

博士論文

流体中の球形気泡・粒子運動に対する  
数値計算法の開発

2019年3月

関 超

岡山大学大学院  
自然科学研究科

## 目 次

第 1 章	序 論	1
	第 1 章参考文献	6
第 2 章	単一球形気泡・粒子の挙動による流動構造	9
2.1	緒 言	9
2.2	無限静止流体中における単一球形気泡・粒子に働く力のまとめ	9
2.3	壁面が存在する場合における単一球形気泡・粒子の挙動	16
2.3.1	壁面近傍を上昇する単一球形気泡・粒子の終端速度	16
2.3.2	壁面近傍を上昇する単一球形気泡・粒子に働く斥力	21
	第 2 章参考文献	28
第 3 章	Force-coupling Method について	31
3.1	Force-coupling Method の基礎方程式	31
3.2	Force-coupling Method における方程式の離散化	36
3.3	Force-coupling Method の改良法	43
3.3.1	Modified Force-coupling Method について	43
3.3.2	Renormalized Force-coupling Method について	45
	第 3 章参考文献	52
第 4 章	計算における条件	54
4.1	Navier-Stokes 方程式の解法	54
4.2	計算格子	55
4.3	計算格子による空間に関する離散化	57
	第 4 章参考文献	64
第 5 章	MFCM と RFCM の計算結果の正確さに関する検討	65
5.1	無限流体中における単一球形気泡・粒子	65
5.2	壁面近傍を上昇する単一球形気泡・粒子	69
5.3	無限流体中における 2 球形気泡の相互作用	90
	第 5 章参考文献	96
第 6 章	RFCM と VOF (Volume of Fluid) 法の計算コストについての検討	97
6.1	VOF 法の基礎	97
6.2	計算モデルおよび計算条件	98

6.3 計算結果との比較および検討	101
第6章参考文献	104
第7章 結 言	105
第7章参考文献	107
謝辞	109

## 第1章 序 論

地球上の物質状態は、主に気相、液相、固相の3つに分ける。それら3つの相が相互干渉による生成された流動構造を混相流と呼ぶ。いずれか2つの相が混在する流れを二相流、3つの相が混在すれば三相流と呼ばれる。二相流に限ってみれば、図1.1の示すように、連続相と分散相に分けられ、様々な組み合わせが可能である。中では、固相を連続相とする場合は、固体粒子群を擬似的な流体と見なした二相流である。例えば、流砂などが挙げられる。気相を連続相とする場合の二相流は、多数の種類が存在しており、例えば、空気中の噴霧のような液気二相流および大気中に浮遊する粒子のような固気二相流などが挙げられる。これらの二相流における分散相（微小水滴もしくは微小粒子）に働く慣性力が強く、分散相関の主な挙動は衝突である。一方、液相を連続相とする場合の二相流は、多数気泡・粒子などの分散相を含む流れのような二相流である。この場合、分散相に働く慣性力が相対的に弱くなり、連続相による分散相に働く粘性力が強くなるため、分散相と連続相の間の直接的な相互作用および分散相間で連続相を介して間接的な相互作用はより複雑である。

分散相自身でも、変形を考慮せずの球形気泡の場合には、表面で滑り速度あり、せん断応力が働かない条件が課される。球形粒子の場合には、表面で滑り速度なしの条件が課される。この境界条件の違いにより、球形気泡と球形粒子に働く抵抗力が異なり、特に、気泡また粒子から離れた遠方での流れが感じる Stokeslet の強さの違いが生じ、連続相に影響を与える。このように、液相が連続相である気液二相流および固液二相流でも、分散相とする気泡と粒子の物性の相違により、全く異なっている流動現象をもたらす、流動性の予測は更に複雑となる。

流体中に気泡・粒子を含む二相流は、多くの分野で注目されている。気液二相流の場合は、機械を始め、化学反応装置<sup>1)</sup>、水処理のための攪拌装置<sup>2)</sup>、円管内表面の境界層中に微小な気泡を注入することによって水から受ける摩擦抵抗を低減させる方法<sup>3)</sup>など、工学上で重要となる様々な装置が見られる。最近では、マイクロ・ナノ技術の発展に伴い、マイクロバブルを用いたポリマーインクの洗浄<sup>4)</sup>や水中の炭素繊維の分離<sup>5)</sup>などのような環境問題と関連する水処理技術へのマイクロバブルの適用などが多く研究者の関心を集めている。医療応用方面でも大きな活躍がされている。血管内に直径  $5\mu\text{m}$  のマイクロバブルを注入することより、造影剤として用いられている<sup>6)</sup>。また、超音波キャビテーションの崩壊現象により、結石を破砕する手法<sup>7)</sup>も挙げられる。一方、固液二相流の場合は、川の水流と共に流している泥や砂などの自然現象、人間血管内に存在する赤血球の流動現象<sup>8)</sup>、深海底に鉱物資源の採掘システム<sup>9)</sup>、水処理技術への泥水の輸送システム<sup>10)</sup>など、多くの固体粒子を含む固液二相流が挙げられる。

以上のような自然現象や工業装置などにおいて、気液・固液二相流を概観すると、壁面が存在したり、非定常流れであったりする場合は少なくない。したがって、これらの各種工業装置の設計および製作は時間と費用がかかり、使用機材によっても再現性が制限されてい

る。計算機の飛躍的な発展の現在、数値流体力学（Computational Fluid Dynamic：頭文字を取って CFD と呼ばれる）も急激な成長が見られて、数多くの研究者にも注目されている。また、流体の条件を容易に変更することが可能であり、一度の計算で扱えるデータ量も多い。新規工業装置の創製へ向けて設計・製造の効率化および低コスト化を実現するために、実験に取り代わった数値計算技術の重要度が増している。しかし、気液・固液二相流の挙動に対し、現象を支配する因子が多いため、その予測は容易でない。従来、気液・固液二相流に対する解析では、特定の条件に対して実験を行い、その実験データをもとに気泡・粒子の挙動に対する各種の相関式を求めてきた<sup>11,12</sup>。実験データの存在しない気液・固液二相流の数値計算を行うことは困難となる場合も少なくない。そのため、様々な流動条件の二相流の流動状況も数値計算によって再現したい場合、最近で有限差分法を用いて固定格子点を移動する二相流の界面を取り扱う数値計算法の開発が盛んに行われている。

連続相における流れを支配する Navier-Stokes 方程式にとらえるオイラー的な視点に立ち、相界面を持つ流れを考えると、典型的な数値計算法として、Harlow and Welch<sup>13</sup>の MAC（Marker And Cell）法、固定された格子内において自由表面を表すマーカーを配置し、その動きをラグランジュ的に求めながら、自由表面流れを解く解析手法である。Cundall and Strack<sup>14</sup>の DEM（Discrete Element Method）法、固体粒子ごとの運動における並進および回転の運動方程式に基づいて時刻的に解き進める解析手法であり、気泡の質量が小さすぎるため気泡を含む流れには適用できない。Peskin<sup>15</sup>の IBM（Immersed Boundary Method）法、最初に低いレイノルズ数に仮定された二次元心臓内僧帽弁における血流の再現のために開発されているが、Fogelson and Peskin<sup>16</sup>によって相界面に適切な体積力（図 1.2）を導入して表面滑り速度なしの固体粒子への解析に試みており、密度が液体と比べて 1.2 倍程度以下の粒子を含む流れの解析は不可能であった。これに対して Kempe and Fröhlich<sup>17</sup>によってより軽い粒子を解析する手法が提案され、粒子と流体の密度比が 0.3 程度まで安定に計算することが可能となったが、水中の気泡に対しては適用できない。その後、Hirt and Nichols<sup>18</sup>の VOF（Volume of Fluid）法、この手法に対する改良版が盛んに用いられており、セル内の気相で 0、液相で 1 という体積比率（ボイド率）（図 1.3）を取る相関数と呼ばれるものの移流によって相界面を追跡する。したがって、VOF 法の場合には相関数が体積比率という物理量を表すため、数値計算上で質量保存の精度がよいが、相界面の曲率を精度良く求めるのが困難である。相関数を取る手法に類似した手法として、Osher and Fedkiw<sup>19</sup>によって開発された Level set 法もある。この手法は、格子点から相界面までの距離を Level set 関数（図 1.4）とすることにより、相界面追跡の精度評価が数学的に正確になされており、相界面の移動に伴う数値拡散の影響を小さくなっているため、単なる相界面流れのみならず、複雑な界面形状を持つ相変化問題などの分野にも適用されている。以上の数値計算手法は、固定された格子内を移動する相界面に対して、相関関数の値の変化から分散相とする気泡・粒子と連続相間の相互作用を評価する手法であり、相界面に透過された格子が相当の数がなければ、精度が劣る。現状においても、計算負荷が非常に大きな数値計算手法であるため、気液・固液二相

流の解析に対しては、2次元計算または軸対象流の場合に用いられており、複数の気泡・粒子を持つ3次元計算における層流への適用例が多くない。さらに、乱流場への適用例が極めて少数である。

様々な工業装置内部に、分散相としての気泡・粒子が連続相としての液相流れに含まれる気液・固液二相流が存在する場合は少なくない。これらの工業装置内部における二相流では、壁面の存在を始め、多数の気泡・粒子間の相互作用などの影響、装置の運行状況による流れの非定常性の考慮などが無視できない。一方、新規装置の設計や開発などに、数値計算技術の重要性も増している。しかし、現在では、著者らの知る限りにおいて、様々な流動条件下で気泡・粒子の移動軌跡と速度および流れ場への影響を容易に評価でき、低コストで多数気泡・粒子を含む流れへの拡張が可能な数値解析手法は存在しない。

したがって、比較的小さな計算負荷を有する粒子を含む流体運動を計算することができる手法として、Maxeyら<sup>20-25)</sup>によって開発されたForce-coupling Method (以下FCMと略す)が挙げられる。この手法は、粒子表面の正確な境界条件を満たすために移動境界を考慮せず、その代わりに、平滑化デルタ関数を用いて、分散相と連続相の相互作用力を体積力項としてNavier-Stokes方程式に導入し、球形であると仮定した粒子の中心を点源として周りの流れに作用する視点に立ち、その作用力の分布を考慮し、多極展開の低次項を取ることによって計算される手法である。関連するパラメータは、粒子の密度と、粒子から流れへ作用する力の粒子半径に関わる長さスケールである。各粒子の速度は、粒子体積力が有効な領域にわたる流体の局所的な速度の体積平均をとることによって得られる。それで、有効な作用力の長さスケールは粒子径と同じオーダーであるため、粒子境界条件の影響がFCMで正確に反映された解が求まることが保障されない。2つの粒子間距離が $S_p/R_p < 2.4$ <sup>23)</sup>より近くなると、FCMは粒子運動に対する予測の誤差が高まる。ここで、 $S_p$ と $R_p$ はそれぞれ2粒子間距離と粒子半径を表す。しかし、Navier-Stokes方程式を解くための既存のコードで容易に導入することができ、全計算領域を統一的に扱うため、分散相と連続相とのそれぞれの領域で別々に解を求めたり、領域間で解の接合をしたりする必要がなく、計算コストを大幅に削減することができる点は特筆すべきである(気泡・粒子直径に当たる計算格子数は5個で十分である)。ただし、MaxeyらのオリジナルのFCMは、高粘性連続相である条件を付けたStokes近似レベルにおける分散相とする球形粒子の解析のみ適用できるように構成されており、一般的連続相(例えば、水)中の分散相とする球形粒子および球形気泡の軌跡・速度を正確に追うことができない。および、数値計算結果と実験データ、特に分散相の軌跡・速度の予測可能性を比較することによってFCMの妥当性は正確に調べられていない。

これらの背景を踏まえて本研究では、オリジナルのFCMの体積力項における多極展開の2次項(1次のForce Monopole項と2次のForce Dipole項であり、詳しく第3章で説明する)までを用い、Navier-Stokes方程式の慣性項を考慮したStokes近似あるいはOseen近似から外れた一般的連続相向けのModified Force-coupling Method (以下MFCMと略す)を提案する。また、球形粒子と球形気泡の表面における接線方向の境界条件の異なる点に着目し、球

形気泡の有効な作用力の長さスケールを再定義することによって球形気泡向けの **Renormalized Force-coupling Method** (以下 RFCM と略す) を提案する. 様々な流動条件下における多数気泡・粒子を含む流れのシミュレーションへの第一歩として, これらの手法を用いて①無限流体中を上昇する単一球形気泡・粒子, ②壁面近傍を上昇する単一球形気泡・粒子, ③無限流体中を上昇する鉛直に上下並んだ 2 球形気泡の解析を行い, 実験結果<sup>26-32)</sup>と比べることで手法の妥当性を確認する. さらに, 現在最も盛んに用いられる VOF 法<sup>18)</sup>の球形気泡に対する三次元の計算結果と比較し, 本研究で提案する方法の計算コストについて検討を行う.

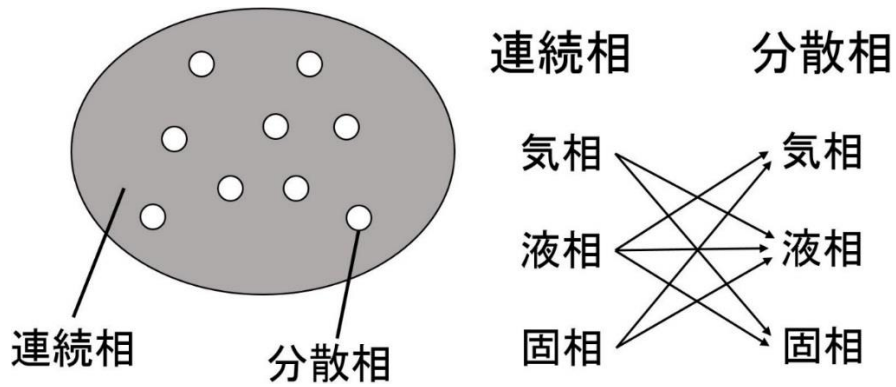


図 1.1 連続相と分散相の組み合わせ

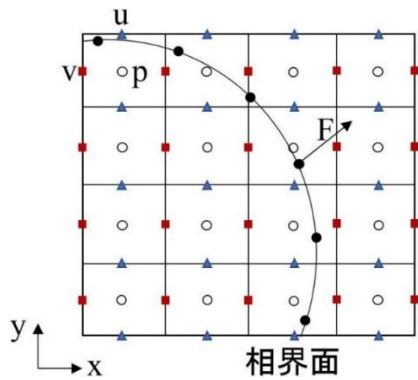


図 1.2 相界面における IBM の体積力導入.

0.1	0.3	1	1
0	0	0.5	1
0	0	0.2	1
0	0	0.2	1

図 1.3 VOF 法の体積比率例.

$\phi(x, t)$  : level set関数

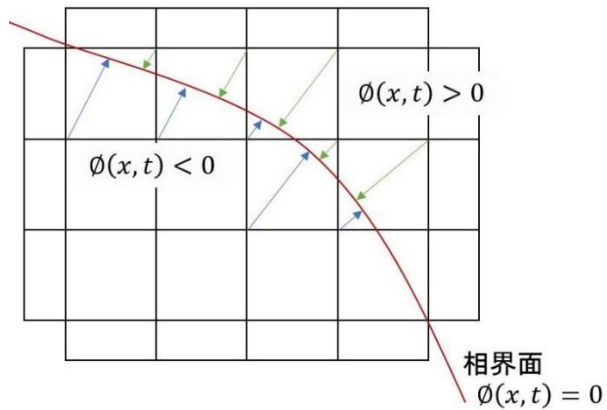


図 1.4 Level set 関数を取る例.



## 第 1 章参考文献

- 1) 化学工学協会編, “化学工学の進歩 16 気泡・液滴・分散工学 –基礎と応用–”, 槇書店(1982).
- 2) 松崎晴美, 黒田修, 高橋燦吉, “電気透析法の濃度分極に及ぼす気泡攪拌効果に関する研究”, 化学工学論文集, 第 5 巻 4 号(1979), pp. 385-390.
- 3) Shatat, M. M. E., Yanase, S., Takami, T. and Hyakutake, T., “Drag Reduction Effects of Micro-Bubbles in Straight and Helical Pipes”, Journal of Fluid Science and Technology, Vol. 4 (2009), pp. 156-167.
- 4) Matsuura, K., Ogawa, S., Kasaki, S., Koyama, K., Kodama, M. and Yanase, S., “Cleaning polymer ink from a glass substrate using microbubbles generated by a hydrogen bubble method”, Separation and Purification Technology, Vol. 142 (2015), pp. 242–250.
- 5) Matsuura, K., Uchida, T., Guan, C. and Yanase, S., “Separation of Carbon Fibers in Water Using Microbubbles Generated by Hydrogen Bubble Method”, Separation and Purification Technology, Vol. 190 (2018), pp. 190-194.
- 6) Matsumoto, Y., Allen, J. S., Yoshizawa, S., Ikeda, T. and Kaneko, Y., “Medical ultrasound with microbubbles”, Experimental Thermal and Fluid Science, Vol. 29 (2005), pp. 255-265.
- 7) 池田貞一郎, 吉沢晋, 戸崎正崇, 金子幸生, 高木周, “クラウドキャビテーションの崩壊現象を利用した結石破砕法 (第 1 報,クラウドキャビテーション制御手法の開発)”, 日本機械学会論文集 B 編, 第 70 巻 692 号(2004), pp. 904-911.
- 8) Taylor, M., “The Flow of Blood in Narrow Tubes-II. The Axial Stream and it’s Formation, as Determined by Changes in Optical Density”, Australian Journal of Experimental Biology and Medical Science, Vol. 22 (1955), pp. 1-16.
- 9) 佐々木和郎, “マンガン団塊の採鉱システム技術”, 日本機械学会誌, 第 83 巻 737 号 (1980), pp. 399-404.
- 10) 川島俊夫, “スラリー輸送と省エネルギー化”日本機械学会誌, 第 83 巻 745 号(1980), pp. 1513-1521.
- 11) Uno, S. and Kintner, R. C., “Effect of wall proximity on the rate of rise of single air bubbles in a quiescent Liquid”, AIChE Journal, Vol. 2 (1956), pp. 420-425.
- 12) Clift, R., Grace, J. R. and Weber, M. E., “Bubbles, Drops and Particles”, Academic Press, (1978).
- 13) Harlow, F. H. and Welch, J. E., “Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface”, Physics of Fluids, Vol. 8 (1965), pp. 2182-2189.
- 14) Cundall, P. A. and Strack, O. D. L., “A discrete numerical model for granular assemblies”, Géotechnique, Vol. 29 (1979), pp. 47-65.

