| | |
|---|---|
| 氏　　名 | 田村　俊輔 |
| 授与した学位 | 博　士 |
| 専攻分野の名称 | 理　学 |
| 学位授与番号 | 博甲第　　６６２５　　号 |
| 学位授与の日付 | ２０２２年　３月　２５日 |
| 学位授与の要件 | 自然科学研究科　　数理物理科学専攻<br>（学位規則第４条第１項該当） |
| 学位論文の題目 | ホモロジー球面上の有限群の滑らかな odd-fixed-point action の非許容性に関する研究 |
| 論文審査委員 | 教授　鳥居　猛　　教授　石川　雅雄　　准教授　門田　直之 |

## 学位論文内容の要旨

多様体上の有限群の作用による不動点集合がちょうど 1 点から成るとき，T. Petrie はその作用を one-fixed-point action と呼んだ．これに倣い，多様体上の有限群の作用による不動点集合が奇数個の点から成るとき，その作用を odd-fixed-point action と呼ぶことにする．本論文での主な研究成果は，幾らかの非可解な有限群 G に対して，G の odd-fixed-point action を許容しないホモロジー球面の次元を見出したこと及び 6 次元ホモロジー球面上の odd-fixed-point action をもつ有限群の新たな必要条件を得たことである．

G を有限群，Σを効果的で滑らかな G-作用をもつ滑らかなホモロジー球面とする．Σ上の G-不動点での接空間は実 G-加群であり，それを接 G-加群と呼ぶ．　G が 6 次交代群 A_6 である場合に次の結果を得た．

**定理 1.** Σ上の A_6 の odd-fixed-point action が存在するならば，ある奇数個の A_6-不動点での接 A_6-加群は 8 次元の既約な実 A_6-加群を既約成分にもつ．

定理 1 は「Σが mod 2-ホモロジー球面」という条件でも成り立ち，これにより A_6 の二重被覆群である特殊線形群 SL(2,9)に対しても，定理 1 と同様の結果を得ることができた．さらに，A_6 を指数 2 あるいは 4 の部分群にもつ 6 次対称群 S_6，射影一般線形群 PGL(2,9)，10 次の Mathieu 群 M_10 及び A_6 の自己同型群 Aut(A_6)に対しても，定理 1 を利用することにより，次の結果を得ることができた．

**定理 2.** G を S_6，PGL(2,9)，M_10 または Aut(A_6)とする．Σ上の G の odd-fixed-point action が存在するならば，任意の G-不動点での接 G-加群の A_6 への制限は 8 次元の既約な実 A_6-加群を既約成分にもつ．

定理 1 と定理 2 を用いることにより，G が A_6，SL(2,9)，S_6，PGL(2,9)，M_10 あるいは Aut(A_6)である場合に，G の odd-fixed-point action を許容しないホモロジー球面の次元を列挙することができた．

次に，6 次元ホモロジー球面上の odd-fixed-point action をもつ有限群の必要条件に関する結果を述べる．以下，ホモロジー球面Σの次元を 6 次元に限定する．G が可解である場合に次の結果を得た．

**定理 3.** 有限可解群 G の作用によるΣの G-不動点集合のオイラー標数は偶数である．

G が複素数体 C 上の 3 次の一般線形群 GL(3,C)の有限部分群である場合に次の結果を得た．

**定理 4.** GL(3,C)の有限部分群 G がΣ上の odd-fixed-point action をもつならば，G は A_5 あるいは A_5×C_2 のいずれかと同型である．ここで，A_5 は 5 次交代群，A_5×C_2 は A_5 と位数 2 の群 C_2 との直積を表している．

## 論文審査結果の要旨

多様体や胞複体上にどのような有限群が作用するか，また，有限群の作用が存在するとき，その不動点集合はどのようになってるかは変換群論において重要な問題である。田村俊輔氏はいくつかの具体的な有限群に対して，奇数個の不動点集合をもつようなホモロジー球面の次元に関する必要条件を得た。また，6次元ホモロジー球面上に奇数個の不動点をもつような作用を許容する有限群に関する必要条件を得た。

群が多様体に作用しているとき，その不動点における接空間に群の作用が誘導され，群の表現と考えることができる。奇数個の不動点集合をもつ有限群作用を許容するホモロジー球面の次元に関する研究では，まず，交代群 $A_6$ が作用すると仮定したときの接空間に誘導される表現に関する条件を求め，そのことを利用して，$A_6$ を部分群として含むいくつかの具体的な有限群に対して，奇数個の不動点をもつ作用を許容するホモロジー球面の次元に関する必要条件を求めている。

また，6次元ホモロジー球面上の有限群作用についての研究では，まず，有限可解群が6次元ホモロジー球面に作用していれば，その不動点集合のオイラー標数が偶数であることを示し，したがって，有限可解群は6次元ホモロジー球面に奇数個の不動点をもつ作用を許容しないことを示している。また，一般線形群GL(3,C)の非可解な有限部分群で奇数個の不動点集合をもつ可能性があるのは$A_5$あるいは$A_5 \times C_2$のいずれかに同型であることを示している。

これらの研究は大変優れており，一部の内容は既に論文 Shunsuke Tamura, “Remarks on dimension of homology spheres with odd numbers of fixed points of finite group actions”, Kyushu Journal of Mathematics, Vol.74, No.2, 255-264 (2020) として発表されている。また，これらの研究の基となった森本雅治名誉教授との共著論文も Masaharu Morimoto and Shunsuke Tamura, “Spheres not admitting smooth odd-fixed-point actions of $S_5$ and SL(2,5)”, Osaka Journal of Mathematics, Vol.57, No.1, 1-8 (2020) として発表されている。その他にも国内や海外の研究集会やセミナーで口頭発表をおこなっており，学位審査の基準を十分満たしていると判断できる。したがって，最終試験の結果を「合」と判断した。