beta = 1 - g$$

によって定義する．このとき，g の位数は p であるので，

$$\alpha\beta = 0 = \beta\alpha$$

が成立する．任意の $1 \leq k \leq p-1$ に対して，

$$\binom{p}{k} = \binom{p-1}{k} + \binom{p-1}{k-1}$$

が成立するので，帰納的に

$$(-1)^k \binom{p-1}{k} \equiv 1 \bmod p$$

が成立する．従って，$\mathbb{Z}_p[G]$ において，

$$\alpha = \beta^{p-1}$$

が成立することがわかる．$\gamma = \beta^k$ に対して，$\overline{\gamma} = \beta^{p-k}$ とおくことにする．

$\gamma = \beta^k$ $(1 \leq k \leq p-1)$ に対して，鎖複体 $C(X, Y; \mathbb{Z}_p)$ の部分複体

$$\gamma C(X, Y; \mathbb{Z}_p) = \{\, \gamma c \mid c \in C(X, Y; \mathbb{Z}_p)\}$$

を考える．以下，断りがない限り，鎖複体の係数は $\mathbb{Z}_p$ のみを考えることにする．

補題 2.5.1. 各 $\gamma = \beta^k$ $(1 \leq k \leq p-1)$ に対して，

$$0 \to \overline{\gamma} C(X,Y) \oplus C(X^G, Y^G) \xrightarrow{f} C(X,Y) \xrightarrow{\gamma} \gamma C(X,Y) \to 0$$

は鎖複体の完全系列である．ここで，f は包含写像の和であり，γ は $c \mapsto \gamma c$ の対応により定められる写像である．

証明. 自然な包含写像により，$\overline{\gamma} C(X,Y)$ と $C(X^G, Y^G)$ は $C(X,Y)$ の部分鎖複体と見做せる．$X \setminus Y$ の部分集合 A に対して，A に属する単体で生成されるような $C(X,Y)$ の部分群を $C(A)$ で表すことにする．一般に，$C(A)$ は鎖複体の構造をもたないことに注意する．

写像 γ が全射であることは定め方より明らかである．f が単射であることを示す．$X \setminus X^G$ が G-不変であることに注意する．$c \in C(X,Y)$ と $c' \in C(X^G, Y^G)$ に対して，$f(\overline{\gamma} c \oplus c') = 0$ であると仮定する．

$$\beta c' = (1-g)c' = c' - c' = 0$$

であるので，$\overline{\gamma} c' = 0$ が成立する．従って，

$$c = c_1 + c_2 \qquad (\, c_1 \in C(X \setminus (Y \cup X^G)),\, c_2 \in C(X^G \setminus Y^G)\,)$$

と分解すると，

$$0 = f(\overline{\gamma} c \oplus c') = \overline{\gamma} c + c' = \overline{\gamma} c_1 + \overline{\gamma} c_2 + c' = \overline{\gamma} c_1 + c'$$

となる．$\overline{\gamma} c_1 \in C(X \setminus (Y \cup X^G))$ かつ $c' \in C(X^G \setminus Y^G)$ であるので，$\overline{\gamma} c_1 = c' = 0$ でなければならない．従って，f は単射である．

$\gamma f = 0$ であることを示す．$\gamma \overline{\gamma} = \beta^p = \beta \alpha = 0$ が成立することに注意すると，任意の $c \in C(X,Y)$ と $c' \in C(X^G, Y^G)$ に対して，

$$\gamma f(\overline{\gamma} c \oplus c') = \gamma(\overline{\gamma} c + c') = \gamma \overline{\gamma} c + \gamma c' = \gamma c' = 0$$