- 15) Peskin, C. S., “Flow patterns around heart valves: a digital computer method for solving the equations of motion”, PhD thesis. *Physiol.*, Albert Einstein Coll. Med., (1972) Univ. Microfilms. 378:72-30.
- 16) Fogelson, A. L. and Peskin, C. S., “A fast numerical method for solving the three-dimensional stokes' equations in the presence of suspended particles”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 79 (1988), pp. 50-69.
- 17) Kempe, T. and Fröhlich, J., “An improved immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particle laden flows”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 231 (2012), pp. 3663-3684.
- 18) Hirt, C. W. and Nichols, B. D., “Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 39 (1981), pp. 201-225.
- 19) Osher, S. and Fedkiw, R., “Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces”, Springer-Verlag New York Inc., (2003).
- 20) Maxey, M. R. and Patel, B. K., “Localized force representations for particles sedimenting in Stokes flow”, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 27 (2001), pp. 1603–1626.
- 21) Xu, J., Maxey, M. R. and Karniadakis, G. E., “Numerical simulation of turbulent drag reduction using micro-bubbles”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 468 (2002), pp. 271-281.
- 22) Lomholt, S., Stenum, B. and Maxey, M. R., “Experimental verification of the force coupling method for particulate flows”, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 28 (2002), pp. 225-246.
- 23) Lomholt, S., and Maxey, M. R., “Force-coupling method for particulate two-phase flow: Stokes flow”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 184 (2003), pp. 381-405.
- 24) Dance, S. L. and Maxey, M. R., “Incorporation of lubrication effects into the force-coupling method for particulate two-phase flow”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 189 (2003), pp. 212-238.
- 25) Yeo, K. and Maxey, M. R., “Simulation of concentrated suspensions using the force-coupling method”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 229 (2010), pp. 2401-2421.
- 26) 竹村文男, 矢部彰, “低レイノルズ数領域における球形気泡の上昇速度”, *日本機械学会論文集 B 編*, 第 63 卷 613 号(1997), pp. 2909-2914.
- 27) 竹村文男, 高木周, 松本洋一郎, “壁面近傍における球形ガス気泡の上昇速度”, *日本機械学会論文集 B 編*, 第 66 卷 648 号(2000) pp. 2087-2094.
- 28) 竹村文男, 高木周, 松本洋一郎, “壁面近傍を上昇する球形ガス気泡に働く揚力”, *日本機械学会論文集 B 編*, 第 66 卷 649 号(2000) pp. 2320-2326.
- 29) 竹村文男, 高木周, 松本洋一郎, “壁近傍を上昇する水中気泡に働く低レイノルズ数域における揚力”, 第 68 卷 670 号(2002) pp. 1684-1690.

- 30) 竹村文男, “壁近傍を上昇する気泡に働く揚力に対する気泡表面状態の影響”, 第 69 卷 682 号(2003) pp. 1327-1332.
- 31) Katz, J. and Meneveau, C., “Wake-induced relative motion of bubbles rising in line”, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 22 (1996), pp. 239-258.

## 第2章 単一気泡・粒子の挙動による流動構造

### 2.1 緒言

気泡・粒子を含む流れは、多くの工業装置で見られ、装置の性能を左右する重要な要素となっている。したがって、これらの気泡・粒子による流れの挙動を正確に予測するのが期待されることであるが、実際の現象を支配する因子が多く、その挙動の予測は、簡単ではない。例えば、気泡・粒子間に直接的な相互作用や気泡・粒子から流体への作用力によって流体を介して間接的な相互作用など、および、流れ場において壁面が存在する場合に気泡・粒子と壁面間の相互作用のような複雑な現象をもたらす。これらの現象を予測するための前提として様々な流動条件下で単一気泡・粒子の挙動を予測するのは重要である。

無限静止流体中を上昇する単一気泡・粒子に働く各種の力は、理論解析<sup>1,2)</sup>あるいは実験結果<sup>3)</sup>のもとに数学モデルを構築し、気泡・粒子に働く合力を計算する。その合力を生成項として流体の解析式 Navier-Stokes 方程式へ導入して気泡・粒子から流体への作用力を求める<sup>4)</sup>。壁面近傍を上昇する気泡・粒子の挙動はより複雑であり、竹村ら<sup>5-8)</sup>の実験結果で壁面近傍を上昇する気泡・粒子に働く抵抗力が増加となり、壁面による影響で気泡に働く壁面から遠ざかる方向への斥力（横力）が生じることと、気泡径が大きくなるとともに抵抗力および斥力（横力）が減少することを説明している。また、気泡に働く抵抗力および斥力（横力）について検討するため、Vasseur and Cox<sup>4)</sup>の解析結果を修正した理論式を提案し、壁面近傍を上昇する球形気泡に働く抵抗力に対しては実験結果との比較的良好な一致を得た。しかし、気泡に働く斥力（横力）に対する理論式の適用範囲は限定的であった。

そこで本章では、無限静止流体中における単一気泡・粒子に働く各種の力についてまとめるとともに、壁面の影響が存在する場合と存在しない場合における解析に必要な数学モデルの導出および選定を行う。さらに、第3章から本章で導出したモデルを用いて新数値計算手法の構成について述べる。

### 2.2 無限静止流体中における単一気泡・粒子に働く力のまとめ

気液・固液二相流の数値計算モデルの方程式として用いられる気泡の運動方程式を構築するための研究が盛んに行われている。本節は、以下の仮定条件下での球形気泡・粒子に働く各種の力を検討する。

仮定条件

- (1) 液相は、非圧縮性ニュートン流体とする。気相は、非圧縮性空気とする。固相は、剛体球とする。
- (2) 気液界面の表面張力は一定とする。気泡の場合は表面滑り速度は有りとし、粒子の場合は表面滑り速度無しとする。

(3) 気泡・粒子の密度は、液相の密度の 1/1000 とする。沈める粒子は、本研究で検討しないとする。気泡の粘性は、液相の粘性に対して無視することができる。

(4) 上昇する気泡・粒子の体積は一定とする。現実の場合は、重力によって静止流体の鉛直方向に静圧分布をもつため、気泡が上昇する際に体積は一定ではなく、動圧によって全体の内部圧力の低下があることを注意すべきである。

以上の条件下で、球形気泡・粒子には、(1) 浮力、(2) 付加質量による力、(3) 抵抗力、(4) 履歴力、(5) 周囲流れによる力、(6) 斥力(横力)などの力を受ける。以下では、これらの力に対して式を用いて説明する。

(1) 浮力。

重力によって生成された浮力  $F_g$  は、次式のように表される。

$$F_g = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho_f g, \quad (2.1)$$

ここで、 $\rho_f$  は流体の密度、 $g$  は重力加速度、 $R$  は気泡・粒子の半径である。上式を用いれば、気泡の場合でも粒子の場合でも両方に取り扱える。

(2) 付加質量による力。

付加質量による力  $F_{AM}$  は、気泡・粒子の加速度  $dU/dt$  と関わる力であり、次式のように表される。

$$F_{AM} = \alpha \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho_f \cdot \frac{dU}{dt}, \quad (2.2)$$

ここで、 $\alpha$  は付加質量係数であり、ポテンシャル流れおよびストークス流れの理論から球形物体で 1/2 と設定する。Magnaudet et al.<sup>9)</sup>および高木と松本<sup>2)</sup>などの研究は、中間気泡・粒子レイノルズ数  $Re$  (気泡・粒子レイノルズ数 =  $2 \times$  気泡・粒子直径  $R \times$  気泡・粒子速度  $U$  / 流体動粘性  $\nu$ )、50 以上 200 までの範囲において、付加質量係数  $\alpha = 1/2$  が妥当な値であることを示している。しかし、気泡・粒子レイノルズ数  $Re$  は 50 以下の範囲であれば、気泡・粒子の上昇速度が遅く、加速度も小さいため、付加質量による力を無視することができると考えられる。本論文では、低気泡・粒子レイノルズ数  $Re$  の範囲を検討するため、付加質量による力を考慮しないとする。

(3) 抵抗力

気泡の抵抗力と粒子の抵抗力が異なる。その原因は、表面での接線方向の境界条件である。気泡の場合は表面滑り速度有りであり、粒子の場合は表面滑り速度無しである。その違いにより、気泡の Stokes 抵抗は  $4\pi\nu\rho_fRU_b$ 、粒子の Stokes 抵抗は  $6\pi\nu\rho_fRU_p$  となるが、気泡・粒子レイノルズ数  $Re$  の 1 よりはるかに小さい場合のみ適用できるため、より高気泡・粒子レイノルズ数  $Re$  の範囲に適用するのに補正項が必要となる。

気泡の抵抗係数  $C_{Db}$  を用いて気泡に働く抵抗力  $F_{Db}$  の数学モデルは、次式のように与える。

$$F_{Db} = \frac{C_{Db}}{2} \pi R^2 \rho_f U_b^2, \quad (2.3)$$

気泡レイノルズ数  $Re_b$  を用いて一般的に整理された理論解および推算式は以下の通りである。

$$\text{Levich}^{10)} \text{の式}(50 < Re_b < 800): \quad C_{Db} = \frac{48}{Re_b}, \quad (2.4)$$

$$\text{Rivkind and Ryskin}^{11)} \text{の式}(2 < Re_b < 10): \quad C_{Db} = 14.9 Re_b^{-0.78}, \quad (2.5)$$

$$\text{Abdel and Hamielec}^{12)} \text{の式}(10 < Re_b < 60): \quad C_{Db} = 12.13 Re_b^{-0.74}, \quad (2.6)$$

$$\text{Moore}^{13)} \text{の式}(30 < Re_b < 100): \quad C_{Db} = \frac{48}{Re_b} \left( 1 - \frac{2.2}{Re_b^{0.5}} \right), \quad (2.7)$$

$$\text{Olive and Chung}^{14)} \text{の式}(Re_b < 2): \quad C_{Db} = \frac{16}{Re_b} + 1.6, \quad (2.8)$$

$$\text{Mei et al.}^{1)} \text{の式}(0 < Re_b < 100): \quad C_{Db} = \frac{24}{Re_b} \left\{ \frac{2}{3} + \left[ \frac{12}{Re_b} + 0.75 \left( 1 + \frac{3.315}{Re_b^{0.5}} \right) \right]^{-1} \right\}, \quad (2.9)$$

$$\text{富山ら}^{15)} \text{の式}(10^{-3} < Re_b < 10^5): \quad C_{Db} = \frac{16}{Re_b} (1 + 0.15 Re_b^{0.687}), \quad (2.10)$$

$$\text{竹村と矢部}^{16)} \text{の式}(0 < Re_b < 100): \quad C_{Db} = \frac{16}{Re_b} (1 + 0.122 Re_b^{0.55}), \quad (2.11)$$

以上の式において、多数の気泡レイノルズ数範囲をカバーされたが、実験結果による推算式

が球形気泡の場合に適用できない可能性があるため、本論文で、球形の仮定が保証される  $0 < Re_b < 100$  の範囲で成立する Mei et al.<sup>1)</sup>の式を用いて、球形気泡に働く抵抗力の式(2.3)が次式のように変形する。

$$F_{D,b} = 4\pi\nu\rho_fRU_b \left\{ 1 + \left[ \frac{8}{Re_b} + 0.5 \left( 1 + \frac{3.315}{Re_b^{0.5}} \right) \right]^{-1} \right\}, \quad (2.12)$$

粒子の抵抗係数  $C_{D,p}$  を用いて気泡に働く抵抗力  $F_{D,p}$  の数学モデルは、式(2.3)と同じですが、粒子レイノルズ数  $Re_p$  を用いて一般的に整理された理論解および推算式は主に Clift et al.<sup>3)</sup>式、

$$\begin{aligned} C_{D,p} &= \frac{24}{Re_p} \left( 1 + \frac{3}{16} Re_p \right), & (Re_p \leq 0.01) \\ &= 1 + 0.1315 Re_p^{(0.82-0.05\log_{10} Re_p)}, & (0.01 < Re_p \leq 20) \\ &= 1 + 0.1935 Re_p^{0.6305}, & (20 < Re_p \leq 260) \end{aligned} \quad (2.13)$$

を用いて、球形粒子に働く抵抗力は、次式のように与える。

$$\begin{aligned} F_{D,p} &= 6\pi\nu\rho_fRU_p \left[ \frac{24}{Re_p} \left( 1 + \frac{3}{16} Re_p \right) \right], & (Re_p \leq 0.01) \\ &= 6\pi\nu\rho_fRU_p [1 + 0.1315 Re_p^{(0.82-0.05\log_{10} Re_p)}], & (0.01 < Re_p \leq 20) \\ &= 6\pi\nu\rho_fRU_p [1 + 0.1935 Re_p^{0.6305}], & (20 < Re_p \leq 260) \end{aligned} \quad (2.14)$$

#### (4) 履歴力

履歴力は、気泡・粒子の表面付近で生成された渦度を流体中に拡散して行かせる過程で働く力であり、一般的には時間に関する積分の形式で与えられる<sup>1,2)</sup>。次式のように与えられる。

$$F_H = 6\pi\nu\rho_fR \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \frac{dU}{d\tau} d\tau, \quad (2.15)$$

積分核  $K(t-\tau) = \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}$  の関数形を持つ際に、低レイノルズ数の場合において、粒子に働く履歴力は Basset 力<sup>17)</sup>となり、気泡に働く履歴力は Yang-Leal 力<sup>18)</sup>となる。

上述した粒子に働く履歴力として、Basset 力の他に Mei et al.<sup>1)</sup>によって提案された履歴力の数学モデルの妥当性は、高木と松本<sup>2)</sup>によって検討されており、上式の積分核  $K(t - \tau)$  が次式のように与える。

$$K(t - \tau) \approx \left[ \left( \frac{\pi(t - \tau)v}{R^2} \right)^{\frac{1}{4}} + \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{U^3}{Rv f_H^3(Re)} (t - \tau)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-2}, \quad (2.16)$$

ここで、

$$f_H(Re) = 0.75 + 0.105Re. \quad (2.17)$$

上式で表記された積分核  $K(t - \tau)$  において、右辺の第 1 項は Basset 力の積分核に等しく、粘性による渦度の拡散過程のみを考慮している。右辺の第 2 項は対流の影響による伴流内での非定常な運動量欠損を考慮している。

気泡に働く履歴力として、Yang and Leal<sup>18)</sup>の低レイノルズ数領域での理論解析を行って、表面境界条件が滑り速度ありの気泡の場合は、Basset 力の存在がないことを示した。その代わりに、上式で表記された積分核  $K(t - \tau)$  を持つ履歴力が存在することを示した。また、Mei et al.<sup>1)</sup>は速度の変化に対して積分核を次式のように与えた。

$$K(\eta) \approx \frac{4}{9\pi} I(A, \xi = \frac{\eta}{Re}) \quad (2.17)$$

ここで、

$$\eta = \frac{U}{R}(t - \tau), \quad A = \left( \frac{2Re}{9f_H} \right)^2, \quad (2.18)$$

$$f_H(Re) \approx 0.1377 + \left[ 0.1956^{-4} + \left( 0.5164Re^{-\frac{1}{2}} \right)^{-4} \right]^{-\frac{1}{4}}.$$

高木と松本<sup>2)</sup>は、球形粒子の場合、気泡の場合と比べて、履歴力の影響が大きく、定常状態へ到達するのに時間がかかることを示した。気泡・粒子の定常状態は、気泡・粒子に働く合力がゼロとなり、終端速度に到達することを意味する。また、気泡に働く履歴力の影響は小さくて気泡レイノルズ数が 50 以上でその影響は無視することができる。しかし、球形粒子に働く履歴力は無視できない。



