「確率は事象についての情報に対して適用される」という認識を育む教授単元の一考察 *

石　橋　一　昴 **

要　約

複雑化する現代社会では，時々刻々と変化する情報を正しく評価して意思決定を行うために，「確率は事象についての情報に対して適用される」という認識が求められる．しかしながら現在の数学教育ではそのような認識の育成を意図した指導ができていない．また，そのような認識を発達させるためには，形式的な確率を指導するだけでは不十分であり，公式な用語を導入することなく本質的な認識を促す指導を早期の段階から実施し，それを長期的な展望の下で段階的に発達させていくことを企図する必要がある．この課題意識は，数学的内容に関連する基本的な数学的アイディアを，小学校から高等学校までを一貫して扱うための教材である教授単元の開発と整合的である．そこで本稿では，「確率は事象についての情報に対して適用される」という認識を育むための教授単元の開発を目的とした．結果として，モンティ・ホール問題を題材として，教授単元を開発した．そして，この教授単元を用いた小学校，中学校，高等学校での指導の一例を示した．

キーワード：確率の認識，教授単元，モンティ・ホール問題，条件付き確率，確率，意思決定

1．本稿の背景と目的

情報化やグローバル化が進展する社会においては，多様な事象が複雑さを増し，変化の先行きを見通すことが一層難しくなってきている（文部科学省，2019，p.2）．そのような社会的背景において，確率を用いて不確実性を評価し，意思決定する能力が全市民に求められている（Bataneroほか，2016）．意思決定においては「幅広い選択肢の検討が質の高い意思決定につながると考え，基準や過程，リスク等を吟味しながら，定式化から数学的結果までの過程を繰り返す」（西村・山口，2018）ことが要求される．複雑化する今日社会では答えのない課題に向き合い，適切な問いを立て，入手可能な限られた情報をもとに妥当な解に至らなければならない（松尾，2016）．そのような環境における意思決定は，リスク下における意思決定と呼ばれる（竹村ほか，2004）．ゆえにリスクは生活の主要な一側面であり，確率はそれを処理するための数学的ツールであることから（Borovcnik & Kapadia，2018），意思決定において確率は決定的に重要である．

このような社会においてDevlin（2014）は，確率は事象に対して適用されるのではなく，事象についての情報に対して適用されるという認識が重要であると指摘する．例えば，確率は事象に対して適用されるとは，さいころや硬貨などの同一条件下で多数回の試行を行うことができる事象に対して適用することである．また，事象についての情報に対して適用されるとは，それとは異なり同一条件下で多数回の試行を行うことのできない，換言すれば「さいころの1の目が出る確率は$\frac{1}{6}$である」というような，客観的に完全な確率モデルを設計することはできない（竹村，2014）事象に対して適用することである．複雑化する現代社会

*令和元年12月30日受付，令和２年５月２日決定
**岡山大学大学院教育学研究科

では，時々刻々と変化する情報を正しく評価して意思決定を行うために，確率は我々がその事象に対して有する情報を定量化したものという認識が求められている．しかしながら我が国の数学教科書で扱われている問題は，確率は事象に対して適用されるという認識で解くことができる問題ばかりであり（石橋，2019c），そのような認識を育成できているとは言い難い．今日社会における確率の役割や重要性を考慮すれば，学校数学においてそのような認識を育むことは急務である．

確率は事象についての情報に対して適用されるという認識は，確率の数学的内容でいえば条件付き確率を考える際に重要となる（石橋，2018）．しかし形式的な条件付き確率を指導しても，そのような認識を育むことはできない（石橋，2018）．すなわち，条件付き確率の公式を導入することなく，その本質的な認識を促す指導を早期の段階から実施し，それを長期的展望の下で段階的に発達させていくよう企図することが求められている（福田ほか，2018）．この課題意識は，Wittmannの教授単元のアイディアと整合的である（福田ほか，2018）．教授単元とは，数学的内容に関連する基本的な数学的アイディアを，小学校から高等学校までを一貫して扱うための教材である．

以上より本稿では，確率は事象についての情報に対して適用されるという認識を育むための教授単元を開発することを目的とする．まずは，教授単元を開発するための理論的枠組みについて整理する（第2章）．次に教授単元を開発し，それを用いた指導の一例を示す（第3章）．