である．ゆえに，$\ker \gamma \supset \mathrm{Im} f$ であることがわかる．

最後に $\ker \gamma = \mathrm{Im} f$ であることを示す．X の単体 s に対して，その軌道を $G(s)$ で表す．このとき，各軌道 $G(s)$ に対して，

$$\gamma C(G(s)) \subset C(G)(s))$$

が成り立つ．よって，各軌道に制限して，$\ker \gamma \subset \mathrm{Im} f$ を示せば十分である．

$s \in X^G$ である場合は，$G(s) = s$ であるので，任意の $n \in \mathbb{Z}_p$ に対して，$\gamma(ns) = 0$ が成り立つ．よって，

$$f(0 \oplus ns) = ns$$

となるので，$\ker \gamma \subset \mathrm{Im} f$ が成り立つ．

$s \in X \setminus X^G$ である場合は，$G(s) \cong G$ であり，任意の $c \in C(G(s))$ は

$$c = \sum n_k g^k s \quad (\, n_k \in \mathbb{Z}_p\,)$$

と表すことができるので，$C(G(s))$ と $\Lambda = \mathbb{Z}_p[G]$ は Λ-加群として同一視することができる．従って，f と γ の制限によって得られる列

$$0 \to \overline{\gamma}\Lambda \xrightarrow{f}\to \Lambda \xrightarrow{\gamma} \gamma\Lambda \to 0$$

が完全であることを示せば良い．$\gamma f = 0$ であることはすでに示しているので，$\mathbb{Z}_p$ 上のベクトル空間として，

$$\dim_{\mathbb{Z}_p} \Lambda = \dim_{\mathbb{Z}_p} \gamma\Lambda + \dim_{\mathbb{Z}_p} \overline{\gamma}\Lambda = p$$

であることを示せば証明は完了する．Λ の元 $\lambda = \sum n_k g^k$ に対して，

$$\beta\lambda = \sum (1-g) n_k g^k = (n_0 - n_p) + (n_1 - n_0)g + (n_2 - n_1)g^2 + \cdots + (n_{p-1} - n_{p-2})g^{p-1}$$

であるので，

$$\lambda \in \ker\beta \iff n_0 = n_1 = \cdots = n_p$$

となることがわかる．従って，$\ker\beta$ は α によって生成される $\mathbb{Z}_p$ 上の 1 次元の部分ベクトル空間 $\mathbb{Z}_p\alpha$ である．

$$\dim_{\mathbb{Z}_p} \beta\Lambda = \dim_{\mathbb{Z}_p} \Lambda - 1 = p - 1 \text{ かつ } \alpha = \beta^{p-1} = \beta^k \beta^{p-k-1}$$

であるので，

$$\ker\beta = \mathbb{Z}_p\alpha = \mathbb{Z}_p \beta^k \beta^{p-k-1} \subset \beta^k \Lambda$$

が成立する．従って，

$$\dim_{\mathbb{Z}_p} \beta^{k+1}\Lambda = \dim_{\mathbb{Z}_p} \beta(\beta^k)\Lambda = \dim_{\mathbb{Z}_p} \beta^k\Lambda - 1$$

が成立し，帰納的に $\dim_{\mathbb{Z}_p} \beta^k\Lambda = p - k$ となることがわかる．従って，

$$\dim_{\mathbb{Z}_p} \overline{\gamma}\Lambda + \dim_{\mathbb{Z}_p} \gamma\Lambda = p - (p-k) + p - k = p = \dim_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$$

が成り立つ． □

定義 2.5.1. 各 $\gamma = \beta^k$ $(1 \le k \le p-1)$ に対して，

$$H_*^{\gamma}(X, Y; \mathbb{Z}_p) = H_*(\gamma C(X, Y; \mathbb{Z}_p))$$

とおくとき，$H_*^{\gamma}(X, Y; \mathbb{Z}_p)$ を **Smith ホモロジー群**という．

ホモロジー論の一般論と補題 2.5.1 より次の定理が得られる．詳しくは [8, Chapter Ⅲ, Theorem 3.3] を参照されたい.

定理 2.5.2. 各 $\gamma = \beta^k$ $(1 \le k \le p-1)$ に対して，$\mathbb{Z}_p$-係数のホモロジー群の完全系列

$$\cdots \to H_n^{\overline{\gamma}}(X, Y) \oplus H_n(X^G, Y^G) \xrightarrow{f_*} H_n(X, Y) \xrightarrow{\gamma_*} H_n^{\gamma}(X, Y) \to \cdots$$

が誘導される.