#### (4) 周囲流れによる力

このような力は、流れ場における圧力勾配によって生成された力である。厳密にすれば、液相に対する実質微分により記述される力であり、周囲流れが加速度運動していることより、気泡・粒子に慣性力として見かけの力が作用すると考えられる。例えば、高粘性流体の中で、液相を介して気泡・粒子間の間接的な相互作用が挙げられる。このような現象は非常に複雑な現象であるため、実験でも数値解析でも困難な場合も少なくない。

直列に並んだ2気泡の場合において、Katz and Meneveau<sup>19)</sup>は鉛直に上昇する2気泡間の相互作用によって後方気泡が前方気泡の伴流領域に侵入した後に加速されることを示した実験を行っており、実験データのもとにその実験相関式を提案したが、その相関式の適用範囲は限定されている。Yuan and Prosperetti<sup>20)</sup>は直列に並んだ2気泡に対する直接数値解析を行い、前方気泡の伴流の渦度の影響で後方気泡の上昇速度が増減することを示し、気泡間距離の変化によって気泡間に働く力が引力と斥力間に切り替える現象を明らかにした。また、渡部と真田<sup>21)</sup>は実験と数値解析を両方用いて、低レイノルズ数領域における鉛直線上を上昇する上下配置の2気泡間が衝突し、より高レイノルズ数領域の場合に2気泡が一定距離を保つままで上昇する現象を確認した。

並列に並んだ2気泡の場合において、Legendre et al.<sup>22)</sup>は並列に並んだ2気泡の数値解析を行い、気泡のレイノルズ数の変化によって斥力（横力）の向きが変化することを示した。真田ら<sup>23)</sup>は水平に並んで上昇する2気泡の合体および反発を調査する実験を行い、気泡レイノルズ数が小さければ反発力、気泡レイノルズ数が大きければ引力が働くことを示した。また、Hallez and Legendre<sup>24)</sup>は全方位に並んだ気泡の数値解析を行い、直列に並んだ2気泡の配置が不安定で、並列に並んだ2気泡の配置が安定することを示した。

多数気泡が存在する場合は、更に複雑な現象が生じる。Kitagawa et al.<sup>25)</sup>は斜めに配置した板に沿って上昇する気泡群の気泡間相互作用の解析を行っており、隣接の気泡が直列配置から並列配置に変化する結果を示した。北川ら<sup>26)</sup>は鉛直壁面近傍を上昇する気泡群の運動特性を調査する実験を行い、気泡間距離と気泡上昇速度および壁面に垂直方向速度には逆相関の関係があることを指摘されている。小笠原ら<sup>27)</sup>は気泡レイノルズ数が100以上の場合において、並列に並んだ2気泡間距離が気泡直径の1.2倍程度以上となると離れる方向の相対速度がもたらすことを指摘された。

以上の先行研究を踏まえて、気泡・粒子数が2個またはその以上の数が存在する場合に、気泡・粒子間の相互作用の影響を外力として評価することが無視できない。

#### (5) 斥力（横力）

気泡に作用する斥力（横力）には、慣性由来のものでも、変形由来のものでもあるため、両方とも、流体力学の分野で重要な研究対象である。一般に、気泡・粒子が球形を保つままである場合は、ほとんどの斥力（横力）が慣性によって生成されたものである。しかし、粘性のみ支配された Stokes 流れ領域における Stokes 流れの運動学的可逆性によって、せん断

流れ中を移動する、または壁面近傍を壁面と平行に移動する気泡・粒子に慣性の影響が小さくなり、その進行方向に垂直方向に斥力（横力）は働かない、壁面によって気泡・粒子へ与える影響は次節に具体的に説明する。一方、気泡・粒子径が大きくなるにつれ、慣性の影響を受けやすくなる。特に、直径 1mm 程度の気泡は Auton<sup>28)</sup>の斥力（横力）を感じられるが、剛体球のような粒子の場合は、斥力（横力）を受けにくくなることを Kurose and Komori<sup>29)</sup>および Bagchi and Balachandar<sup>30)</sup>に説明されている。

したがって、気泡に働く変形由来の斥力（横力）については、理論解析を含む研究として、Chan and Leal<sup>31)</sup>、高木ら<sup>32)</sup>、Magnaudet ら<sup>33)</sup>、Takemura ら<sup>34)</sup>、Sugiyama and Takemura<sup>35)</sup>などがある。Chan and Leal<sup>31)</sup>、Takemura ら<sup>34)</sup>は、壁面近傍にせん断流が存在することにより気泡が変形をさせる系を、高木ら<sup>32)</sup>は、静止流体中を変形気泡が体積力を受けて壁面に平行に移動する系を解析している。Magnaudet ら<sup>33)</sup>は、壁面近傍を移動する変形気泡に対してせん断流が存在する場合を含めて、微小な慣性影響も考慮した系を解析している。Sugiyama and Takemura<sup>35)</sup>は、気泡界面と壁面間距離が短い場合において気泡が変形により発生された斥力（横力）の解析を行っており、壁面に遠ざかると気泡の変形により生じる斥力（横力）も小さくなっていく報告をしている。本論文は、変形しない球形気泡・粒子のみを検討するため、変形の影響は考慮しない。

次に、壁面近傍における気泡の運動に関する重要な実験について紹介する。竹村ら<sup>6)</sup>と Takemura et al.<sup>8)</sup>は顕微鏡付きのカメラを移動させながら、静止流体中を上昇する気泡の上昇速度と気泡径を同時に測定できる装置を用い、シリコンオイル中を上昇する球形ガス気泡の壁面近傍の鉛直方向上昇速度および気泡を壁面から遠ざかる方向に働く斥力（横力）を求めた。および、竹村ら<sup>7)</sup>は水中に界面活性剤を十分添加することによって気泡が固体球として振る舞う気泡の壁面近傍の鉛直方向上昇速度および気泡を壁面から遠ざかる方向に働く斥力（横力）を求めた。特に、彼らは<sup>6-8)</sup>気泡に働く抵抗力および斥力（横力）について検討するため、Vasseur and Cox<sup>4)</sup>の解析結果を修正した理論式を提案し、壁面近傍を上昇する球形気泡に働く抵抗力に対しては実験結果との比較的良好な一致を得た。図 2.1 に、黒色矢印はそれぞれ気泡・粒子に働く浮力、抵抗力、斥力（横力）を、青色矢印の方向は気泡・粒子の移動方向を、赤色矢印は気泡・粒子に働く抵抗力の水平方向と鉛直方向の分力を表す。ここは、鉛直方向から少し傾いた方向に上昇する気泡・粒子に働く抵抗力は、浮力と斥力（横力）の合力と近似的に釣り合うと仮定し、斥力（横力）は抵抗力の水平成分と釣り合うため、水平方向速度を用いて気泡の水平方向成分の抵抗力を求めれば、それが斥力（横力）となる。このように考えると、前述した抵抗力の数学モデル、気泡の場合は式(2.12)、粒子の場合は式(2.14)中の気泡・粒子の移動速度を水平方向の速度のみを用いて求めた抵抗力は気泡・粒子に働く斥力（横力）と見なすことができる。

ここでは、単一上昇する気泡・粒子に働く各種の力を中心に説明を行った。これらの力を統一に取り扱えば、気泡・粒子群おける分散および集積傾向などのつじつまの合う説明が可

能となる。しかし、工業分野や医療分野など多くの流れ場は壁面が存在するため、気泡・粒子と壁面間の相互作用は最も頻繁に現れる現象となる。次節に、この現象について検討を行う。

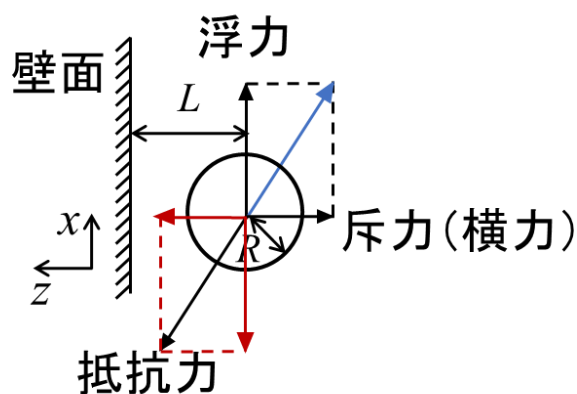


図 2.1 浮力，斥力（横力），抵抗力による壁面近傍を上昇する気泡・粒子の平衡。

## 2.3 壁面が存在する場合における単一気泡・粒子の挙動

### 2.3.1 壁面近傍を上昇する単一気泡・粒子の終端速度

前節の最後に、壁面の影響で壁面近傍を上昇する気泡・粒子に壁面に遠ざかる斥力（横力）が働くことを述べている。Stokes 流れ領域における低レイノルズ数領域において、壁面によって生成された慣性力の影響が小さく、気泡・粒子に働く斥力（横力）も小さくなるが、抵抗力が増加することを竹村ら<sup>6)</sup>の実験および理論解析によって証明されている。彼ら<sup>6)</sup>は、顕微鏡付きのカメラを移動させながら、静止流体中を上昇する気泡の上昇速度と気泡径を同時に測定できる装置を用い、シリコンオイル中に板を挿入したことで壁として、気泡と壁面との距離を変化させ、上昇速度に対する壁面の影響を検討した。特に、この実験において、気泡発生時に、無限流体中とみなせる定常解から得られた気泡の上昇速度は非定常性による影響がないことをみとめ、気泡に働く全ての力が釣り合っている状態となった時の気泡の上昇速度が一定となる定常状態に達してから、板が存在する領域に侵入して気泡の上昇速度の変化を測定することを言いつべきのことである。以下には、竹村ら<sup>6)</sup>と同じ方法に従い、Vasseur and Cox<sup>4)</sup>の式を用いて、壁面の影響で気泡・粒子に働く抵抗力の増加量の解析を行う。

球形気泡と球形粒子の違いについては、気泡・粒子から離れた遠方で流れが受けられた Stokeslet の強さに違いを生じるため、Oseen 近似でも行った一次の項の解の接合の際に、影

響を与える。そこで、Vasseur and Cox<sup>4)</sup>の式を、球形気泡・粒子に働く抵抗力を計算すると次式用に与える。

$$F_D = 6\pi\nu\rho_fRU_\infty \left\{ R_f + \frac{Re_\infty}{2} R_f^2 \left( \frac{3}{8} + I_1 \right) + \dots \right\} \quad (2.19)$$

ここで、 $I_1$  は竹村ら<sup>6)</sup>によって Vasseur and Cox<sup>4)</sup>の式を修正した式を用い、

$$I_1 = -\frac{3}{4\pi Re_L^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left\{ (\chi + \xi) e^{-2\xi} + \left( 2\chi + \frac{\chi - \xi}{\chi} \times \frac{i\xi \cos\varphi - Re_L}{i\xi \cos\varphi} \right) e^{-2\chi} - 4\chi e^{-(\chi+\xi)} \right\} \frac{i\xi \cos\varphi}{\chi - \xi} d\xi d\chi \quad (2.20)$$

ここで、

$$\chi = (\xi^2 + i\xi Re_L \cos\varphi)^{1/2}, \quad Re_L = \frac{LU_\infty}{\nu}, \quad Re_\infty = \frac{2RU_\infty}{\nu}$$

と表される。 $Re_L$  は距離レイノルズ数で、気泡・粒子中心と壁面間距離  $L$ ，無限流体中における気泡・粒子の上昇終端速度  $U_\infty$ ，流体の動粘性係数  $\nu$  によって作った無次元数である。 $Re_\infty$  は無限流体中の気泡・粒子レイノルズ数で、気泡・粒子直径  $2R$ ，無限流体中における気泡・粒子の上昇終端速度  $U_\infty$ ，流体の動粘性係数  $\nu$  によって作った無次元数である。また、気泡の場合は  $R_f = 2/3$  とし、粒子の場合は  $R_f = 1$  とする。

壁面による抵抗力の増加量を求めるために、Vasseur and Cox<sup>4)</sup>の式の高次項を無視し、次式のように変形する。

$$F_D = 6\pi\nu\rho_fRU_\infty \left( R_f + \frac{Re_\infty}{2} R_f^2 \frac{3}{8} + \frac{Re_\infty}{2} R_f^2 I_1 \right). \quad (2.21)$$

また、距離レイノルズ数  $Re_L$  と気泡・粒子レイノルズ数  $Re_\infty$  は無限流体中における気泡・粒子の上昇終端速度  $U_\infty$  を相互に消して、次の関係を持つこととなる。

$$Re_\infty = Re_L \frac{2R}{L}. \quad (2.22)$$

その関係式を変形した Vasseur and Cox<sup>4)</sup>の式に代入すれば、気泡および粒子に働く壁面との

距離を含まれた抵抗力は、次式のように与える.

$$F_D = 6\pi\nu\rho_fRU_\infty\left(R_f + R_f^2Re_\infty\frac{3}{16} + Re_L\frac{2R}{L}R_f^2I_1\right). \quad (2.23)$$

気泡の場合は  $R_f = 2/3$ , 粒子の場合は  $R_f = 1$  とすれば, 気泡と粒子に働く抵抗力はそれぞれ次式のように与える.

$$F_{D,b} = 4\pi\nu\rho_fRU_{\infty,b}\left(1 + \frac{1}{8}Re_{\infty,b} + \frac{2}{3}\cdot\frac{R}{L}Re_{L,b}I_1\right), \quad (2.24)$$

$$F_{D,p} = 6\pi\nu\rho_fRU_{\infty,p}\left(1 + \frac{3}{16}Re_{\infty,p} + \frac{R}{L}Re_{L,p}I_1\right). \quad (2.25)$$

上式より, 気泡の場合において, 無限流体中の抵抗力は,

$$F_{D,b} = 4\pi\nu\rho_fRU_{\infty,b}\left(1 + \frac{1}{8}Re_{\infty,b}\right), \quad (2.26)$$

壁面の影響で生じた抵抗力の増加量は,

$$F_{D,b,w} = 4\pi\nu\rho_fRU_{\infty,b}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{R}{L}Re_{L,b}I_1, \quad (2.27)$$

である. 粒子の場合において, 無限流体中の抵抗力は,

$$F_{D,p} = 6\pi\nu\rho_fRU_{\infty,p}\left(1 + \frac{3}{16}Re_{\infty,p}\right), \quad (2.28)$$

壁面の影響で生じた抵抗力の増加量は,

$$F_{D,p,w} = 6\pi\nu\rho_fRU_{\infty,p}\cdot\frac{R}{L}Re_{L,p}I_1, \quad (2.29)$$

である. 特に,  $Re_L \geq 10$  となれば, 壁面からの影響がなくなる<sup>6)</sup>. 式(2.22)を用いて考えれば, 無限流体中の気泡・粒子レイノルズ数  $Re_\infty$  が小さくても壁面との距離が十分に離れる

と、壁面による影響を受けない、または、壁面との距離が近くても無限流体中の気泡・粒子レイノルズ数  $Re_\infty$  が十分に大きければ、壁面による影響も受けないことがわかった。

無限流体中の気泡・粒子レイノルズ数  $Re_\infty$  が大きくなる場合において、論理的に全体の抵抗力の線形和で表現できる保証がないが、竹村ら<sup>6)</sup>によって無限流体中の抵抗力と壁面の影響で生じた抵抗力の増加量の線形和で表現した式の有効性を確認したため、本論文でも同様に線形和で表現した式を用いる。しかし、式(2.26)と式(2.28)は、Oseen 近似で得られた無限流体中の解であるため、 $Re_\infty \ll 1$  の範囲のみ成立できる。ここで、抵抗力の式は、Mei et al.<sup>1)</sup>の式と Clift et al.<sup>3)</sup>の式を用いて、次式のように与える。

$$F_{D,b} = 4\pi\nu\rho_fRU_{\infty,b} \left\{ 1 + \left[ \frac{8}{Re_{\infty,b}} + 0.5 \left( 1 + \frac{3.315}{Re_{\infty,b}^{0.5}} \right) \right]^{-1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{R}{L} Re_{L,b} I_1 \right\}, \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} F_{D,p} &= 6\pi\nu\rho_fRU_{\infty,p} \left[ \frac{24}{Re_{\infty,p}} \left( 1 + \frac{3}{16} Re_{\infty,p} \right) + \frac{R}{L} Re_{L,p} I_1 \right], & (Re_{\infty,p} \leq 0.01) \\ &= 6\pi\nu\rho_fRU_{\infty,p} \left[ 1 + 0.1315 Re_{\infty,p}^{(0.82-0.05 \log_{10} Re_{\infty,p})} + \frac{R}{L} Re_{L,p} I_1 \right], & (0.01 < Re_{\infty,p} \leq 20) \\ &= 6\pi\nu\rho_fRU_{\infty,p} \left[ 1 + 0.1935 Re_{\infty,p}^{0.6305} + \frac{R}{L} Re_{L,p} I_1 \right], & (20 < Re_{\infty,p} \leq 260) \end{aligned} \quad (2.31)$$