2．理論的枠組み

⑴　確率の認識

さいころの1の目が出る確率は$\frac{1}{6}$であるというような単純な確率については，「確率は事象に対して適用される」という認識でも十分であるし，そう考える方が自然である（石橋，2018）．しかし現実場面で扱われる確率はすべて条件付き確率であり（竹村，2014），それは情報によって刻一刻と変わるという性格のある確率に数理を与える（柳川，2007）．そこでは，確率は事象についての情報に対して適用されるという認識が不可欠である（Devlin，2014）．例えば，「リサは2つの白玉と2つの黒玉が入った箱を受け取りました．リサは，箱から玉を取り出し，それを見ずに横に置きました．リサが，2つ目の玉を取り出してみると白でした．最初の玉が白である可能性は，黒である可能性と比べて，小さいでしょうか，等しいでしょうか，それとも大きいでしょうか？」（松浦，2006，p.146）という，時間軸の問題と呼ばれる問題では，後に引いた玉の色の情報が，先に引いた玉の色の確率に影響を与えるにもかかわらず，既に取り出された玉の色の確率は変わらないと考えてしまうという困難性が有名である（例えば，五十嵐，2014）．これは，確率が事象に対して適用されると考えていることから，「1つ目の玉」にはある確率が紐ついていて，それは新たな情報が付加されても変わらないと考えるというものである．このように，確率は事象に対して適用されるという認識では，条件付き確率についての問題を解く際に不十分であることから，確率は事象についての情報に対して適用されるという認識が求められる．

その一方で，現在の学校数学でそのような認識を育む指導がなされているかといえば，そうではない．条件付き確率は数学Aで扱われているが，教科書の問題は，確率は事象に対して適用されるという認識で解く方が自然である問題ばかりである（石橋，2019c）．例えば，坪井ほか（2011）では，条件付き確率の例題として，1から10までの番号をつけた10枚のカードから1枚を取り出す試行を行う場面において，取り出したカードの番号が奇数であることがわかっているとき，その番号が3の倍数である確率を求める問題が扱われている．この問題では，取り出されたカードの番号が奇数であったという条件によって，取り出されカードの番号が3の倍数である確率が$\frac{3}{10}$から$\frac{2}{5}$に変わったと考えるよりも，「1，3，5，7，9の番号をつけた5枚のカードから1枚を取り出す試行を行う場面において，取り出したカードの番号が3の倍数である確率を求める問題」として

考える方が簡単で，かつ既習事項との接続を考えても自然である．そのように考えれば，確率は事象に対して適用されるという認識のままで答えを出すことができる．すなわち，現在の確率指導では，確率は事象についての情報に対して適用されるという認識を十分に育むことができていないと考えられる．

以上より，今日的な社会において確率を用いて意思決定できる市民の育成のため，確率は事象についての情報に対して適用されるという認識を育むような教材の開発が求められている．

⑵　教授単元

本節では教授単元について，福田ほか（2018, pp.339-340）を引用して概観する．

教授単元は数学的内容に関連する基本的な数学的アイディアがどのように発達するのかを具体的に示す授業例であり，機械論的・原子論的な数学の指導と学習の反省を通して提起されたものである（國本，1998）．Wittmann（1984, p.30）は，教授単元を開発するための４つの条件を次のように示している（図１）．

1）数学指導の中心的な目的・内容・原理をある水準において表現している．
2）その水準を超える重要な数学的内容・プロセス・手続きと結びついているだけでなく，数学的活動の豊かな源泉でもある．
3）柔軟性をもち，クラスの特殊条件に容易に対応することができる．
4）数学指導の数学的・心理学的・教育学的な側面を統合しており，実証的な研究のための豊かな場を形成する．

図１　教授単元の構成要素（Wittmann，2001, p.2）

教授単元はこれら４つの条件を充たすものである．条件２)や条件３)によって示唆されるように，教材内容や教授方法などを適切に調節すれば，小学校用の教材にも中学校や高等学校用の教材にもなり得る．すなわち，教授単元は，小学校から高等学校までを一貫するモデル教材としての機能を有する．