定理 2.5.4 及び定理 2.5.5 の主張が Smith の定理である．Smith の定理を証明する前に Smith ホモロジー群に関する次の不等式を示す必要がある.

定理 2.5.3. 任意の $n \ge 0$ と $\gamma = \beta^k$ $(1 \le k \le p-1)$ に対して，不等式

$$\dim_{\mathbb{Z}_p} H_n^{\gamma}(X, Y) + \sum_{k \ge n} \dim_{\mathbb{Z}_p} H_k(X^G, Y^G) \le \sum_{k \ge n} \dim_{\mathbb{Z}_p} H_k(X, Y)$$

が成立する.

証明. 定理 2.5.2 より得られるホモロジーの完全系列

$$\cdots \to H_{n+1}^{\overline{\gamma}}(X, Y) \to H_n^{\gamma}(X, Y) \oplus H_n(X^G, Y^G) \to H_n(X, Y) \to \cdots$$

より，不等式

$$\dim_{\mathbb{Z}_p} H_n^{\gamma}(X, Y) + \dim_{\mathbb{Z}_p} H_n(X^G, Y^G) \le \dim_{\mathbb{Z}_p} H_{n+1}^{\overline{\gamma}}(X, Y) + \dim_{\mathbb{Z}_p} H_n(X, Y)$$

が成立する．γ と $\overline{\gamma}$ を入れ替えても上記の不等式が成立することに気をつける．ここで，

$$a_n = \dim_{\mathbb{Z}_p} H_n(X^G, Y^G), \quad b_n = \dim_{\mathbb{Z}_p} H_n(X, Y),$$

$$c_n = \dim_{\mathbb{Z}_p} H_n^{\gamma}(X, Y), \quad \overline{c}_n = \dim_{\mathbb{Z}_p} H_n^{\overline{\gamma}}(X, Y)$$

とおく．このとき，上の不等式を γ と $\overline{\gamma}$ を交互に入れ替えて，並べると

$$\begin{gathered} c_n + a_n \le \overline{c}_{n+1} + b_n \\ \overline{c}_{n+1} + a_n + 1 \le c_{n+2} + b_{n+1} \\ \vdots \end{gathered}$$

となる．X は有限複体であるので，上記の不等式の全ての両辺を辺々足し合わせることにより，

$$c_n + \sum_{k \ge n} a_k \le \sum_{k \ge n} b_k$$

を得ることができる. □

定理 2.5.4. P を有限 p-群，X を有限 P-CW 複体とする．X が $\mathbb{Z}_p$-ホモロジー n-球面ならば，ある $-1 \leq r \leq n$ が存在して，X^P は $\mathbb{Z}_p$-ホモロジー r-球面となる．p が奇数ならば，$n-r$ は偶数である．ここで，$r=-1$ は $X^P = \emptyset$ を意味する．

証明．P は p-群であるので，位数 p の正規部分群 Z が存在して，

$$X^P = (X^Z)^{P/Z}$$

が成立する．X^Z は有限 P/Z-CW 複体であり，P/Z は p-群であるので，$|P| = p$ の場合に主張が正しいことを証明できれば，あとは帰納的に主張が正しいことが従う．

以下 $|P| = p$ とする．定理 2.5.3 より，不等式

$$\sum_{k \geq 0} \dim_{\mathbb{Z}_p} H_k(X^P) \leq \sum_{k \geq 0} \dim_{\mathbb{Z}_p} H_k(X) = 2$$

を得ることができる．$\sum_{k \geq 0} \dim_{\mathbb{Z}_p} H_k(X^P) = 1$ であると仮定すると，$\dim_{\mathbb{Z}_p} H_0(X^P) = 1$ であり，その他は 0 である．従って，$\chi(X^P) = 1$ である．しかしながら，補題 1.2.1 によると，

$$1 = \chi(X^P) \equiv \chi(X) = 0 \text{ or } 2 \mod p$$

と矛盾する．

$$\sum_{k \geq 0} \dim_{\mathbb{Z}_p} H_k(X^P) = 0$$

のときは $X^P = \emptyset$ であることを意味し，

$$\sum_{k \geq 0} \dim_{\mathbb{Z}_p} H_k(X^P) = 2$$

のときは X^P が $\mathbb{Z}_p$-ホモロジー r-球面 $(0 \leq r \leq n)$ であることを意味している．p が奇数である場合において，補題 1.2.1 は $\chi(X) = \chi(X^P)$ であることを意味する．従って，$n-r$ が偶数であることが従う． □