次は、気泡・粒子が無限流体中から壁面が存在する領域に侵入すると考えて、気泡・粒子の半径が変化なしとして、同種の流体とする連続している条件と課すれば、以下の式が成立できると考えられる。気泡の場合は、

$$4\pi\nu\rho_fRU_{w,b} \left[ f(Re_{w,b}) + \frac{2}{3} \cdot \frac{R}{L} Re_{L,b} I_1 \right] = 4\pi\nu\rho_fRU_{\infty,b} f(Re_{\infty,b}). \quad (2.32)$$

ここで、右下の添え字  $w$  は、壁面の影響が存在する場合とする。ただし、

$$f(Re) = 1 + \left[ \frac{8}{Re} + 0.5 \left( 1 + \frac{3.315}{Re^{0.5}} \right) \right]^{-1} \quad (2.33)$$

とする。この式に対して、左右両辺に  $4\pi\nu\rho_f$  で割ってから、 $2/\nu$  をかけると、次式のように変形できる。

$$Re_{w,b} \left[ f(Re_{w,b}) + \frac{2}{3} \cdot \frac{R}{L} Re_{L,b} I_1 \right] = Re_{\infty,b} f(Re_{\infty,b}), \quad (2.34)$$

ここで、 $Re_{\infty,b}$  と  $R/L$  は既知値であり、 $Re_{L,b} I_1$  は式(2.20)の積分を解くことで求めることができるから、上式を満足する  $Re_{w,b}$  を反復計算で求められる。本論文では、反復計算において、配列二分法を用いた。粒子の場合でも、同じ方法を用いて、

$$6\pi\nu\rho_f R U_{w,p} \left[ f(Re_{w,p}) + \frac{R}{L} Re_{L,p} I_1 \right] = 6\pi\nu\rho_f R U_{\infty,p} f(Re_{\infty,p}) \quad (2.35)$$

が得られる。ただし、

$$\begin{aligned} f(Re) &= \frac{24}{Re} \left( 1 + \frac{3}{16} Re \right), & (Re \leq 0.01) \\ &= 1 + 0.1315 Re^{(0.82-0.05\log_{10} Re)}, & (0.01 < Re \leq 20) \\ &= 1 + 0.1935 Re^{0.6305}, & (20 < Re \leq 260) \end{aligned} \quad (2.36)$$

変形すれば、

$$Re_{w,p} \left[ f(Re_{w,p}) + \frac{R}{L} Re_{L,p} I_1 \right] = Re_{\infty,p} f(Re_{\infty,p}) \quad (2.37)$$

となる。同様に配列二分法を用いて、 $Re_{w,p}$  を求める。

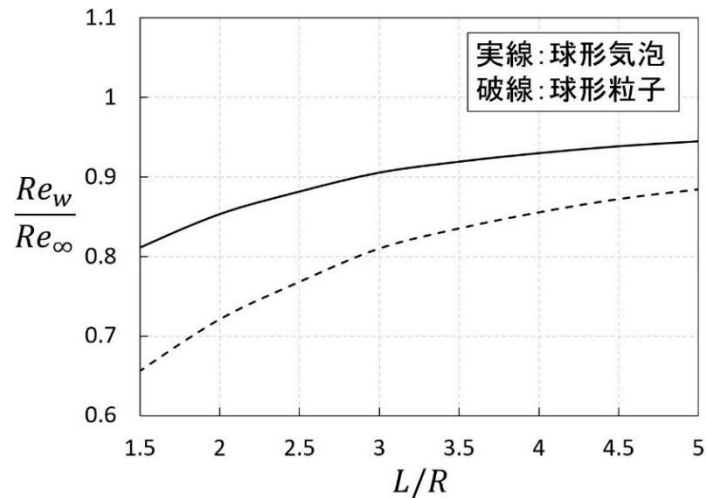


図 2.2  $Re_{\infty} = 0.1$  の場合における  $L/R$  に対する  $Re_w/Re_{\infty}$ .

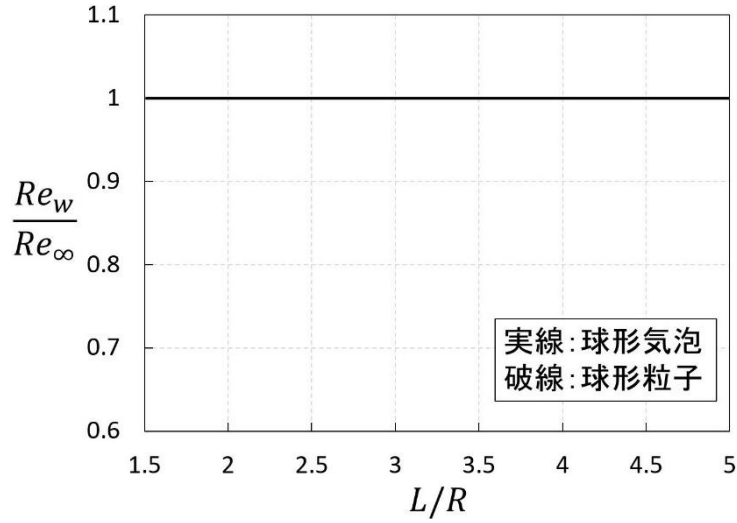


図 2.3  $Re_\infty = 30$  の場合における  $L/R$  に対する  $Re_w/Re_\infty$ .

図 2.2 と図 2.3 に、式(2.34)と式(2.37)を用いて計算された  $Re_\infty = 0.1$  および  $Re_\infty = 30$  の場合の  $L/R$  に対する  $Re_w/Re_\infty$  のグラフを示している. 右下に添え字  $w$  と  $\infty$  のみを添えている場合は気泡と粒子が共通となるのを意味する. 実線は球形気泡, 破線は球形粒子を表す. 図 2.2 より,  $Re_\infty = 0.1$  の気泡・粒子が壁面に近づくと上昇終端速度が下がり, 気泡中心から壁面間に垂直する最も短い距離  $L$  が 1.5 倍の気泡半径の程度で無限流体中の約 8 割程度の速度となっている. 粒子の場合は, 1.5 倍の粒子半径の程度で無限流体中の約 6.5 割程度の速度となっている. 図 2.3 より,  $Re_\infty = 30$  の気泡・粒子は, 両場合ともに壁面からの影響を受けなくなることがわかった.

### 2.3.2 壁面近傍を上昇する単一気泡・粒子に働く斥力 (横力)

前節で粘性のみ支配された Stokes 流れ領域における Stokes 流れの運動学的可逆性によって, 壁面近傍を上昇する気泡・粒子は, 壁面の影響を受けなくなることとを理論解析によって説明したが,  $Re_\infty > 1$  の範囲であれば, 壁面からの影響を受けることとなる. すなわち, 気泡・粒子に斥力 (横力) が働くこととなる. ここでは, 図 2.1 の示すように, 壁面近傍を上昇する気泡・粒子は, 鉛直方向から傾いた方向に上昇する場合は, 浮力, 斥力 (横力), 抵抗力によって釣り合っている状態となると考えて, 気泡の場合は Takemura et al.<sup>8)</sup>の方法にしたがい, 粒子の場合は Vasseur and Cox<sup>4)</sup>の方法にしたがい, Navier-Stokes 方程式に対して抵抗力項のみを生成項として, 気泡の場合と粒子の場合それぞれ次式のように与える.

$$\nabla^2 u_i - \nabla p - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -4\pi(e_1 - \alpha e_2)\delta(r_i), \quad (2.38)$$



$$\nabla^2 u_i - \nabla p - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -6\pi(e_1 - \alpha e_2)\delta(r_i), \quad (2.39)$$

$$u_i \rightarrow 0 \quad (r_i \rightarrow \infty), \quad u_i = 0 \quad \text{On the wall.}$$

ここで、 $\alpha = u_3/u_1$  であり、 $i = 1, 2, 3$  方向成分はそれぞれ  $x, y, z$  方向成分を示す。上式を  $x, y$  方向の二次元フーリエ変換すれば、

$$\left\{ -k_x^2 - k_y^2 - ik_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \begin{pmatrix} \Gamma_x \\ \Gamma_y \\ \Gamma_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ik_x \\ ik_y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \Pi - ik_x \begin{pmatrix} \Gamma_x \\ \Gamma_y \\ \Gamma_z \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi^2} \begin{pmatrix} 4\pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \delta(z), \quad (2.40)$$

$$\left\{ -k_x^2 - k_y^2 - ik_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \begin{pmatrix} \Gamma_x \\ \Gamma_y \\ \Gamma_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ik_x \\ ik_y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \Pi - ik_x \begin{pmatrix} \Gamma_x \\ \Gamma_y \\ \Gamma_z \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi^2} \begin{pmatrix} 6\pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \delta(z). \quad (2.41)$$

また、気泡・粒子の水平方向速度が非常に小さく、無限流体中の気泡・粒子レイノルズ数を用いて換算すれば、 $Re_\infty < 1$  であることがわかったため、水平方向の慣性項が無視することができる<sup>6-8)</sup>。

$$\left\{ -k_x^2 - k_y^2 - ik_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \begin{pmatrix} \Gamma_x \\ \Gamma_y \\ \Gamma_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ik_x \\ ik_y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \Pi = \frac{1}{4\pi^2} \begin{pmatrix} 4\pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \delta(z), \quad (2.42)$$

$$\left\{ -k_x^2 - k_y^2 - ik_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \begin{pmatrix} \Gamma_x \\ \Gamma_y \\ \Gamma_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ik_x \\ ik_y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \Pi = \frac{1}{4\pi^2} \begin{pmatrix} 6\pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \delta(z) \quad (2.43)$$

となる。ここで、 $k_x, k_y$  は周波数を表す。 $\Gamma_i$  は二次元フーリエ変換された速度成分、 $\Pi$  は二次元フーリエ変換された圧力成分である。気泡の場合と粒子の場合はともに次式のように与える。

$$\Gamma_i(k_x, k_y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_i(x_i) \times \exp[-i(k_x x + k_y y)] dx dy, \quad (2.44)$$

$$\Pi(k_x, k_y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_i) \times \exp[-i(k_x x + k_y y)] dx dy. \quad (2.45)$$

上式を  $r_i = 0$  点において解くと、壁面を考慮した2方向の速度成分は、気泡の場合は、次式のように与える。

$$\begin{aligned} \Gamma_x(0) = & \Gamma_x^\infty(0) - \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{ik_x(t+q)}{q(t-q)} e^{-2qRe_L} + \left\{ \frac{2ik_x t}{(t-q)q} + \frac{ik_x - 1}{t} \right\} e^{-2tRe_L} - \frac{4ik_x t}{(t-q)q} e^{-(t+q)Re_L} \right] \\ & - \frac{\alpha(t+q)}{2\pi(t-q)} (e^{-qRe_L} - e^{-tRe_L})^2, \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_z(0) = & \Gamma_z^\infty(0) + \frac{t+q}{2\pi(t-q)} (e^{-qRe_L} - e^{-tRe_L})^2 \\ & - \frac{\alpha q^2}{2\pi ik_x(t-q)} \left\{ \frac{t+q}{q} e^{-2qRe_L} - 4e^{-(q+t)Re_L} + \frac{t+q}{t} e^{-2tRe_L} \right\}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

粒子の場合は、次式のように与える。

$$\begin{aligned} \Gamma_x(0) = & \Gamma_x^\infty(0) - \frac{3}{4\pi} \left[ \frac{ik_x(t+q)}{q(t-q)} e^{-2qRe_L} + \left\{ \frac{2ik_x t}{(t-q)q} + \frac{ik_x - 1}{t} \right\} e^{-2tRe_L} - \frac{4ik_x t}{(t-q)q} e^{-(t+q)Re_L} \right] \\ & - \frac{3\alpha(t+q)}{4\pi(t-q)} (e^{-qRe_L} - e^{-tRe_L})^2, \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_z(0) = & \Gamma_z^\infty(0) + \frac{3(t+q)}{4\pi(t-q)} (e^{-qRe_L} - e^{-tRe_L})^2 \\ & - \frac{3\alpha q^2}{4\pi ik_x(t-q)} \left\{ \frac{t+q}{q} e^{-2qRe_L} - 4e^{-(q+t)Re_L} + \frac{t+q}{t} e^{-2tRe_L} \right\}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

ここで、

$$Re_L = \frac{LU_\infty}{\nu}, \quad q^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad t^2 = k_x^2 + k_y^2 + ik_x.$$

式(2.46)の右辺の第一項は、無限流体中の成分を表す。第二項は、壁面の影響を考慮した鉛直方向速度による抵抗力成分の補正項を表す。第三項は、壁面の影響を考慮した水平方向速度による斥力(横力)成分の補正項を表す。式(2.47)の右辺の第一項は、無限流体中の成分

を表す．第二項は，壁面の影響を考慮した鉛直方向速度による斥力（横力）成分の補正項を表す．第三項は，壁面の影響を考慮した水平方向速度による抵抗力成分の補正項を表す．式(2.48)と式(2.49)のそれぞれ項の意味は，式(2.46)と式(2.47)と同様である．これから，

$$k_x = \frac{\lambda \cos \varphi}{Re_L}, \quad k_y = \frac{\lambda \sin \varphi}{Re_L}, \quad Re_L \cdot q = \lambda, \quad Re_L \cdot t = \chi$$

として，上式の鉛直方向速度による抵抗力成分に対して逆フーリエ変換を行って接合すると，気泡の場合は，次式のように与える．

$$\begin{aligned} I_{D,x} = & -\frac{1}{2\pi Re_L^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \{(\chi + \lambda)e^{-2\lambda} + 2\chi e^{-2\chi} - 4\chi e^{-(\chi+\lambda)}\} \frac{i\lambda \cos \varphi}{\chi - \lambda} d\lambda d\varphi \\ & -\frac{1}{2\pi Re_L^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{i\lambda \cos \varphi - Re_L}{\chi} \lambda e^{-2\chi} d\lambda d\varphi. \end{aligned} \quad (2.50)$$

粒子の場合は，次式のように与える．

$$\begin{aligned} I_{D,x} = & -\frac{3}{4\pi Re_L^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \{(\chi + \lambda)e^{-2\lambda} + 2\chi e^{-2\chi} - 4\chi e^{-(\chi+\lambda)}\} \frac{i\lambda \cos \varphi}{\chi - \lambda} d\lambda d\varphi \\ & -\frac{3}{4\pi Re_L^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{i\lambda \cos \varphi - Re_L}{\chi} \lambda e^{-2\chi} d\lambda d\varphi. \end{aligned} \quad (2.51)$$

上式の水平方向速度による抵抗力および斥力（横力）成分に対して逆フーリエ変換を行って接合すると，気泡の場合は，次式のように与える．

$$\alpha I_{D,z} = -\frac{\alpha}{2\pi Re_L^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\lambda^2}{i \cos \varphi} \left[ \left( \frac{e^{-2\lambda}}{\lambda} - \frac{e^{-2\chi}}{\chi} \right) + \frac{2(e^{-\lambda} - e^{-\chi})^2}{\chi - \lambda} \right] d\lambda d\varphi, \quad (2.52)$$

$$I_L = \frac{1}{2\pi Re_L^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\chi + \lambda}{\chi - \lambda} (e^{-\lambda} - e^{-\chi})^2 \lambda d\lambda d\varphi. \quad (2.53)$$

粒子の場合は，次式のように与える．

$$\alpha I_{D,z} = -\frac{3\alpha}{4\pi Re_L^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\lambda^2}{i \cos \varphi} \left[ \left( \frac{e^{-2\lambda}}{\lambda} - \frac{e^{-2\chi}}{\chi} \right) + \frac{2(e^{-\lambda} - e^{-\chi})^2}{\chi - \lambda} \right] d\lambda d\varphi, \quad (2.54)$$

$$I_L = \frac{3}{4\pi Re_L^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\chi + \lambda}{\chi - \lambda} (e^{-\lambda} - e^{-\chi})^2 \lambda d\lambda d\varphi. \quad (2.55)$$

ここで,  $Re_\infty \rightarrow 0$ ,  $Re_L \rightarrow 0$  の極限で, 気泡の場合は,

$$I_{D,x} = -\frac{3}{8Re_L}, \quad I_{D,z} = -\frac{3}{4Re_L}, \quad I_L = -\frac{1}{16},$$

粒子の場合は,

$$I_{D,x} = -\frac{9}{16Re_L}, \quad I_{D,z} = -\frac{9}{8Re_L}, \quad I_L = -\frac{3}{32}$$

となり, 気泡に働く鉛直方向抵抗力および水平方向斥力 (横力) は, 次式のようになる.

$$F_{D,x} = -4\pi\mu RU_1 \left\{ 1 + \frac{Re}{2} \left( \frac{1}{4} - I_{D,x} \right) \right\} = -4\pi\mu RU_1 \left\{ 1 + \frac{1}{8} Re + \frac{3R}{8L} \right\}, \quad (2.56)$$

$$F_{L,z} = -4\pi\mu RU_1 \left\{ \alpha - \frac{Re}{2} (\alpha I_{D,z} + I_L) \right\} = -4\pi\mu RU_3 \left\{ 1 + \frac{3R}{4L} \right\}. \quad (2.57)$$

粒子に働く鉛直方向抵抗力および水平方向斥力 (横力) は, 次式のようになる.