また，これら４つの条件は，それぞれ「目的」・「題材」・「問題（単元の文脈から生じる数学的問題）」・「背景（単元に関する主に数学的で時々心理学的な背景）」と簡略な言葉で表すことができる（Wittmann，1984, p.30）．岩崎（2007, p.185）は，教授単元の４つの条件の関係について，次のように説明している．

「『目的』は条件１）を基盤にもち，『題材』『問題』とはそれぞれ条件２）と３）の要請に応えなければならない．そして『背景』は条件４）を的確に明示しなければならない．したがって教授単元はこれら４項目からなる教材事例あるいはその集合体と考えてよい．」（岩崎，2007, p.185）

Wittmann（1984, p.31）は教授単元の一例として「アリスモゴン（Arithmogons）」を示している．教授単元「アリスモゴン」では，三角と四角のアリスゴモン（図２）が「題材」であり，その「問題」は，いくつかの頂点や辺に与えられている数から他の数を求めることである．数学的にいえば，アリスモゴンは，頂点や辺の数の一次独立や方程式の体系に基づく体系的解法などの「数学的背景」をもち，数学的構造の正n角形への一般可能性を備えている．そして，その「目的」は，問題を解決する過程で，加法や減法やこれらの合成の演算探求を通して生徒が数学することだけでなく，探求することや発見すること，一般化や関数のアイディアを発達させることにある．児童・生徒の実態や学校種などに応じて，様々な学習目標と展開を想定することが可能である．

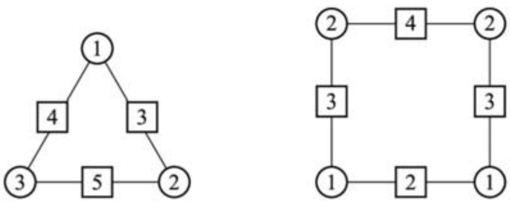

図２　アリスモゴン（Wittmann，1984, p.31）

⑶　条件付き確率の認識の発達段階

上述のように，児童・生徒の実態や学校種などに応じて，様々な学習目標と展開を想定して教授単元を開発するためには，児童・生徒の実態を捉えるための枠組みが必要である．そこで本稿では，Tarr & Jones（1997）により構築された「条件付き確率の認識の発達段階」によって，児童・生徒の実

表1　条件付き確率の認識の発達段階（強調原文）（Tarr & Jones，1997）

第1段階（主観的）	第2段階（過渡的）	第3段階（非形式な量的）	第4段階（数的）
・反復する状況と反復しない状況のどちらにおいても，「確実」および「不可能」な事象が起こるときを認識する. ・一般に，反復する状況と反復しない状況のどちらにおいても，事象の条件付き確率を考える際に主観的推論を使用する. ・予測を立てる際に，与えられた数的情報を無視する.	・反復しない状況においていくつかの事象の確率が変わることを認識するが，その認識は不完全であり，いつも直前に起こった事象に制限される. ・条件付き確率を決定する際に，数量を不適切に使用する．例えば，標本空間に2つの結果が含まれていれば，いつも2つの結果は同様に確からしいと仮定する. ・条件付き確率についての意思決定をする際に，代表性が困難性の要因として働く. ・主観的な判断に戻ってしまうかもしれない.	・反復しない状況において全ての事象の確率が変わることを認識する. ・反復する状況と反復しない状況のどちらにおいても，2つの事象の関連性を判断する際に，標本空間を正しく構成し続けることができる. ・不正確ではあるが，反復しない状況での確率の変更を定量化できる.	・反復する状況と反復しない状況のどちらにおいても，確率値を割り当てる. ・反復する状況と反復しない状況のどちらにおいても，試行の前後の事象の確率を比較するために数的推論を使用する. ・2つの事象が関連しているために必要な条件を述べる.