R を単位元をもつ可換環とする．有限 CW 複体 X と CW 部分複体 Y の対 (X,Y) が**相対 R-ホモロジー n-球面**であるとは，$\widetilde{H}_*(X,Y;R) \cong \widetilde{H}_*(S^n;R)$ が成立するときをいう．ここで，$\widetilde{H}(-;R)$ は R-係数の被約ホモロジー群を表している．

定理 2.5.5. P を有限 p-群，X を有限 P-CW 複体，Y を P-CW 部分複体とする．(X,Y) が相対 $\mathbb{Z}_p$-ホモロジー n-球面ならば，ある $1 \leq r \leq n$ が存在して，対 (X^P, Y^P) は相対 $\mathbb{Z}_p$-ホモロジー r-球面となる．p が奇数ならば，$n-r$ は偶数である．

証明．相対有限 CW-複体に関する補題 1.2.1 の主張より，$\sum_{k \geq 0} \dim_{\mathbb{Z}_p} H_k(X^G, Y^G) = 0$ とはならないことに気をつければ，定理 2.5.4 と同様に証明することができる． □

謝辞

まず初めに，6 年間もの長きに渡り手厚くご指導してくださった森本雅治先生に感謝の意を表したい．森本先生には，勉学だけに非ず，あらゆる面においてご指導いただきました．ここに，深い敬意と感謝を示し，心からの御礼を申し上げます．現指導教員である鳥居猛先生には，博士前期課程からの長い間お世話になりました．博士論文に関して多くのアドバイスをいただきました．深く感謝いたします．副指導教員をしていただいた石川雅雄先生には，博士論文に関するアドバイスをいただきました．厚く御礼申し上げます．門田直之先生には，昨年度からの 2 年の間，副指導教員をしていただきました．私の研究に関する質問に応じてくださりました．ここに，感謝の意を表します．数学科長である近藤慶先生には，本論文の研究に関する学会発表の機会を与えていただきました．厚く感謝申し上げます．Adam Mickiewicz 大学の Krzysztof M. Pawałowski 先生には，研究に関する様々な悩みや相談を聞いていただきました．ここに，深い感謝の意を表します．Adam Mickiewicz 大学の Piotr Mizerka さんには，私の研究に関する様々なアドバイスをしていただき，さらには彼自身の様々な結果を報告をしてくださいました．彼のおかげで博士論文がより良いものになりました．心よりの感謝を申し上げます．本論文は，参考論文 [1] に基づいているが，投稿した際にレフェリーから有益なアドバイスと議論の誤りを指摘をいただきました．深く感謝申し上げます．大学生活で出会った先輩，後輩，友人たちに感謝の意を述べます．彼らの支えや励ましによって救われた日々は博士論文の執筆において大きな支えになりました．最後に，9 年間もの長い大学生活の間，私のことを見守り，応援してくれた家族に心より感謝します．本当にありがとうございました．

3　参考文献・引用文献

参考文献

[1] S. Tamura: *Remarks on dimension of homology spheres with odd numbers of fixed points of finite group actions*, Kyushu Journal of Mathematics **74**, 2 (2020), 255–264.

[2] 田村 俊輔: 6 次元球面への有限群の *odd-fixed-point action* について，In RIMS Kôkyûroku. **2199**, RIMS Kyoto University, Kyoto, 2021.

引用文献

[3] A. Bak and M. Morimoto: *Equivariant surgery and applications*, in: Proc. of Conf. on Topology in Hawaii 1990, K.H. Dovermann (ed.), World Scientific Ubl., Singapore, 13–25, 1992.

[4] A. Bak and M. Morimoto: *The dimension of spheres with smooth one fixed point actions*, Forum Math. **17** (2005), 199–216.

[5] H. F. Blichfeldt: Finite collineation groups, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1917.