$$F_{D,x} = -6\pi\mu RU_1 \left\{ 1 + \frac{Re}{2} \left( \frac{3}{8} - I_{D,x} \right) \right\} = -6\pi\mu RU_1 \left\{ 1 + \frac{3}{16} Re + \frac{9R}{16L} \right\}, \quad (2.58)$$

$$F_{L,z} = -6\pi\mu RU_1 \left\{ \alpha - \frac{Re}{2} (\alpha I_{D,z} + I_L) \right\} = -6\pi\mu RU_3 \left\{ 1 + \frac{9R}{8L} \right\}. \quad (2.59)$$

抵抗力に対して, Happel and Brenner<sup>36)</sup>の Stokes 近似の解となる. ただし, 気泡・粒子が壁面から離れると,  $Re_L$  が大きくなっていって漸近解が使えなくなるため, 式(2.52)~式(2.55)の積分を求める必要がある. 図 2.4 と図 2.5 および図 2.6 と図 2.7 に, 気泡の場合および粒子の場合における  $Re_L$  に対する  $Re_L * I_{D,z}$  と  $I_{L,z}$  の値を示している. 図 2.4 は式(2.52)の積分を解いて気泡に働く抵抗力成分の値を示す. 図 2.5 は式(2.53)の積分を解いて気泡に働く斥力 (横力) 成分の値を示す. 図 2.6 は式(2.54)の積分を解いて粒子に働く抵抗力成分の値を示す. 図 2.7 は式(2.55)の積分を解いて粒子に働く斥力 (横力) 成分の値を示す. 気泡と粒子の

両方の場合も、 $Re_L$  の値が大きくなるとともに  $Re_L * I_{D,z}$  と  $I_{L,z}$  の値のどちらも小さくなる  
 ことが見える。特に、 $Re_L \geq 10$  の範囲で、壁面からの影響がなくなることがわかる<sup>5-8)</sup>。

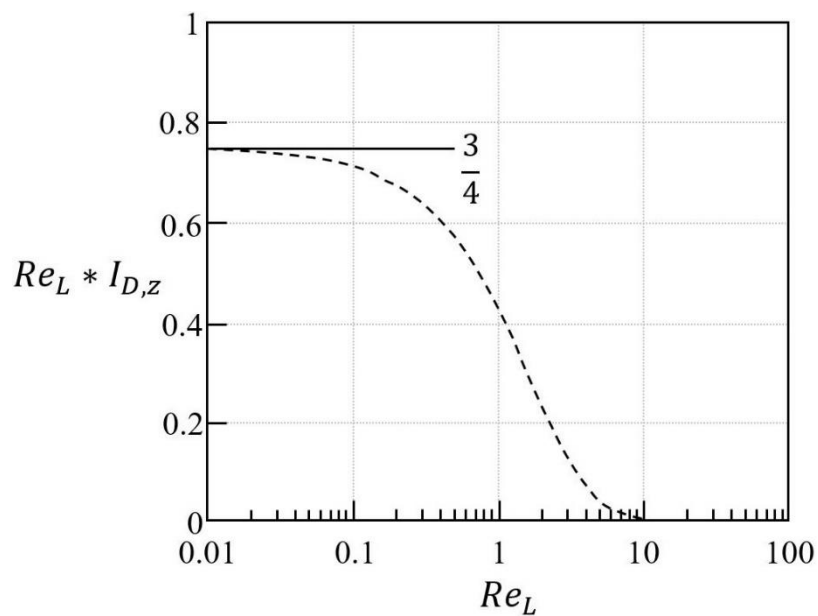


図 2.4 気泡の場合における  $Re_L$  に対する  $Re_L * I_{D,z}$  の値.

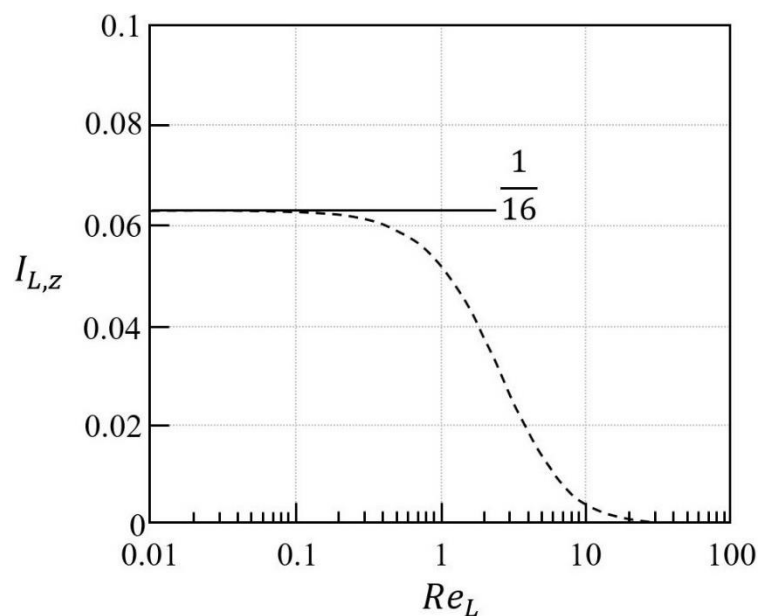


図 2.5 気泡の場合における  $Re_L$  に対する  $I_{L,z}$  の値.

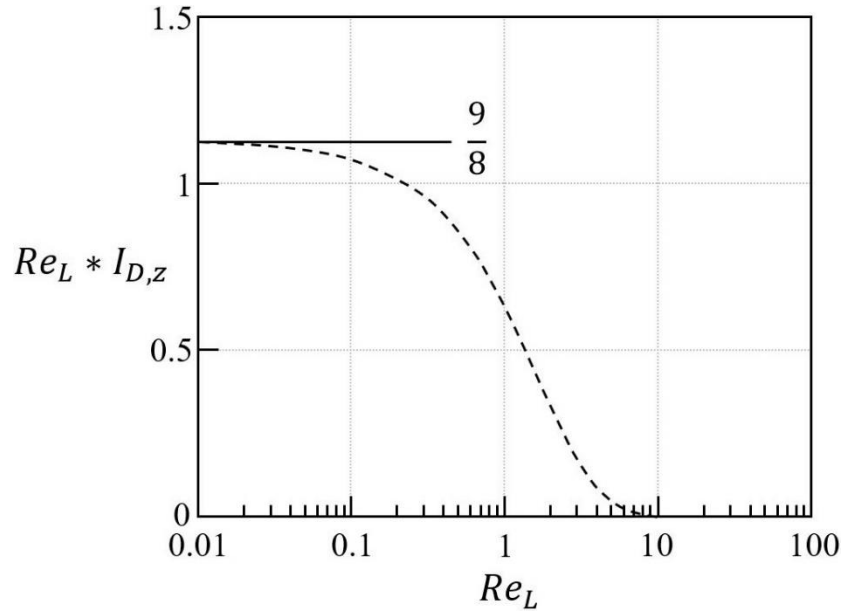


図 2.6 粒子の場合における  $Re_L$  に対する  $Re_L * I_{D,z}$  の値.

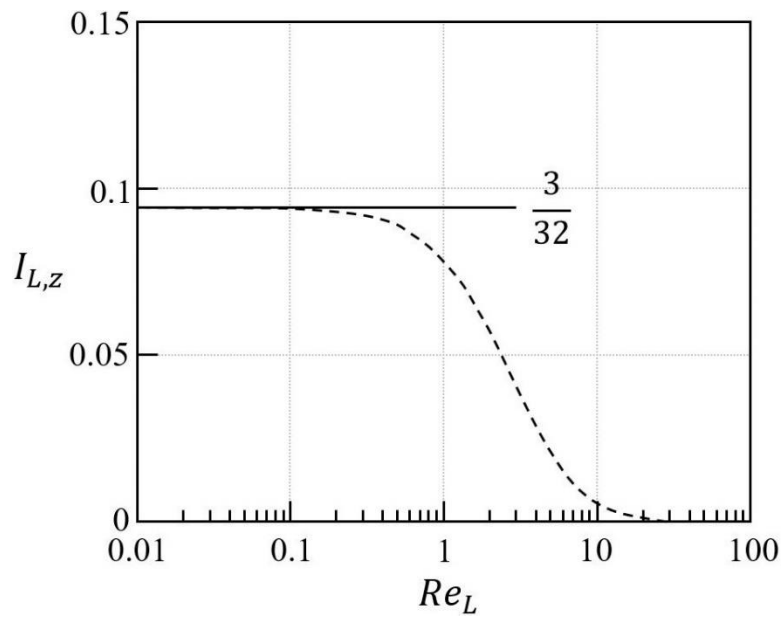


図 2.7 粒子の場合における  $Re_L$  に対する  $I_{L,z}$  の値.

## 第 2 章参考文献

- 1) Mei, R., Klausner, J. F. and Lawrence, C. J., “A Note on the History Force on Spherical Bubble at Finite Reynolds Number”, *Physics of Fluids*, Vol. 6 (1994) pp. 418-420.
- 2) 高木周, 松本洋一郎, “静止流体中を上昇する球形気泡に働く力”, *混相流*, 第 10 卷 3 号(1996), pp. 264-273.
- 3) Clift, R., Grace, J. R. and Weber, M. E., “Bubbles, Drops and Particles”, Academic Press (1978).
- 4) Vasseur, P. and Cox, R. G., “The lateral migration of spherical particle sedimenting in stagnant bounded fluid”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 80 (1977) pp. 561-591.
- 5) 竹村文男, 高木周, 松本洋一郎, “壁面近傍における球形ガス気泡の上昇速度”, *日本機械学会論文集 B 編*, 第 66 卷 648 号(2000) pp. 2087-2094.
- 6) 竹村文男, 高木周, 松本洋一郎, “壁面近傍を上昇する球形ガス気泡に働く揚力”, *日本機械学会論文集 B 編*, 第 66 卷 649 号(2000) pp. 2320-2326.
- 7) 竹村文男, 高木周, 松本洋一郎, “壁近傍を上昇する水中気泡に働く低レイノルズ数域における揚力”, 第 68 卷 670 号(2002) pp. 1684-1690.
- 8) Takemura, F., Takagi, S., Magnaudet, J. and Matsumoto, Y., “Drag and lift forces on a bubble rising near a vertical wall in a viscous liquid”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 461 (2002) pp. 277-300.
- 9) Magnaudet, J., Rivero, M. and Fabre, J., “Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical bubble. Part 1. Steady straining flow”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 284 (1995) pp. 97-135.
- 10) Levich, V. G., “Motion of gaseous bubbles with high Reynolds numbers”, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, Vol. 19 (1949) pp. 18-24.
- 11) Rivkind, V. Y. and Ryskin, G. M., “Flow structure in motion of a spherical drop in a fluid medium at intermediate Reynolds numbers”, *Fluid Dynamics*, Vol. 11 (1976) pp. 5-12.
- 12) Abdel - Alim, A. H. and Hamielec, A. E., “Bulk polymerization of vinyl chloride—commercial initiator systems”, *Journal of Applied Polymer Science*, Vol. 18 (1974) pp. 1603-1609.
- 13) Moore, D. W., “The boundary layer on a spherical gas bubble”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 16 (1963) pp. 161-176.
- 14) Oliver, D. L. R. and Chung, J. N., “Flow about a Fluid Sphere at Low to Moderate Reynolds Numbers”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 154 (1985) pp. 215-230.
- 15) 富山明男, 片岡勲, 坂口忠司, “気泡の抗力係数に関する研究 (第 1 報, 静止液中単一気泡の抗力係数)”, *日本機械学会論文集 B 編*, 第 61 卷 587 号(1995) pp. 2357-2364.
- 16) 竹村文男, 矢部彰, “低レイノルズ数領域における球形気泡の上昇速度”, *日本機械学会論文集 B 編*, 第 63 卷 613 号(1997), pp. 2909-2914.
- 17) Basset, A. B., “A Treatise on Hydrodynamics”, Vols. 1 and 2, Dover Publications, New York (1888).

- 18) Yang, S. M. and Leal, L. G., “A note on the memory-integral contributions to the force on an accelerating spherical drop at low Reynolds number”, *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, Vol. 3 (1991), pp. 1822-1824.
- 19) Katz, J. and Meneveau, C., “Wake-induced relative motion of bubbles rising in line”, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 22 (1996), pp. 239-258.
- 20) Yuan, H. and Prosperetti, A., “On the in-line motion of two spherical bubbles in a viscous fluid”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 278 (1994), pp. 325-349.
- 21) 渡部正夫, 真田俊之, “鉛直線上に配置された 2 気泡の挙動に関する研究”, *日本機械学会論文集 B 編*, 第 77 巻 702 号(2005), pp. 389-396.
- 22) Legendre, D., Magnaudet, J. and Mougin, G., “Hydrodynamic interaction between two spherical bubbles rising side by side in a viscous liquid”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 497 (2003), pp. 133-166.
- 23) 真田俊之, 杉原慶治, 城田農, 渡部正夫, 深野徹, “水平に並んで上昇する 2 気泡の合体と反発”, *混相流研究の進展*, 第 1 巻(2006), pp. 1-8.
- 24) Hallez, Y. and Legendre, D., “Interaction between two spherical bubbles rising in a viscous liquid”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 673 (2011), pp. 406-431.
- 25) Kitagawa, A., Sugiyama, K. and Murai, Y., “Experimental detection of bubble-bubble interactions in a wall-sliding bubble swarm”, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 30 (2004), pp. 1213-1234.
- 26) 北川石英, 大里拓也, 村井祐一, “鉛直壁面近傍を浮上するマイクロバブル群の運動特性”, *日本機械学会論文集 B 編*, 第 79 巻 800 号(2013), pp. 701-711.
- 27) 小笠原紀行, 白井翔丈, 高比良裕之, “斜め平板下を上昇する球形気泡群のクラスタ化挙動に関する実験的解析”, *日本機械学会論文集*, 第 80 巻 837 号(2016), p. 16-00051.
- 28) Auton, T. R., “The lift force on a spherical body in a rotational flow”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 183 (1987), pp. 199-218.
- 29) Kurose, R. and Komori, S., “Drag and lift forces on a rotating sphere in a linear shear flow”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 384 (1999), pp. 183-206.
- 30) Bagchi, P. and Balachandar, S., “Effect of free rotation on the motion of a solid sphere in linear shear flow at moderate  $Re$ ”, *Physics of Fluids*, Vol. 14 (2002), pp. 2719-2737.
- 31) Chan, P. C. H. and Leal, L. G., “The Motion of a Deformable Drop in a Second Order Fluid”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 92 (1979), pp. 131-170.
- 32) 高木周, 竹村文男, 松本洋一郎, “壁面近傍を上昇する変形気泡に働く力の理論解析”, *日本機械学会論文集 B 編*, 第 67 巻(2001), pp. 1138-1145.
- 33) Magnaudet, J., Takagi, S. and Legendre, D., “Drag, deformation and lateral migration of a buoyant drop moving near a wall”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 476 (2003), pp. 115-157.



- 34) Takemura, F., Magnaudet, J. and Dimitrakopoulos, P., “Migration and deformation of bubbles rising in a wall-bounded shear flow at finite Reynolds number”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 634 (2009), pp. 463-486.
- 35) Sugiyama, K. and Takemura, F., “On the lateral migration of a slightly deformed bubble rising near a vertical plane wall”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 662 (2010), pp. 209-231.
- 36) Happel, J. and Brenner, H., “Low Reynolds Number Hydrodynamics”, Martinus Nijhoff Publishers (1963).

## 第3章 Force-coupling Method について

### 3.1 Force-coupling Method の基礎方程式

Force-coupling Method (以下 FCM と略す) は, Maxey ら<sup>1-18)</sup>によって開発された比較的  
小さな計算負荷を有する粒子を含む流体運動を計算することができる手法である. この手  
法は, 粒子表面の正確な境界条件を満たすために移動境界を考慮せず, その代わりに, 平滑  
化デルタ関数を用いて, 粒子と流体の相互作用力を体積力項として Navier-Stokes 方程式に  
導入し, 球形であると仮定した粒子の中心を点源として周りの流れに作用する視点に立ち,  
その作用力の分布を考慮し, 多極展開の低次項を取ることによって計算される手法である.  
関連するパラメータは, 粒子の密度と, 粒子から流れへ作用する力の粒子半径に関わる長さ  
スケールである. 各粒子の速度は, 粒子体積力が有効な領域にわたる流れの局所的な速度の  
体積平均をとることによって得られる. それで, 有効な作用力の長さスケールは粒子径と同  
じオーダーであるため, 粒子境界条件の影響が FCM で正確に反映された解が求まることが  
保障されないが, 計算コストを大幅に低減することができる. しかし, Maxey らのオリジナ  
ルの FCM は, 高粘性流体中で Stokes 近似レベルにおける球形粒子の解析のみ適用できる  
ように構成されており, 一般的な流体 (例えば, 水) 中の球形粒子および球形気泡の軌跡・  
速度を気泡・粒子径が非常に小さい場合しか正確に追うことができない. 本節では, FCM の  
基礎構成方程式を説明する. 次節から, オリジナルの FCM に対して改良を行う. 主な改良  
は, ①Stokes 近似および Oseen 近似から外れた高レイノルズ数範囲での球形粒子への解析  
ができるようにする. ②球形気泡に適用できるようにする. ③高レイノルズ数範囲での球形  
気泡への解析ができるようにする.