態を捉えることとする．Tarr & Jones（1997）の枠組みを採用する理由は次の3つである．第1に，それが反復しない状況（Without replacement situations）における条件付き確率の認識を記述した枠組みだからである．確率は事象に対して適用されるという認識は，多数回の試行を前提とする客観的な確率解釈に基づいているといえるから（Devlin，2014; 竹内，2018），反復する状況（Replacement situations）下で適用される認識である．一方で，確率は事象についての情報に対して適用されるという認識は，多数回の試行を前提としない主観的な確率解釈に基づいているといえるから（Devlin，2014; 竹内，2018），反復しない状況下でも適用される認識である．第2に，上述した柳川（2007）の論考などから，確率が事象についての情報に対して適用されるという認識は，条件付き確率に関わる認識であると考えられるからである．第3に，その段階が，条件付き確率を数学モデルを用いずに非形式に認識する段階から，数学モデルを用いて形式的に認識する段階として表されているからである．これは，教授単元の考え方と整合的である．

Tarr & Jones（1997）はアメリカ合衆国の4年生から8年生の生徒15名を対象に，質問紙調査とインタビュー調査を実施し，条件付き確率の認識の発達段階を4つの段階で記述している（表1）．また，各段階について，Tarr & Lannin（2005）は飴の問題（図3）を題材とし，表1の各段階に説明を与えている．そこで以下ではTarr & Lannin（2005）に基づいて各段階の様相を説明する．

第1段階の学習者は，主観的な判断に頼ってしまう．そのため，事象の結果は自ら制御できると信じており，与えられた情報は無視してしまう．例えば図3において，別のぶどう味の飴を取り出す可能性は変わりましたか？と尋ねられたら，「いいえ．私はぶどう味の飴が好きだから，ぶどう味だけが欲しいです．」と答えるという具合である．その一方で，確実に起こる事象や，不可能な事象については認識することができる．

飴の入れ物（瓶）には，ぶどう味４つ，さくらんぼ味３つ，りんご味2つ，レモン味１つの飴が入っています．今，ぶどう味の飴を１つ取り出して食べました．このとき，この瓶から別のぶどう味の飴を取り出す可能性は変わりますか？あるいは，ぶどう味の飴を取り出す前と同じですか？さくらんぼ味の飴を取り出す可能性はどうですか？…りんご味の飴についてはどうですか？…レモン味の飴についてはどうですか？説明してください．

図３　飴の問題（Tarr & Lannin，2005，p.223）

第２段階の学習者は，条件付き確率を考える際に，定量的な情報を扱うことができるが，直前の結果にあまりにも多くの信頼を置いてしまう傾向がある．これは，代表性ヒューリスティックの影響であると考えられている．代表性ヒューリスティックとは，事例の典型例や代表例が，基底事例として選択されやすいというものである（松浦，2006）．この段階の学習者は，図３において，ぶどう味の飴が取り出されたことにより，瓶の中のぶどう味の飴の数が減ったため，ぶどう味の飴を取り出す可能性は下がったと主張することはできる．しかし，他の味の飴については，瓶の中の数が変わっていないので，取り出す可能性は変わっていないと主張する．

第３段階の学習者は，条件付き確率を考える上で，情報が果たす役割について適切に認識することができる．この段階の学習者は，正確な確率値を割り当てることはできないが，標本空間を正しく構成し，条件が加わればそれを適切に更新することができ，全ての事象の条件付き確率が反復しない状況において変化することを認識している．したがって図３においては，「レモン味の飴はぶどう味の飴との個数の差が３つあったが，ぶどう味の飴が１つ取り出されたことによりその差が２つになったので，レモン味の飴を取り出す可能性が高まった.」という具合に説明することができる．

第４段階の学習者は，問題を解釈する時に，確率値を割り当てることができる．また彼らは，２つの事象が独立であるか従属であるかが重要であることも認識している．図３においては，「ぶどう味の飴を取り出す前は，ぶどう味の飴を取り出す確率は $\frac{4}{10}$ だったが，１つ取り出された今は，ぶどう味の飴を瓶に戻さない限り，その確率は $\frac{3}{9}$ である.」という具合である．