[6] A. Borowiecka: *$SL(2,5)$ has no smooth effective one-fixed-point action on S^8*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **64** (2016), 85–94.

[7] A. Borowiecka and P. Mizerka: *nonexistence of smooth effective one fixed point actions of finite Oliver groups on low-dimensional spheres*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **68** (2018), 167–177.

[8] G. E. Bredon: Introduction to Compact Transformation Groups, Academic Press, New York, 1972.

[9] R. Brauer: *Über endliche lineare Gruppen von Primzahlgrad*, Math. Ann. **169**, (1967), 73–96.

[10] N. P. Buchdahl, S. Kwasik and R. Schultz: *One fixed point action on low-dimensional spheres*, Invent. Math. **102** (1990), 633–662.

[11] P. E. Conner and E. E. Floyd: *Differentiable Periodic Maps*, Springer-Serlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1964.

[12] J. H. Conway and D. A. Smith, On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic, and symmetry, A K Peters Ltd., Natick, MA, 2003.

[13] S. Demichelis: *The fixed point set of a finite group action on a homology four sphere*, L ' Enseign. Math. **35** (1989), 107–116.

[14] D. Gorenstein, Finite groups, Harper and Row, New York, 1968.

[15] M. Furuta: *A remark on a fixed point of finite group action on S^4*, Topology **28** (1989), 35–38.

[16] The GAP Group. GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.11.1, 2021.

[17] 川久保 勝夫: 変換群論, 岩波書店, 1987.

[18] H. Kurzweil and B. Stellmacher: The theory of finite groups - An introduction. 1st, ed. Universitex - Springer, 2003.

[19] S. Illman: *Representations at fixed points of actions of finite groups on spheres*, in Current trends in algebraic topology, Conference Proceedings, Canadian Mathematical Society, Volume **2**, Part 2, (1982), 135–155.

[20] E. Laitinen and M. Morimoto: *Finite groups with smooth one fixed point actions on spheres*, Forum Math. **10** (1998), 479–520.

[21] E. Laitinen and P. Traczyk; *Pseudofree representations and 2-pseudofree actions on spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 151–157.

[22] S. Lang: Algebra, Springer, New York, NY, (2002).

[23] J. H. Lindsey: *Complex linear groups of degree six*, Canad. J. Math. **23** (1971), 771–790.

[24] P. Mizerka: *Exclusions of smooth actions on spheres of the non-split extension of C_2 by $SL(2,5)$*, accepted by Osaka J. Math.

[25] M Morimoto: *On one fixed point actions on spheres*, Proc. Japan Acad. **63** Ser.A (1987), 95–97.

[26] M. Morimoto; *S_4 does not have one fixed point actions*, Osaka J. Math. **25** (1988), 575–580.

[27] M. Morimoto: *Most of the standard spheres have one fixed point actions of A_5*, in: Proc. Conf. Transformation Groups, Osaka 1987, ed. K. Kawakubo, Lect. Notes in Math. **1375**, 240–258, Springer Verlag, Heidelberg, 1989.

[28] M. Morimoto: *Most standard spheres have one fixed point actions of A_5 .II*, *K*-Theory **4** (1991), 289–302.

[29] M. Morimoto and S. Tamura: *Spheres not admitting smooth odd-fixed-point actions of S_5 and $SL(2,5)$*, Osaka J. Math. **57**, 1 (2020), 1–8.

[30] R. Oliver: *Fixed point sets of group actions on finite 非輪状 complexes*, Comment. Math. Helv. **50** (1975), 155–177.

[31] R. Oliver: *Fixed point sets and tangent bundles of actions on disks and Euclidean spaces*, Topology **35** (1996), 583-–615.

[32] T. Petrie: *One fixed point actions on spheres I*, Adv. Math. **46** (1982), 3-–14.

[33] C. U. Sanchez: *Actions of groups of odd order on compact, orientable manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **54** (1976), 445–448.

[34] J. P. Serre: Linear representation of finite groups, GTM, 42, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[35] E. Stein: *Surgery on products with finite fundamental group*, Topology **16** (1977), 473—493.