基礎方程式として, 非圧縮 Navier-Stokes 方程式に, 気泡・粒子と流体との相互作用を表  
す体積力項を加えたものを用いた. 次式のように与えられる.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + g_i + f_{P,i}. \quad (3.1)$$

ここで,  $u_i$  は流体の速度,  $t$  は時刻,  $\rho_f$  は流体の密度,  $p$  は圧力,  $\nu$  は流体の動粘性係数,  
 $g_i$  は重力加速度,  $f_{P,i}$  は気泡・粒子から流体に作用する体積力 (FCM による外力項) を表し,  
 $i = 1, 2, 3$  方向成分はそれぞれ  $x, y, z$  方向成分を示す. Navier-Stokes 方程式の解法につ  
いては, 次章で詳しく説明する.  $f_{P,i}$  は, 次式のように与えられる.

$$f_{P,i} = f_{M,i} + f_{D,i}. \quad (3.2)$$

ここで,  $f_{M,i}$  と  $f_{D,i}$  はそれぞれ Force Monopole 項 (以下 FM 項) と Force Dipole 項 (以下 FD

項) を表す. 図 3.1 と図 3.2 の示すように, FM 項は気泡・粒子の並進運動と関係があり, 気泡・粒子に働く抵抗力の反力を表す. FD 項は気泡・粒子周囲の速度勾配と関係があり, 回転によって気泡・粒子周囲のエネルギー散逸率の増加をもたらす, 摩擦抵抗を増やす働き  
の回転力を表す.

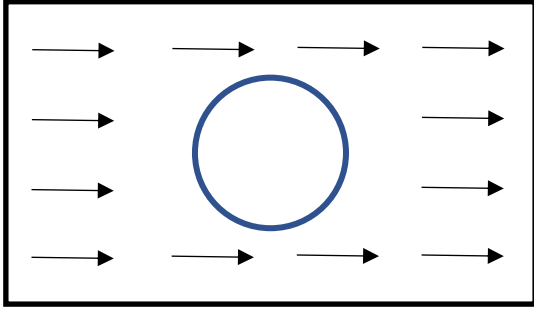


図 3.1 Force Monopole 項の運動

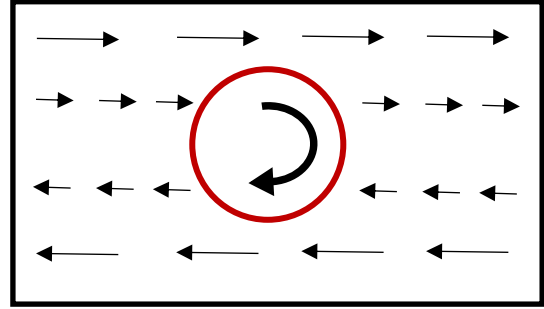


図 3.2 Force Dipole 項の運動

まず, FM 項について説明する.  $f_{M,i}$  は以下の式のように与える.

$$f_{M,i} = \sum_{n=1}^N \{F_i^{(n)} \Delta_M(x_i - Y_i^{(n)}, \sigma_M)\}. \quad (3.3)$$

ここで, 右上の添え字 ( $n$ ) は, 気泡・粒子の番号を表し, 気泡・粒子によって異なる.  $\Delta_M$  は FM 項による力の影響範囲を表す. ガウス分布を用いて次式のように表される.

$$\Delta_M(x_i - Y_i^{(n)}, \sigma_M) = \frac{1}{[2\pi(\sigma_M)^2]^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x_i - Y_i^{(n)})^2}{2(\sigma_M)^2}\right]. \quad (3.4)$$

ここで,  $x_i$  は空間位置ベクトル,  $Y_i^{(n)}$  は気泡・粒子の位置ベクトルを表す.  $\sigma_M$  は力の長さスケールで, 流れの全体のエネルギー収支を満たすように選択された. 気泡・粒子半径  $R^{(n)}$  を用いて次式のように与えられる.

$$\sigma_M = \frac{R^{(n)}}{\sqrt{\pi}}. \quad (3.5)$$

式(3.4)のガウス分布において, 例えば, 気泡・粒子が原点で  $x_i - Y_i^{(n)} = 0$  とし,  $R^{(n)} = 1$  とすれば, 図 3.3 のように示されており, FM 項による力の影響範囲は気泡・粒子半径より大きな範囲となっている.

$F_i^{(n)}$  は気泡・粒子から流体に作用する力を表す．次式のように与える．

$$F_i^{(n)} = \frac{4}{3}\pi(R^{(n)})^3(\rho_f - \rho_b)\left(g_i - \frac{dU_i^{(n)}}{dt}\right). \quad (3.6)$$

ここで， $\rho_b$  は気泡・粒子の密度， $U_i^{(n)}$  は気泡・粒子の速度を表す．本論文では  $\rho_b/\rho_f = 0.001$  とおく．気泡・粒子の速度は，流れの局所的な速度  $u_i$  の気泡・粒子領域にわたる体積平均により，次式で与えられる．

$$U_i^{(n)} = \iiint u_i(x_i, t)\Delta_M(x_i - Y_i^{(n)}, \sigma_M) d^3x_i, \quad (3.7)$$

また，気泡・粒子の加速度は，前時刻の速度  $U_i^{(n)(t-1)}$  と  $U_i^{(n)(t-2)}$  および時間刻み  $\Delta t$  を用いて後退差分によって求める．

$$\frac{dU_i^{(n)}}{dt} = \frac{3U_i^{(n)} - 4U_i^{(n)(t-1)} + U_i^{(n)(t-2)}}{2\Delta t}, \quad (3.8)$$

次の時間ステップの気泡・粒子の位置  $Y_i^{(n)(t+1)}$  は次式によって求める．

$$Y_i^{(n)(t+1)} = Y_i^{(n)} + \Delta t \frac{3U_i^{(n)} - U_i^{(n)(t-1)}}{2}. \quad (3.9)$$

次は，FM 項について説明する． $f_{D,i}$  は以下の式のように与える．

$$f_{D,i} = \sum_{n=1}^N G_{ij}^{(n)} \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta_D(x_i - Y_i^{(n)}, \sigma_D), \quad (3.10)$$

$\Delta_D$  は FD 項による力の影響範囲関数を表す．ガウス分布を用いて次式のように表される．

$$\Delta_D(x_i - Y_i^{(n)}, \sigma_D) = \frac{1}{[2\pi(\sigma_D)^2]^{3/2}} \exp\left[-\frac{(x_i - Y_i^{(n)})^2}{2(\sigma_D)^2}\right]. \quad (3.11)$$

ここで， $\sigma_D$  は力の長さスケールで，流れの全体のエネルギー収支を満たすように選択され

た. 気泡半径  $R^{(n)}$  を用いて次式のように与えられる.

$$\sigma_D = \frac{R^{(n)}}{(6\sqrt{\pi})^{\frac{1}{3}}}. \quad (3.12)$$

式(3.11)のガウス分布において, 例えば, 気泡・粒子が原点で  $x_i - Y_i^{(n)} = 0$  とし,  $R^{(n)} = 1$  とすれば, 図 3.3 のように示されており, FD 項による力の影響範囲は気泡・粒子半径とほぼ一致となっている.

また,  $G_{ij}^{(n)}$  は対称成分である  $S_{ij}^{(n)}$  と反対称成分である  $T_{ij}^{(n)}$  に構成されており, 次式のように表される.

$$G_{ij}^{(n)} = S_{ij}^{(n)} + T_{ij}^{(n)}. \quad (3.13)$$

まず, 反対称成分である  $T_{ij}^{(n)}$  について説明する.  $T_{ij}^{(n)}$  は気泡・粒子の外部トルクによって求める. 次式に求められる.

$$T_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} T_k^{(ext)}. \quad (3.14)$$

ここで,  $\varepsilon_{ijk}$  はエディントンのイプシロンである.  $T_k^{(ext)}$  は気泡・粒子の角速度  $\Omega_i^{(n)}$ , 半径  $R^{(n)}$  の球形気泡・粒子, 流体の慣性モーメント  $I_b^{(n)}$ ,  $I_f^{(n)}$  を用いて, 次式に求められる.

$$T_k^{(ext)} = -\left(I_b^{(n)} - I_f^{(n)}\right) \frac{d\Omega_i^{(n)}}{dt}, \quad (3.15)$$

$I_b^{(n)}$ ,  $I_f^{(n)}$  はそれぞれ次式に求められる.

$$I_b^{(n)} = \frac{8}{15} \pi \rho_b (R^{(n)})^5, \quad (3.16)$$

$$I_f^{(n)} = \frac{8}{15} \pi \rho_f (R^{(n)})^5. \quad (3.17)$$

さらに,  $\Omega_{ij}^{(n)}$  は次式に求められる.

$$\Omega_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2} \iiint \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \Delta_D(x_i - Y_i^{(n)}, \sigma_D) d^3 x_i. \quad (3.18)$$

ここで,  $\varepsilon_{ijk}$  はエディントンのイプシロンである. また, 気泡・粒子の角加速度は, 前時刻の角速度  $\Omega_{ij}^{(n)(t-1)}$  と  $\Omega_{ij}^{(n)(t-2)}$  および時間刻み  $\Delta t$  を用いて後退差分によって求める.

$$\frac{d\Omega_{ij}^{(n)}}{dt} = \frac{3\Omega_{ij}^{(n)} - 4\Omega_{ij}^{(n)(t-1)} + \Omega_{ij}^{(n)(t-2)}}{2\Delta t}. \quad (3.19)$$

対称成分である  $S_{ij}^{(n)}$  は, ひずみ速度テンソル

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.20)$$

によって, 次式のように与えられる.

$$S_{ij}^{(n)} = \frac{20}{3} \pi \nu \rho_f (R^{(n)})^3 E_{ij}^{(n)}. \quad (3.21)$$

ここで,

$$E_{ij}^{(n)} = \iiint e_{ij} \Delta_D(x_i - Y_i^{(n)}, \sigma_D) d^3 x_i \quad (3.22)$$

であり, 気泡・粒子が球形を保持するため, 気泡・粒子内のひずみ速度がゼロとなるようにするため, 反復計算により  $E_{ij}^{(n)} = 0$  を満足させるように, 気泡・粒子近傍の速度場を求めた.

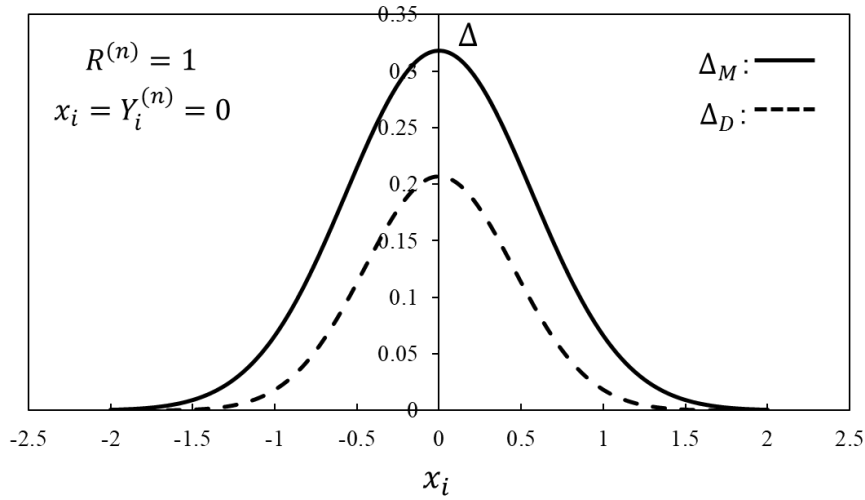


図 3.3 FM 項と FD 項による力の影響範囲のガウス分布.

### 3.2 Force-coupling Method における方程式の離散化

FD 項での反復計算が必要となる  $S_{ij}^{(n)}$  を求めるために、以下の行列の形に表現する必要がある。流れ場における 3 次元速度、

$$u_i = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$x_i^{a, b, c}$  は計算モデルの  $a, b, c$  番目の点での位置ベクトル  $x_i$  を意味し、 $N_x, N_y, N_z$  はそれぞれ  $x, y, z$  方向の格子数を意味する ( $N_g = N_x \times N_y \times N_z$ )。  $i = 1, 2, 3$  方向成分はそれぞれ  $x, y, z$  方向成分を示す。計算領域内に全ての格子点数に対して、

$$u_i = \begin{bmatrix} u_i(x_i^{1, 1, 1}) \\ \vdots \\ u_i(x_i^{N_x, N_y, N_z}) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

のように与える。気泡・粒子の 3 次元速度は、

$$U_i^{(n)} = \begin{bmatrix} U_1^{(n)} \\ U_2^{(n)} \\ U_3^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

となり，それぞれの気泡・粒子に対して，

$$U_i = \begin{bmatrix} U_i^{(1)} \\ U_i^{(2)} \\ \vdots \\ U_i^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

のように与える．FCM の FM 項と FD 項において，それぞれガウス分布を用いるため，ガウスの直交成分の重み係数の対角行列は，

$$W_i = \begin{bmatrix} w_i & 0 & 0 \\ 0 & w_i & 0 \\ 0 & 0 & w_i \end{bmatrix}, \quad w_i = \begin{bmatrix} w_1^1 w_1^2 w_1^3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & w_n^1 w_n^2 w_n^3 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

のように与える．したがって，各気泡・粒子における  $\Delta_M$  の行列は，以下のように与えられる．

$$D_{Mi} = \begin{bmatrix} d_i & 0 & 0 \\ 0 & d_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \end{bmatrix}, \quad d_i = \begin{bmatrix} \Delta_M(x_i^{1, 1, 1} - Y^1) & \cdots & \Delta_M(x_i^{N_x, N_y, N_z} - Y^1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_M(x_i^{1, 1, 1} - Y^n) & \cdots & \Delta_M(x_i^{N_x, N_y, N_z} - Y^n) \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

ここで，線形性に考えると，FCM の FM 項成分と FD 項成分の合計によって表すことができる．FM 項によって生成される流体速度  $u_i$  は，

$$u_i = \mathbb{Z} D_{Mi}^T F_i^{(n)}. \quad (3.29)$$

ここで， $\mathbb{Z}$  は  $(3N_g) \times (3N_g)$  の行列で，Navier-Stokes 方程式を解く数値計算法の選択によって決定される行列である． $F_i^{(n)}$  の 3 次元表記は，以下のように与えられる．

$$F_i^{(n)} = \begin{bmatrix} F_1^{(n)} \\ F_2^{(n)} \\ F_3^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

それぞれの気泡・粒子に対しては，以下のように与えられる．



$$F_i = \begin{bmatrix} F_i^{(1)} \\ F_i^{(2)} \\ \vdots \\ F_i^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

したがって、FM 項によって求められた気泡・粒子速度は、

$$U_i^{(n)} = D_{Mi} W_i Z D_{Mi}^T F_i^{(n)} = M_{FV} F_i^{(n)}. \quad (3.32)$$

ここで、 $M_{FV}$  は FCM の FM 項による並進速度の移動行列である。また、各気泡・粒子における  $\Delta_D$  の行列も同様に扱って、以下のように与えられる。

$$D_{Di} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & -d_3 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ d_3 & 0 & d_1 \\ 0 & d_2 & -d_3 \\ 0 & d_3 & d_2 \end{pmatrix},$$

$$d_{x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta_D(x^{1, 1, 1} - Y^1) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta_D(x^{N_x, N_y, N_z} - Y^1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta_D(x^{1, 1, 1} - Y^n) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta_D(x^{N_x, N_y, N_z} - Y^n) \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

したがって、FCM の (Stresslet に関係する) FD 項によるひずみ速度の移動行列は、以下のように与える。

$$M_{SE} = -D_{Di} W_i Z D_{Di}^T. \quad (3.34)$$

ひずみ速度  $E_{ij}^{(n)}$  における 9 つの成分を計算せずに、5 つの独立成分のみを評価すれば十分である。以下のように与える。

$$E_{ij}^{(n)} = \begin{bmatrix} E_{11}^{(n)} - E_{33}^{(n)} \\ 2E_{12}^{(n)} \\ 2E_{13}^{(n)} \\ E_{22}^{(n)} - E_{33}^{(n)} \\ 2E_{23}^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

次に,  $D_{Ti}$  は以下のように与える.

$$D_{Ti} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & d_3 & -d_2 \\ -d_3 & 0 & d_1 \\ d_2 & -d_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

したがって, 気泡・粒子のトルクに応じる気泡・粒子の角速度の移動行列は, 以下のように与えられる.

$$M_{T\Omega} = D_{Ti} W_i Z D_{Ti}^T. \quad (3.37)$$

そのほかの移動行列は, 以下のように与える.

$$M_{TV} = D_{Mi} W_i Z D_{Ti}^T, \quad (3.38)$$

$$M_{SV} = D_{Mi} W_i Z D_{Di}^T, \quad (3.39)$$

$$M_{S\Omega} = D_{Ti} W_i Z D_{Di}^T. \quad (3.40)$$

マクスウェル・ベティの相反作用の定理によって, FCM における移動行列は以下の対称関係を持っている.

$$M_{TV} = M_{F\Omega}^T, \quad M_{SV} = -M_{FE}^T, \quad M_{S\Omega} = -M_{TE}^T. \quad (3.41)$$

式(3.22)のひずみ速度がゼロとなる条件を満たせば, FCM の全体移動行列は, 以下のようになる.

$$\begin{bmatrix} U_i^{(n)} - U_i^{(\infty)} \\ \Omega_i^{(n)} - \Omega_i^{(\infty)} \\ -E_{ij}^{(\infty)} \end{bmatrix} = M^{FCM} \begin{bmatrix} F_i^{(n)} \\ T_{ij}^{(n)} \\ S_{ij}^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{FV} & M_{TV} & M_{SV} \\ M_{F\Omega} & M_{T\Omega} & M_{S\Omega} \\ M_{FE} & M_{TE} & M_{SE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i^{(n)} \\ T_{ij}^{(n)} \\ S_{ij}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

ここで, 添え字  $(\infty)$  は, 無限流体領域を意味する.  $\Omega_{ij}^{(n)}$  と  $T_{ij}^{(n)}$  は, それぞれ気泡・粒子の角速度ベクトルとトルクベクトルを表す. 以下のように与える.

$$\Omega_{ij}^{(n)} = \begin{bmatrix} \Omega_1^{(n)} \\ \Omega_2^{(n)} \\ \Omega_3^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

$$T_{ij}^{(n)} = \begin{bmatrix} T_1^{(n)} \\ T_2^{(n)} \\ T_3^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

また,  $S_{ij}^{(n)}$  は, 5 つ成分の Stresslet を表す. 以下のように与える.

$$S_{ij}^{(n)} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{22} \\ S_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

ここまで, FCM の全体移動行列を示したが, 実際の反復計算では, このような全体移動行列を構築する必要がない.