３．教授単元の開発

(1)　教授単元の開発

前章で整理した理論的枠組みに基づいて，本稿では教授単元「モンティ・ホール・パラドックス」（図４）を開発した．前章で引用した岩崎（2007，p.185）に基づき，教授単元の各構成要素についてそれぞれ見ていくと，まず「目的」は，Bataneroほか（2016）より今日の確率教育に要請されている確率を用いた意思決定と，そこで重要な「確率は事象についての情報に対して適用される」という認識である（条件１）．次に「題材」は，モンティ・ホール問題とする．その理由は，確率は事象に対して適用されると考えた場合の答えと，事象についての情報に対して適用されると考えた場合の答えが異なり，事象についての情報に対して適用されると考えた場合の答えが正答になるからである．第２章第１節で挙げた坪井ほか（2011）のカードの問題の例を踏まえて考えると，確率は事象に対して適用されると認識している場合は，モンティがはずれの扉を１枚開けた後に残った２枚の扉に対して，等確率を割り当ててしまうと考えられる．一方で確率は事象についての情報に対して適用されると認識している場合は，確率の変化を適切に処理し，２枚の扉に対して等確率を割り当てないと考えられる．坪井ほか（2011）の問題ではどちらの認識でも答えが同じであったが，モンティ・ホール問題では確率は事象についての情報に対して適用されると認識している場合のみ正解となるので，そのような認識が必要となる題材として有効であると考えられる（条件２）．そして「背景」は，条件付き確率とそれに関して成り立つベイズの定理である．これは，確率は事象についての情報に対して適用されるという認識が，条件付き確率の問題解決において必要となることから，このように設定する（条件４）．

最後に「問題」については，教授単元の性格上様々な発達段階の学習者に対して出題できる形式である必要があるから，まずは一般的な形で示し，表1の各段階と対応させる形で小問を4問設定した（条件3）．以下では，各小問について説明する．

問①は，表1の第1段階の学習者に対する問題である．第1段階の学習者は，事象の確率が変わることは認識できないが，確実または不可能な状況は認識できる．ゆえに条件付き確率を問われる事象が確定している状況であれば，事象の確率が変わることを認識することができると考えられる．実際，石橋（2019a）の実施した調査では，そのような学習者の存在が確認されている．

問②は，表1の第2段階の学習者に対する問題である．この段階の学習者は，条件付き確率を考える際に直前の結果にあまりにも多くの信頼を置いてしまう．モンティ・ホール問題における直前の結果とは，モンティによって開けられなかった扉であると考えられる．これに対しては多くの学習者が，最初の扉の枚数が3枚であった場合，モンティが1枚開けた後に残った2枚の扉について等確率を仮定してしまう（「等確率バイアス」と呼ばれる）ことが知られている（例えば，Lecoutre，1992）．等確率を仮定してしまうことは第2段階の学習者の特徴の一つでもあるので，この傾向はより一層顕著であろう．そこで問②では，はずれの扉を99枚にした．はずれの扉を増やすことで，オリジナルなモンティ・ホール問題では等確率バイアスを示していた学習者がそれを示さなくなり，加えて自身の誤りに反省的になることが知られている（例えば，Saenenほか，2015）．

問③は，表1の第3段階の学習者に対する問題である．この段階の学習者は，正確な確率値を割り当てることはできないが，情報により事象の確率が変わることを認識している．ゆえに第3段階の学習者に対しては，オリジナルなモンティ・ホール問題を提示する．問③は，条件付き確率を用いた確率計算を行わずとも，余事象の考え方を適用することによって解決できる（三次・服部，2009）．

具体的には，「最初にあなたが1番の扉を選んだとき，その扉の後ろに車がある確率は $\frac{1}{3}$ である．

目的：・確率を用いた意思決定
・「確率は事象についての情報に対して適用される」という認識
題材：モンティ・ホール問題
問題：あなたは同一の扉を n（$n \geqq 2$）枚見せられる．そのうち1枚の裏に車（当たり）がある．他の $n-1$ 枚の裏には山羊（はずれ）がいる．それぞれの扉の裏に車がある確率は，$p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ である．あなたは扉を1枚選ぶように求められるが，すぐには開けてはいけない．それがすむと，どこに車があるかを知っているモンティが，残った $n-1$ 枚の扉のうち，$n=2$ のときは残った1枚を開き，その扉の裏に山羊がいれば，あなたは車をもらえる．それ以外のとき（$n \geqq 3$）は $n-2$ 枚を開く．モンティは必ず，はずれだとわかっている扉を開き，選択の余地があるとき（あなたが最初に選んだ扉の裏に車がある場合）には，開ける扉をランダムに選ぶ．はずれの扉を開いた後，モンティはあなたに，まだ開いていないもう1枚の扉に変えるか，元の選択にとどまるか，選ぶ機会を与える．そこで選んだ扉の向こうにあるものがもらえる．どうすればいいだろう．

