氏　　　名	豊澤　由貴
授与した学位	博　士
専攻分野の名称	理　学
学位授与番号	博甲第　　　６４８７　　　号
学位授与の日付	２０２１年　９月　２４日
学位授与の要件	自然科学研究科　　　　数理物理科学専攻 （学位規則第４条第１項該当）
学位論文の題目	On hook formulas and poset structures concerning cylindric Young diagrams （巡回的 Young 図に関する半順序構造とフック公式について）
論文審査委員	准教授　鈴木　武史　　　教授　石川　雅雄　　　教授　寺井　直樹

学位論文内容の要旨

本学位論文は 2 部構成である。

第 1 部は巡回的 Young 図上のフック公式について述べる。巡回的 Young 図とは，cylinder $C_{m,\ell} = \mathbf{Z}^2/\mathbf{Z}(m,-\ell)$ の非自明な順序フィルターのことであり，巡回的標準盤はその上の標準盤である。ここで，$C_{m,\ell}$ 上の順序は $\mathbf{Z}^2$ 上の自然な順序から誘導されるものである。つまり，$C_{m,\ell}$上 $x \leq y$ は $\pi(\tilde{x}) = x, \pi(\tilde{y}) = y$で$\mathbf{Z}^2$上 $\tilde{x} \leq \tilde{y}$ であるものが存在することを意味する。ただし，π は $\mathbf{Z}^2$ から $C_{m,\ell}$ への射影を表す。古典的な Young 図上の標準盤の個数に関しては様々な公式が知られており，その一つがフック公式と呼ばれるもので，これは 1954 年に Frame–Robinson–Thrall によって与えられた。また近年，この公式 が Naruse 氏によって古典的な歪 Young 図への拡張された。この部では，古典的な歪 Young 図を特別な場合として含む形でこの公式の“巡回版”を予想として提示する。そして，“bar case”, “hook case”と呼ばれる二つの特別な場合について正しいことを示した。

第 2 部は巡回的 Young 図における半順序集合構造について述べる。巡回的 Young 図θに関して次の二つの半順序集合を自然に考えることができる：(1) 一つはθ自身の半順序に関して，(2) θ上の順序フィルターの包含関係を半順序とみなしたものについてである。そのための準備として A 型アフィンルート系R，正ルート系R_+，単純ルート系 Π 及びアフィン Weyl 群Wを導入する。θ の各元に対応する単純鏡映 $s(x)$ をθ 上の線型拡張（linear extension）ε を用いて並べることによりできる半無限ワードを考える：

$$s(p_1)s(p_2)s(p_3)\cdots \qquad (p_k = \varepsilon^{-1}(k))$$

これを$w_{\theta,\varepsilon}$と書こう。$w_{\theta,\varepsilon}$ は完全可換（fully commutative)と呼ばれる性質を持ち，この性質によって半順序構造を考えることができる。(1)については，θ と $w_{\theta,\varepsilon}$の転倒集合（inversion set）

$$R(w_{\theta,\varepsilon}) = \{s(p_1)\cdots s(p_{k-1})\alpha(p_k) \mid k \leqq 1\}$$

との順序同型性について考える。また, (2)については, θ の順序フィルター全体 $F(\theta)$ と半無限 Bruhat 区間

$$[e, w_{\theta,\varepsilon})_R := \{s(p_1)\cdots s(p_k) \mid k \geqq 1\} \subset W$$

との順序同型性について考える。

論文審査結果の要旨

本学位論文は巡回的Young図に関する組合せ論についての研究結果が述べられている。

2部構成となっており，第1部では巡回的skew Young図に対するhook公式がテーマとなっている。

Young図上の標準盤の個数に関するhook公式については，skew Young図への拡張が，近年，励起図の概念を用いて成瀬氏により得られたところであるが，本論文では，これをさらに巡回的skew Young図に拡張した等式を予想として提示し，いくつかの具体的系列に対して証明を与えている。

予想の等式はskew Young図に対する公式と類似しているが，巡回的励起図が無限に存在することにより，有理数の無限和として標準盤の個数が与えられている点が特徴である。また，巡回的励起図を具体的に記述することにより等式を証明する過程も興味深い。

第2部では半順序構造に焦点があてられる。まず通常の有限Young図について考えると，Young図Pに対して，

(1) P自身　　(2) Pの順序フィルターの集合

という2つの半順序集合が考えられる。そして，これらの半順序構造について，Pに付随するルート系およびワイル群のminiscule元を用いた記述がStembridge氏およびProctor氏等によって与えられている。本論文では，これらの結果を巡回的Young図に拡張することに成功している。拡張においては，巡回的Young図が無限半順序集合であるため，miniscule元に相当するものを半無限wordとして構成するなど，本質的に新しいアプローチが必要となっている。

巡回的Young図に関する組合せ論は，表現論および幾何学的関心からも近年注目されているところであるが，第1部のhook公式に関する研究は独創性が高く，論文としてもすでに学術誌に掲載受理されている。第2部に関しても，巡回的Young図の無限半順序集合としての構造に注目した研究は，世界でまだ行われていなかった方向の研究結果であり，その意義は大きいと考えられる。

以上により，本研究および論文は，学位を授与するにふさわしいと判断された。