まず, 各格子点における FCM による力の構成は線形的に考えて,

$$z = D_{Mi}^T F_i^{(n)} + D_{Ti}^T T_{ij}^{(n)} + D_{Di}^T S_{ij}^{(n)} \quad (3.46)$$

のように与えられる. この力構成の操作数は, 気泡・粒子の数によって異なる. したがって, 式(3.29)と同様に, FCM の全ての力項 (並進力  $F_i^{(n)}$ , 回転力  $T_{ij}^{(n)}$ , 変形しないように抗力  $S_{ij}^{(n)}$ ) を考慮し, Navier-Stokes 方程式を解いて流れ場速度を求めることが, FCM 項  $z$  に  $(3N_g) \times (3N_g)$  の行列  $\mathbf{Z}$  を作用させることと等価にと考えると,

$$u_i = \mathbf{Z}z. \quad (3.47)$$

のように与えられる. Navier-Stokes 方程式を解く際に, 計算領域が 1 つの方向において周期条件を課すため, フーリエ変換を行う. 詳しく次章で説明する.

$F_i^{(n)}$  と  $T_{ij}^{(n)}$  は既知値であり,  $S_{ij}^{(n)}$  を求めると, 式(3.42)によって,

$$-E_{ij}^{(\infty)} = M_{FE} F_i^{(n)} + M_{TE} T_{ij}^{(n)} + M_{SE} S_{ij}^{(n)} \quad (3.48)$$

が得られる. 変形すると,

$$-E_{ij}^{(\infty)} - D_{Di}W_iZD_{Mi}^T F_i^{(n)} - D_{Di}W_iZD_{Ti}^T T_{ij}^{(n)} = D_{Di}W_iZD_{Di}^T S_{ij}^{(n)} \quad (3.49)$$

となる。また、上式を  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  の形に変形すると、

$$(D_{Di}W_iZD_{Di}^T)S_{ij}^{(n)} = -D_{Di}W_iZ(D_{Mi}^T F_i^{(n)} - D_{Ti}^T T_{ij}^{(n)}) - E_{ij}^{(\infty)} \quad (3.50)$$

となる。ここから、Bi-CGSTAB 法 (Biconjugate gradient stabilized method) を用いて、ひずみ速度テンソルと関係する  $E_{ij}^{(\infty)}$  を打ち消すように  $S_{ij}^{(n)}$  を求める。具体的な反復計算手順は以下のようなになる。

まず

$$\mathbf{A} = D_{Di}W_iZD_{Di}^T$$

$$\mathbf{x} = S_{ij}^{(n)}$$

$$\mathbf{b} = -D_{Di}W_iZ(D_{Mi}^T F_i^{(n)} - D_{Ti}^T T_{ij}^{(n)})$$

とする。

初期値の設定 :  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ;  $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax} = -E_{ij}^{(\infty)}$ ;  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}$ ;  $\mathbf{p} = \mathbf{r}$ ;  $c_1 = (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0)$ .

$$k = 0, 1, 2 \dots \dots ;$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ap}_k$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y} - E_{ij}^{(\infty)}$$

$$c_2 = (\mathbf{r}_0, \mathbf{y})$$

$$\alpha_k = c_1/c_2$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{y}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{Ae}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} - E_{ij}^{(\infty)}$$

$$c_3 = (\mathbf{v}, \mathbf{e})$$

$$c_4 = (\mathbf{v}, \mathbf{v})$$

$$c_3 = c_3/c_4$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k + c_3 \mathbf{e}$$

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{e} - c_3 \mathbf{v}$$

$$c_1 = (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_{k+1})$$

$$\beta_k = c_1/(c_2 c_3)$$

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k (\mathbf{p}_k - c_3 \mathbf{y})$$

以上を収束まで繰り返す。最後に、求めた補正値を  $S_{ij}^{(n)}$  に加えて更新する。ここで、初期  $\mathbf{x}_0$  は  $\mathbf{0}$  とし、 $\mathbf{r}_0$  は初期残差ベクトル、 $\mathbf{e}$  は  $k$  回目の繰り返す計算での残差ベクトル、 $\mathbf{p}_k$  は  $k$  回目の探索方向、 $\mathbf{r}$  は計算用残差ベクトル、 $\alpha_k$  と  $\beta_k$  は新しい解とその残差及び探索方向を構築するために用いられるパラメータである。この方法を用いることにより、直接に  $S_{ij}^{(n)}$  を求める計算速度に比較すると、約 2.5 倍速く実現できた。なお、Bi-CGSTAB 法の反復終了条件は、 $k$  回目の反復で残差ベクトル  $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}$  の 2 次ノルマについて、 $\|\mathbf{r}\|_2 / \|\mathbf{b}\|_2 < 10^{-14}$  とする。

FCM の計算手順は、以下のようになる。

1. 初期条件の設定。
2. 気泡・粒子の初期速度が  $\mathbf{0}$  として、 $F_i^{(n)}$  を求める。(式(3.6))
3. 初期条件から  $\sigma_M$  と  $\sigma_D$  を求める。(式(3.5), 式(3.12))
4. 初期条件、 $\sigma_M$  と  $\sigma_D$  から  $\Delta_M(x_i - Y_i^{(n)}, \sigma_M)$  と  $\Delta_D(x_i - Y_i^{(n)}, \sigma_D)$  を求める。(式(3.4), 式(3.11))
5.  $\Delta_M(x_i - Y_i^{(n)}, \sigma_M)$  と  $F_i^{(n)}$  から FM 項の  $f_{M,i}$  を求める。(式(3.3))
6. 初期条件と  $T_k^{(ext)}$  から  $T_{ij}^{(n)}$  を求める。(式(3.14)~式(3.17))
7.  $e_{ij}$  と  $\Delta_D(x_i - Y_i^{(n)}, \sigma_D)$  から  $E_{ij}^{(n)}$  を求める。(式(3.20), 式(3.22))
8. 初期条件と  $E_{ij}^{(n)}$  から、 $E_{ij}^{(\infty)}$  を打ち消すように反復計算によって  $S_{ij}^{(n)}$  を求める。(式(3.21), 式(3.46)~式(3.50))
9.  $T_{ij}^{(n)}$  と  $S_{ij}^{(n)}$  から  $G_{ij}^{(n)}$  を求める。(式(3.13))
10.  $\Delta_D(x_i - Y_i^{(n)}, \sigma_D)$  と  $G_{ij}^{(n)}$  から FD 項の  $f_{D,i}$  を求める。(式(3.10))
11.  $f_{M,i}$  と  $f_{D,i}$  から  $f_{P,i}$  を求める。(式(3.2))
12.  $f_{P,i}$  を含まれた Navier-Stokes 方程式を解くことによって流れ場速度  $u_i(x_i, t)$  を求める。(式(3.1))
13.  $u_i(x_i, t)$  と  $\Delta_M(x_i - Y_i^{(n)}, \sigma_M)$  から  $U_i^{(n)}$  を求める。(式(3.7))
14.  $U_i^{(n)}$  と  $\Delta t$  から次の時間ステップの気泡位置を求める。(式(3.9))
15. ステップ 2 に戻る。

### 3.3 Force-coupling Method の改良法

#### 3.3.1 Modified Force-coupling Method について

前節で記述したように, Maxey ら<sup>1-18)</sup>によって開発された FCM は, 粘性のみ支配される高粘性流体と仮定する Stokes 近似および Oseen 近似レベルにおける球形粒子の解析のみ適用できるように構成されており, 一般的な流体 (例えば, 水) 中の球形粒子の場合と考えれば, 非常に小さい径でないと計算された粒子の軌跡・速度の誤差が倍に増加する可能性が高い. また, 球形気泡には適用することができない. 本節では, FCM に対する 1 つの改良法を提案する.

球形気泡の場合には, 表面で滑り速度あり, せん断応力が働かない条件が課される. 球形粒子の場合には, 表面で滑り速度なしの条件が課される. この境界条件の違いにより, 球形気泡と球形粒子に働く抵抗力が異なる. また, 気泡また粒子から離れた遠方での流れが感じる Stokeslet の強さの違いが生じ, 流体に影響を与える. このように考えると, 気泡・粒子に働く Stokes 抵抗に低次の補正項を加えることにより, Stokeslet の補正ができると仮定すれば, 球形気泡の場合には, 気泡レイノルズ数  $0 < Re_b < 100$  の範囲で成立する Mei et al.<sup>19)</sup>の式,

$$F_{D,b} = 4\pi\nu\rho_f R U_b \left\{ 1 + \left[ \frac{8}{Re_b} + 0.5 \left( 1 + \frac{3.315}{Re_b^{0.5}} \right) \right]^{-1} \right\}, \quad (3.51)$$

を用いる. 球形粒子の場合には, 粒子レイノルズ数  $Re_p$  を用いて一般的に整理された理論解および推算式は主に Clift et al.<sup>20)</sup>の式,

$$\begin{aligned} F_{D,p} &= 6\pi\nu\rho_f R U_p \left[ \frac{24}{Re_p} \left( 1 + \frac{3}{16} Re_p \right) \right], & (Re_p \leq 0.01) \\ &= 6\pi\nu\rho_f R U_p \left[ 1 + 0.1315 Re_p^{(0.82-0.05\log_{10} Re_p)} \right], & (0.01 < Re_p \leq 20) \\ &= 6\pi\nu\rho_f R U_p \left[ 1 + 0.1935 Re_p^{0.6305} \right], & (20 < Re_p \leq 260) \end{aligned} \quad (3.52)$$

を用いる. 式(3.6)の気泡・粒子の加速度項を考慮せずに, 上式の抵抗力を入れると, 気泡の場合には,

$$F_i^{(n)} = -\frac{4}{3}\pi(R^{(n)})^3(\rho_f - \rho_b)g_i + 4\pi\nu\rho_f R^{(n)}U_i \left\{ 1 + \left[ \frac{8}{Re_{\infty,b}} + 0.5 \left( 1 + \frac{3.315}{Re_{\infty,b}^{0.5}} \right) \right]^{-1} \right\}. \quad (3.53)$$

のように与える. ただし, 無限流体中の気泡上昇終端速度  $U_{\infty,b}$  は, 気泡に働く浮力と式(3.51)の抵抗力と釣り合っている状態であると考え, 次式のように与える.

$$U_{\infty,b} = \frac{1}{3} \frac{g_i(R^{(n)})^2}{\nu} \cdot \frac{1}{1 + \left[ \frac{8}{Re_{\infty,b}} + 0.5 \left( 1 + \frac{3.315}{Re_{\infty,b}^{0.5}} \right) \right]^{-1}}. \quad (3.54)$$

また，無限流体中の気泡レイノルズ数  $Re_{\infty,b}$  は，次式のように定義する．

$$Re_{\infty,b} = \frac{2R^{(n)}U_{\infty,b}}{\nu} = \frac{2}{3} \frac{g_i(R^{(n)})^3}{\nu^2} \cdot \frac{1}{1 + \left[ \frac{8}{Re_{\infty,b}} + 0.5 \left( 1 + \frac{3.315}{Re_{\infty,b}^{0.5}} \right) \right]^{-1}}. \quad (3.55)$$

一方，粒子の場合は，

$$\begin{aligned} F_i^{(n)} &= -\frac{4}{3} \pi (R^{(n)})^3 (\rho_f - \rho_b) g_i + 6\pi\nu\rho_f R^{(n)} U_i \left[ \frac{24}{Re_{\infty,p}} \left( 1 + \frac{3}{16} Re_{\infty,p} \right) \right], \\ &\hspace{25em} (Re_{\infty,p} \leq 0.01) \\ &= -\frac{4}{3} \pi (R^{(n)})^3 (\rho_f - \rho_b) g_i + 6\pi\nu\rho_f R^{(n)} U_i \left[ 1 + 0.1315 Re_{\infty,p}^{(0.82-0.05\log_{10} Re_{\infty,p})} \right], \\ &\hspace{25em} (0.01 < Re_{\infty,p} \leq 20) \\ &= -\frac{4}{3} \pi (R^{(n)})^3 (\rho_f - \rho_b) g_i + 6\pi\nu\rho_f R^{(n)} U_i \left[ 1 + 0.1935 Re_{\infty,p}^{0.6305} \right], \\ &\hspace{25em} (20 < Re_{\infty,p} \leq 260) \end{aligned} \quad (3.56)$$

のように与える．気泡の場合と同様に，無限流体中の粒子上昇終端速度  $U_{\infty,p}$  は，粒子に働く浮力と式(3.52)の抵抗力と釣り合っている状態であると考え，次式のように与える．

$$\begin{aligned} U_{\infty,p} &= \frac{2}{9} \frac{g_i(R^{(n)})^2}{\nu} \cdot \frac{1}{\frac{24}{Re_{\infty,p}} \left( 1 + \frac{3}{16} Re_{\infty,p} \right)}, \quad (Re_{\infty,p} \leq 0.01) \\ &= \frac{2}{9} \frac{g_i(R^{(n)})^2}{\nu} \cdot \frac{1}{1 + 0.1315 Re_{\infty,p}^{(0.82-0.05\log_{10} Re_{\infty,p})}}, \quad (0.01 < Re_{\infty,p} \leq 20) \\ &= \frac{2}{9} \frac{g_i(R^{(n)})^2}{\nu} \cdot \frac{1}{1 + 0.1935 Re_{\infty,p}^{0.6305}}. \quad (20 < Re_{\infty,p} \leq 260) \end{aligned} \quad (3.57)$$

したがって、無限流体中の粒子レイノルズ数  $Re_{\infty,p}$  は、次式のように定義する。

$$\begin{aligned}
Re_{\infty,p} &= \frac{2R^{(n)}U_{\infty,p}}{\nu} = \frac{4g_i(R^{(n)})^3}{9\nu^2} \cdot \frac{1}{\frac{24}{Re_{\infty,p}} \left(1 + \frac{3}{16}Re_{\infty,p}\right)}, & (Re_{\infty,p} \leq 0.01) \\
&= \frac{2R^{(n)}U_{\infty,p}}{\nu} = \frac{4g_i(R^{(n)})^3}{9\nu^2} \cdot \frac{1}{1 + 0.1315Re_{\infty,p}^{(0.82-0.05\log_{10}Re_{\infty,p})}}, & (0.01 < Re_{\infty,p} \leq 20) \\
&= \frac{2R^{(n)}U_{\infty,p}}{\nu} = \frac{4g_i(R^{(n)})^3}{9\nu^2} \cdot \frac{1}{1 + 0.1935Re_{\infty,p}^{0.6305}}. & (20 < Re_{\infty,p} \leq 260)
\end{aligned} \tag{3.58}$$

ここで、オリジナルの FCM における気泡・粒子から流体に作用する力の式(3.6)の代わりに、気泡の場合は式(3.53)を用いて、粒子の場合は式(3.56)を用いる方法、本論文では **Modified Force-coupling Method** (以下 MFCM と略す) と呼ぶ<sup>21)</sup>。