① $n=2$ で $p_1=p_2$ とします．今，あなたが1番の扉を選択し，モンティが2番の扉を開けると，2番の扉の裏には山羊がいました．このとき，あなたが選んだ1番の扉の裏に車がある可能性はどれくらいですか．また，モンティが2番の扉を開ける前は，1番の扉の裏に車がある可能性はどれくらいですか．

② $n=100$ で $p_1=p_2=p_3=\cdots=p_{100}$ のとき，あなたはどうしますか？

③ $n=3$ で $p_1=p_2=p_3$ のとき，あなたはどうしますか？

④ $n=3$ で $p_1=\frac{55}{100}, p_2=\frac{10}{100}, p_3=\frac{35}{100}$ とします．今，あなたが1番の扉を選択し，モンティが2番の扉を開けたとき，あなたはどうしますか？

背景：条件付き確率，ベイズの定理

図4　モンティ・ホール・パラドックス

そして残った2つの扉のうち，どちらかに車がある確率は $\frac{2}{3}$ である．ここで，モンティは，もし車が2番の扉の後ろにあれば必ず3番の扉を開けるし，もし車が3番の扉の後ろにあれば必ず2番の扉を開ける．ゆえに，車が2番または3番の扉の後ろにある場合，あなたは選択を変えれば車を得ることができる．でももし選択を変えなければ，1番の扉の後ろに車があった場合にしか，車を得ることはできない．」という具合である．

問④は，表1の第3段階の学習者に対する問題である．この段階の学習者は，確率を計算して事象の確率が変わることを説明できる．そこで問④では，最初の3枚の扉の当たる確率が等確率でない問題設定とした（市川・下條，2010）．勿論，問①，②，③も確率を計算して解くことはできる．しかし，確率を計算するよりも既に述べたように考える方が自然であるし，問④は確率を適切に計算することができなければ解けないことから，第4段階の学習者には問④が適切であると考える．問③を扱うことで条件付き確率の応用を目標とした授業実践が幾つか報告されているが（例えば，田中・上野，2013），そこでは余事象を適用した解答の方が簡単で分かりやすいことから，条件付き確率を適用しようとしない生徒が確認されている（石橋，2019b）．条件付き確率を用いた問④の解答は，図5の通りである．

⑵　開発した教授単元を用いた指導の例

以上が開発した教授単元の説明であるが，小学校から高等学校までを一貫するモデル教材としての機能を有する，という教授単元特有の性質について（福田ほか，2018），その一例を示しておく．まず，確率が未習である小学生に対しては，問①と問②を用いることが可能である．具体的には，モンティがはずれの扉を開ける前と後の，自身が選択した扉が当たる確率を比較させる活動が挙げられる．その際，小学生は確率を数を用いて表すことができないので，数直線上に当たりやすさを表現させ（松浦，2015，p.207参照），その違いに着目させることで，同じ事象に対しても，情報を得ることによって確率が変わることを認識させる．

A，B，Cを，それぞれ1番，2番，3番の扉が当たるという事象とすると，

$$P(A)=\frac{55}{100},P(B)=\frac{10}{100},P(C)=\frac{35}{100}$$

モンティが「2番の扉を開ける」という事象をSで表すと，

・もし1番が当たりであれば，司会者は2番と3番のどちらを開けても良いので $P_A(S)=\frac{1}{2}$

・もし2番が当たりであれば，司会者が2番を開けることはないので $P_B(S)=0$

・もし3番が当たりであれば，司会者は必ず2番を開けるので　$P_C(S)=1$

以上より，扉を選びなおさない（すなわち，1番を選択する）場合に，当たりの扉を選ぶ確率 $P_S(A)$ は，

$$P_S(A)=\frac{P(A\cap S)}{P(S)}$$

$$P_S(A)=\frac{P(A)P_A(S)}{P(A)P_A+P(B)P_B(S)+P(C)P_C(S)}$$

$$P_S(A)=\frac{\frac{55}{100}\times\frac{1}{2}}{\frac{55}{100}\times\frac{1}{2}\times\frac{10}{100}\times 0+\frac{35}{100}\times 1}$$

$$=\mathbf{\frac{11}{25}}$$

一方で，扉を選びなおす（すなわち，3番を選択する）場合に，当たりの扉を選ぶ確率 $P_S(C)$ は，

$$P_S(C)=1-P_S(A)=1-\frac{11}{25}=\mathbf{\frac{14}{25}}$$

よって，$P_S(C)>P_S(A)$ より，扉を選びなおした方が良い．

図5　図4問④の解答

次に，中学校2年生の範囲の確率を学習しているが，条件付き確率を学習していない中学生に対しては，余事象の考えを適用させて問③を扱うことができる．具体的には，条件付き確率を用いることなく，全ての場合を樹形図などを用いて書き表し，自身の選択や，モンティがはずれの扉を開け

ることによる確率の変化を確認することで，前節で述べた余事象の考え方への着目を促す（田中・上野，2013参照）．これにより，モンティが扉を開けることで，残った2枚の扉にもう一度等確率が割り振られる（等確率バイアス）のではなく，モンティが残った2枚のうちはずれの扉を1枚開けたという情報によって，選択を変えた方が当たる確率が2倍に変更になることを認識させる．

そして，条件付き確率を学習した高校生に対しては，問④を扱うことができる．具体的には，まずは『3枚の扉から1枚を選び，その扉が当たりであれば賞品をもらえるというゲームがテレビで放送されており，あなたはそのゲームに挑戦することになった．あなたは絶対に当たりの扉を選びたいので，今までの放送を全て見返した．その結果，1番，2番，3番の扉の当たる確率がそれぞれ55%，10%，35%であるとわかった．そして番組出演の当日，あなたは事前の調査に基づき，最も当たる確率の高い1番の扉を選んだ．すると司会者のモンティが，「はずれの扉を1枚教えましょう」といい，2番の扉を開けてしまった．』というような状況を設定することで，3枚の扉の事前確率がわかっていることの状況を捉えさせる．その後は，図5のように条件付き確率を用いて形式的に確率を導出することで，新たに情報が加われば確率が変化することを認識させる．また，それを定量化する形式的なモデルとして，条件付き確率を学習させる．

いずれの問題も，目的は，確率を用いた意思決定と，そこで重要な「確率は事象についての情報に対して適用される」という認識であることから，本稿で開発した教授単元は，小学校から高等学校を一貫して今日的な確率の認識を育むことができることが期待できる．さらに，既に確率を学習しているものの理解が不十分である中高生に問①，②を扱うことや，学校では未習であるが既に確率を学習している小学生に対して問③，④を扱うことも可能である．

4．まとめと今後の課題

本稿は，確率は事象についての情報に対して適用されるという今日的な確率の認識を育むための教授単元の開発を目的とした．結果として，教授単元「モンティ・ホール・パラドックス」を開発し，それを用いた小学校，中学校，高等学校の指導の一例を示した．

その一方で，本稿では問①から問④までの指導の順序性については考察できていない．Tarr & Jones（1997）に基づけば，問①，②，③，④の順序が望ましいと考えられるが，まずは問③を提示して，その理解を支援するために問①や②を提示するという順序も考えられる．この点については，更なる理論的な考察に加え，教授実験による実証的な検証も必要となることから，今後の課題とする．

付記

本稿はJSPS科研費（課題番号：18J10445）の助成を受けて行われた研究の一部である．

引用・参考文献

Batanero, C. et al.（2016）. *Research on Teaching & Learning Probability*. Springer.

Borovcnik, M., & Kapadia,R.（2018）. Reasoning with Risk：Teaching Probability & Risk as Twin Concepts. In C. Batanero, & E. J. Chernoff（Eds.）, *Teaching & Learning Stochastics: Advances in Probability Education Research*（pp.3-22）. Springer.

Devlin, K.（2014）. The Most Common Misconception About Probability? In E. J. Chernoff, & B. Sriraman（Eds.）, Probabilistic Thinking：*Presenting plural perspectives. Advances in Mathematics Education*（pp.ix-xiii）. Springer.

福田博人ほか2名（2018）.「統計的検定の教授単元の開発研究：背理法からの展開と区別に着目して」. 科学教育研究. 42(4). 335-349.

市川伸一・下條信輔（2010）.「3囚人問題研究の展開と意義をふり返って」. 認知心理学研究. 7(2). 137-145.

五十嵐慶太（2014）.「モデル化という視点から見た条件付き確率に関する困難性：「時間軸の問題」を用いた分析」. 数学教育学論究. 96. 1-8.

石橋一昴（2018）.「否定論の視点から見た条件付き確率の概念形成に関する研究」. 秋期研究

大会発表集録. 51. 73-80.
石橋一昴（2019a).「原因が確定する状況における条件付き確率の認識」. 春期研究大会論文集. 7. 237.
石橋一昴（2019b).「高校生は条件付き確率を利用してモンティ・ホール問題を解いているのか？」. 日本教科教育学会全国大会論文集. 45. 72-73.
石橋一昴（2019c).「原因の確率の理解を目標とした条件付き確率の学習を支援する教材と授業の条件」. 秋期研究大会発表集録. 52. 65-72.
岩崎秀樹（2007). 数学教育学の成立と展望. ミネルヴァ書房.
國本景亀（1998).「機械論的・原子論的数学教育から活動的・創造的数学教育へ」. 数学教育学研究. 4. 1-9.
Lecoutre, M. -P. (1992). Cognitive models and problem spaces in “purely random” situations. *Educational Studies in Mathematics*. 23. 557-568.
松尾知明（2016).「知識社会とコンピテンシー概念を考える: OECD国際教育指標（INES）事業における理論的展開を中心に」. 教育学研究. 83(2). 140-153.
松浦武人（2006).「児童の確率判断の実態に関する縦断的・横断的研究」. 数学教育学研究. 12. 141-151.
松浦武人（2015). 初等教育における確率概念の形成を意図した学習材の開発研究. 未公刊博士学位論文, 広島大学.
三次一英・服部環（2009).「確率判断課題／意思決定課題としてのモンティ・ホール・ジレンマ：数学から, 心理学, そして行動経済学へ」. 筑波大学心理学研究. 37. 31-47.
文部科学省（2019). 高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説数学編 理数編. 学校図書.
西村圭一・山口武志（2018).「学校教育における設計科学的視座に基づく数理科学教育に関する研究：数理科学教育に基本的枠組みに関する考察」. 春期研究大会論文集. 6. 19-26.
ローゼンハウス, J.（2013). 松浦俊輔 （訳). モンティ・ホール問題:テレビ番組から生まれた史上最も議論を呼んだ確率問題の紹介と解説. 青土社.
Saenen, L. et al. (2015) . Inhibitory control in a notorious brain teaser : the Monty Hall dilemma. ZDM *Mathematics Education*. 47. 837-848.
竹村彰通（2014).「統計的な考え方と結果の見方」. 日本統計学会・数学セミナー編集部. 数学セミナー増刊統計学ガイダンス. 6-10. 日本評論者.
竹村和久ほか２名（2004).「不確実性の分類とリスク評価：理論枠組の提案」. 社会技術研究論文集. 2. 12-20.
竹内啓（2018). 歴史と統計学：人・時代・思想. 日本経済新聞出版社.
田中伸明・上野祐一（2013).「数学的活動を通して学ぶ高等学校数学科の「課題学習」:「モンティ・ホールのジレンマ」を題材として」. 三重大学教育学部附属教育実践総合センター紀要. 33. 51-56.
Tarr, J. E., & Jones, G. A. (1997). A framework for assessing middle school students’ thinking in conditional probability & independence. *Mathematics Education Research Journal*. 9. 39-59.
Tarr, J. E., & Lannin, J. K. (2005). How Can Teachers Build Notions of Conditional Probability and Independence? In G. A. Jones (Ed.) *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (pp.215-238). Springer.
坪井俊ほか13名（2011). 数学Ａ. 数研出版.
Wittmann, E. Ch. (1984). Teaching Units as the integrating core of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*. 15 (1). 25-36.
Wittmann, E. Ch. (2001). Developing mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics*. 48. 1-20.
柳川尭（2007).「ベイズの定理とバイオ統計学」. 数学セミナー. 46(2). 13-17. 日本評論社.