### 3.3.2 Renormalized Force-coupling Method について

FCM は、球形気泡・粒子の中心を点源として周りの流れに作用する視点に立ち、その作用力の分布を考慮する手法であるため、FM 項と FD 項の力の影響範囲に対して、平滑化デルタ関数  $\Delta_M$  と  $\Delta_D$  を用いる。中のそれぞれの力長さスケールを表す  $\sigma_M$  と  $\sigma_D$  の値は Maxey ら<sup>1,3)</sup>が、粒子の Stokes 近似の理論解と近くなるように定めたもので、厳密には気泡に適用できない。粒子の場合に対して、式(3.5)と式(3.12)を用いることができるが、気泡の場合に対しては、さらに深い検討が必要となる。

まず、粒子の場合において、オリジナルの FCM の適用範囲は粒子レイノルズ数が 1 以下であるため、粒子レイノルズ数が大きくなるとともに、求められた粒子の速度が過大となる。すなわち、Stokes 近似の領域から外れたと考えられて、Stokes 抵抗が適用できない。補正項が必要と考えれば、Clift et al.<sup>20)</sup>の式を用いて、粒子の速度を求める式(3.7)に対して、以下のように補正する。

$$\begin{aligned}
U_i^{(n)} &= \iiint \left[ u_i(x_i, t) \Delta_M(x_i - Y_i^{(n)}, \sigma_M) \cdot \frac{1}{1 + 0.1315Re_{\infty,p}^{(0.82-0.05\log_{10}Re_{\infty,p})}} \right] d^3x_i, \\
& & (0.01 < Re_{\infty,p} \leq 20) \\
&= \iiint \left[ u_i(x_i, t) \Delta_M(x_i - Y_i^{(n)}, \sigma_M) \cdot \frac{1}{1 + 0.1935Re_{\infty,p}^{0.6305}} \right] d^3x_i. \\
& & (20 < Re_{\infty,p} \leq 260)
\end{aligned} \tag{3.59}$$



ここで、 $Re_{\infty,p}$  は無限流体中の粒子レイノルズ数で、式(3.58)を用いる。このように補正すれば、粒子から流体に作用する力は式(3.6)を用いることができる。

気泡の場合は、 $\sigma_M$  と  $\sigma_D$  の値を再正規化する必要がある。気泡に適用できるような  $\sigma_M$  は、以下の式より導出する。

まず、FM 項の力のみを作用する非圧縮流れの Stokes 方程式 (Navier-Stokes 方程式の慣性項を考慮しない) は定常流れに考えると、次式のように与える。

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\rho_f \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + F_i \Delta_M(x_i, \sigma_M). \quad (3.60)$$

上式をフーリエ変換すると、

$$\hat{u}_i = (\nu\rho_f k^2)^{-1} \left[ \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right] (2\pi)^{-3} e^{-\frac{k^2 \sigma_M^2}{2}} F_j. \quad (3.61)$$

式(3.47)と同じ形、Oseen 演算子  $O_{ij}$  を代入すれば、

$$u_i = O_{ij} F_j \quad (3.62)$$

となって、式(3.62)より、

$$\widehat{O}_{ij} = (\nu\rho_f k^2)^{-1} \left[ \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right] (2\pi)^{-3} e^{-\frac{k^2 \sigma_M^2}{2}} \quad (3.63)$$

が得られる。逆フーリエ変換すると、

$$O_{ij} = A(r)\delta_{ij} + B(r)x_i x_j \quad (3.64)$$

が得られる。ここで、 $r = |\mathbf{x}_i|$  である。また、 $A(r)$  と  $B(r)$  は、それぞれ次式のように与える<sup>1)</sup>。

$$A(r) = \frac{1}{8\pi\nu\rho_f} r^{-1} \left[ \left( 1 + \frac{\sigma_M^2}{r^2} \right) \operatorname{erf} \left( \frac{r}{\sigma_M \sqrt{2}} \right) - \left( \frac{2\sigma_M}{r} \right) (2\pi)^{-1/2} e^{-r^2/2\sigma_M^2} \right], \quad (3.65)$$

$$B(r) = \frac{1}{8\pi\nu\rho_f} r^{-3} \left[ \left(1 - \frac{3\sigma_M^2}{r^2}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{r}{\sigma_M\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{6\sigma_M}{r}\right) (2\pi)^{-1/2} e^{-r^2/2\sigma_M^2} \right], \quad (3.66)$$

ここで、 $\operatorname{erf}$ は誤差関数を表す。原点に考えると、 $r = 0$  とすれば、

$$A(0) = \frac{1}{3\pi\nu\rho_f\sigma_M} (2\pi)^{-1/2}, \quad (3.67)$$

$$B(0) = \frac{1}{30\pi\nu\rho_f\sigma_M} (2\pi)^{-1/2}, \quad (3.68)$$

が得られる。Maxey and Patel<sup>1)</sup>の粒子の場合は、粒子に重力のみの作用下で粒子の移動速度は、Stokes の法則に予測された粒子の速度と同等に考え、前述した Oseen 演算子  $O_{ij}$  を Stokes 抵抗の式に代入すると、

$$u_i(x_i, t) = 6\pi\nu\rho_f R O_{ij}(x_i - Y_i) U_j \quad (3.69)$$

になるが、気泡の場合も同様に考えると、次式が得られる。

$$u_i(x_i, t) = 4\pi\nu\rho_f R O_{ij}(x_i - Y_i) U_j, \quad (3.70)$$

$x_i = Y_i$  として、上式が以下のようなになる。

$$u_i(Y_i, t) = 4\pi\nu\rho_f R O_{ij}(0) U_j. \quad (3.71)$$

ここで、式(3.64)を代入すると、

$$u_i(Y_i, t) = 4\pi\nu\rho_f R [A(0)\delta_{ij} + B(0)x_i x_j] U_j. \quad (3.72)$$

式(3.67)、式(3.68)によって、上式は以下のようなになる。

$$u_i(Y_i, t) = 4\pi\nu\rho_f R \left[ \frac{1}{3\pi\nu\rho_f\sigma_M} (2\pi)^{-1/2} \cdot \delta_{ij} \cdot U_j + \frac{1}{30\pi\nu\rho_f\sigma_M} (2\pi)^{-1/2} \cdot x_i x_j \cdot U_j \right]. \quad (3.73)$$

上式を整理すると、

$$u_i(Y_i, t) = \left(\frac{R}{\sigma_M}\right) \left(\frac{8}{9\pi}\right)^{\frac{1}{2}} U_i. \quad (3.74)$$

ここで,  $u_i(Y_i, t) = U_i$  として, 上式は以下のように与えられる.

$$\frac{R}{\sigma_M} = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.75)$$

によって,

$$\sigma_M = R/\sqrt{1.125\pi} \quad (3.76)$$

となる. この式から気泡における FM 項の力の長さスケール  $\sigma_M = R/\sqrt{1.125\pi}$  であるが, 実験結果と比較し, より近似的である  $\sigma_M = R/\sqrt{1.88\pi}$  と選択する (実験結果との比較は詳しく第 5 章で説明する).

気泡に適用できるような  $\sigma_D$  は, 以下のように導出する. まず, FM 項と FD 項の力を作用する非圧縮流れの Stokes 方程式 (Navier-Stokes 方程式の慣性項を考慮しない) は定常流れに考えると, 次式のように与える.

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \rho_f \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \left\{ F_i \Delta_M(x_i, \sigma_M) + G_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta_D(x_i, \sigma_D) \right\}. \quad (3.77)$$

上式をフーリエ変換すると,

$$\hat{u}_i = (\nu \rho_f k^2)^{-1} \left[ \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right] i k_m \widehat{\Delta}_D(k) G_{jm}. \quad (3.78)$$

流れ場は次のようになる.

$$u_i = Z_{ijk}(x_i) G_{jk}, \quad (3.79)$$

ここで,  $r = |x_i|$  として,  $Z_{ijk}(r)$  は,

$$Z_{ijk}(r) = \frac{dC}{dr} \delta_{ij} x_k / r + D(r) (\delta_{ik} x_j + \delta_{jk} x_i) + \frac{dD}{dr} x_i x_j x_k / r, \quad (3.80)$$

ここで、 $C(r)$  と  $D(r)$  は、式(3.65)と式(3.66)に基づいて、それぞれ次式のように与える<sup>4)</sup>。

$$\frac{dC}{dr} = -\frac{1}{8\pi\nu\rho_f r^2} \left[ \left(1 + \frac{3\sigma_D^2}{r^2}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{r}{\sigma_D\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{4r}{\sigma_D} + \frac{6\sigma_D}{r}\right) (2\pi)^{-1/2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_D^2}\right) \right], \quad (3.81)$$

$$\frac{dD}{dr} = -\frac{1}{8\pi\nu\rho_f r^4} \left[ \left(3 - \frac{15\sigma_D^2}{r^2}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{r}{\sigma_D\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{4r}{\sigma_D} + \frac{30\sigma_D}{r}\right) (2\pi)^{-1/2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_D^2}\right) \right]. \quad (3.82)$$

単一気泡の中心からの局所的な体積平均化された速度勾配は、以下のように与えられる。

$$U_{ij} = \iiint \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta_D(x_i, \sigma_D) d^3 x_i. \quad (3.83)$$

上式をフーリエ変換すると、

$$\widetilde{U}_{ij} = -G_{km} (2\pi)^{-3} \iiint \left[ \delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2} \right] \frac{k_m k_j}{\nu \rho_f k^2} \exp(-k^2 \sigma_D^2) d^3 k_i. \quad (3.84)$$

ここで、FM 項に  $\widetilde{U}_{ij}$  の影響を及ぼさず、 $G_{km}$  に対して、上記の関係に等方性が存在するとし、定数  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  を用いる  $\widetilde{U}_{ij}$  は、以下のように与えられる。

$$\widetilde{U}_{ij} = (\alpha \delta_{ij} \delta_{km} + \beta \delta_{ik} \delta_{jm} + \gamma \delta_{im} \delta_{jk}) G_{km}. \quad (3.85)$$

式(3.84)における  $i$ ,  $k$  と  $j$ ,  $m$  の対称性によって、

$$\alpha = \gamma, \quad (3.86)$$

$$3\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad (3.87)$$

の関係を持つ。その結果、局所的な体積平均化された速度勾配は、以下のように与えられる。

$$\widetilde{U}_{ij} = -3\alpha \left( G_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} G_{kk} \right) - \alpha (G_{ij} - G_{ji}). \quad (3.88)$$

式(3.84)と合計すれば、

$$3\alpha + 9\beta + 3\gamma = -(4\nu\rho_f\pi^{3/2}\sigma_D^3)^{-1} \quad (3.89)$$

が得られる。したがって、

$$\alpha = (120\nu\rho_f\pi^{3/2}\sigma_D^3)^{-1} \quad (3.90)$$

が得られる。トルク  $T_{ij}$  を受けた単一気泡は、角速度  $\Omega_{ij}$  で回転すると仮定すれば、次の関係を持つことができる<sup>22)</sup>。

$$T_{ij} = 16\pi\nu\rho_f R^3 \Omega_{ij}. \quad (3.91)$$

また、式(3.18)によって、局所的な体積平均化された速度勾配を用いて、角速度は以下のよう  
に与えられる。

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \widetilde{U}_{jk}. \quad (3.92)$$

式(3.91)と組み合わせると、FD 項の対称成分を用いて、以下のように与えられる。

$$\Omega_{ij} = \frac{5}{2} \alpha \varepsilon_{ijk} G_{jk}. \quad (3.93)$$

式(3.90)を用いて変形すると、

$$\Omega_{ij} = (48\nu\rho_f\pi^{3/2}\sigma_D^3)^{-1} T_{ij} \quad (3.94)$$

となり、式(3.91)に代入すると、

$$16\pi\nu\rho_f R^3 = 48\nu\rho_f\pi^{3/2}\sigma_D^3 \quad (3.95)$$

が得られる。この式を解くと、

$$\sigma_D = R/(3\sqrt{\pi})^{1/3} \quad (3.96)$$

となる。さらに、Mei et al.<sup>19)</sup>の式を用いて、気泡の速度を求める式(3.7)に対して、以下のよ

うに補正する.

$$U_i^{(n)} = \iiint \left\{ u_i(x_i, t) \Delta_M(x_i - Y_i^{(n)}, \sigma_M) \cdot \frac{1}{1 + \left[ \frac{8}{Re_{\infty, b}^{(n)}} + 0.5 \left( 1 + \frac{3.315}{Re_{\infty, b}^{(n) 0.5}} \right) \right]^{-1}} \right\} d^3 x_i. \quad (3.97)$$

ここで,  $Re_{\infty, b}$  は無限流体中の気泡レイノルズ数で, 式(3.55)を用いる.

したがって, FM 項と FD 項の力の長さスケールについて, 粒子の場合は,

$$\sigma_M = \frac{R^{(n)}}{\sqrt{\pi}}, \quad \sigma_D = \frac{R^{(n)}}{(6\sqrt{\pi})^{1/3}}$$

を, 気泡の場合は,

$$\sigma_M = \frac{R^{(n)}}{\sqrt{1.88\pi}}, \quad \sigma_D = \frac{R^{(n)}}{(3\sqrt{\pi})^{1/3}}$$

を用いる方法は, 本論文で Renormalized Force-coupling Method (以下 RFCM と略す) と呼ぶ (21, 23).

### 第 3 章参考文献

- 1) Maxey, M. R. and Patel, B. K., “Localized force representations for particles sedimenting in Stokes flow”, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 27 (2001), pp. 1603–1626.
- 2) Xu, J., Maxey, M. R. and Karniadakis, G. E., “Numerical simulation of turbulent drag reduction using micro-bubbles”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 468 (2002), pp. 271-281.
- 3) Lomholt, S., Stenum, B. and Maxey, M. R., “Experimental verification of the force coupling method for particulate flows”, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 28 (2002), pp. 225-246.
- 4) Lomholt, S., and Maxey, M. R., “Force-coupling method for particulate two-phase flow: Stokes flow”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 184 (2003), pp. 381-405.
- 5) Dance, S. L. and Maxey, M. R., “Incorporation of lubrication effects into the force-coupling method for particulate two-phase flow”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 189 (2003), pp. 212-238.
- 6) Climent, E. and Maxey, M. R., “Numerical simulations of random suspensions at finite Reynolds numbers”, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 29 (2003), pp. 579-601.
- 7) Maxey, M. R., Xu, J., Dong, S. and Karniadakis, G. E., “Simulations of Turbulent Drag Reduction Using Micro-Bubbles”, *ASME/JSME 2003 4th Joint Fluids Summer Engineering Conference*, Vol. 1 (2003).
- 8) Dance, S. L., Climent, E. and Maxey, M. R., “Collision barrier effects on the bulk flow in a random suspension”, *Physics of Fluids*, Vol. 16 (2004), pp. 828-831.
- 9) Climent, E., Yeo, K., Maxey, M. R. and Karniadakis, G. E., “Dynamic Self-Assembly of Spinning Particles”, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 129 (2007), pp. 379-387.
- 10) Liu, D., Keaveny, E. E., Maxey, M. R. and Karniadakis, G. E., “Force-coupling method for flows with ellipsoidal particles”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 228 (2009), pp. 3559–3581.
- 11) Yeo, K., Dong, S., Climent, E. and Maxey, M. R., “Modulation of homogeneous turbulence seeded with finite size bubbles or particles”, *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 36 (2010), pp. 221-233.
- 12) Yeo, K. and Maxey, M. R., “Dynamics of concentrated suspensions of non-colloidal particles in Couette flow”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 649 (2010), pp. 205-231.
- 13) Yeo, K. and Maxey, M. R., “Ordering transition of non-Brownian suspensions in confined steady shear flow”, *Physical Review E*, Vol. 81 (2010), pp. 051502-1- 051502-8.
- 14) Yeo, K. and Maxey, M. R., “Simulation of concentrated suspensions using the force-coupling method”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 229 (2010), pp. 2401–2421.
- 15) Yeo, K. and Maxey, M. R., “Numerical simulations of concentrated suspensions of monodisperse particles in a Poiseuille flow”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 682 (2011), pp. 491-518.

- 16) Yeo, K. and Maxey, M. R., “Dynamics and rheology of concentrated, finite-Reynolds-number suspensions in a homogeneous shear flow”, *Physics of fluids*, Vol. 25 (2013), pp. 053303-1-053303-24.
- 17) Loisel, V., Abbas, M., Masbernat, O. and Climent, E., “The effect of neutrally buoyant finite-size particles on channel flows in the laminar-turbulent transition regime”, *Physics of Fluids*, Vol. 23 (2013), pp. 123304-1- 123304-18.
- 18) Delmotte, B., Keaveny, E., Plouraboué, F. and Climent, E., “Large-scale simulation of steady and time-dependent active suspensions with the force-coupling method”, *Journal of Computational Physics*, vol. 302 (2015). pp. 524-547.
- 19) Mei, R., Klausner, J. F. and Lawrence, C. J., “A Note on the History Force on Spherical Bubble at Finite Reynolds Number”, *Physics of Fluids*, Vol. 6 (1994) pp. 418-420.
- 20) Clift, R., Grace, J. R. and Weber, M. E., “Bubbles, Drops and Particles”, Academic Press (1978).
- 21) Guan, C., Yanase, S., Matsuura, K., Kouchi, T. and Nagata, Y., “Application of the modified force-coupling method of tracing the trajectories of spherical bubbles with solid-like and slip surfaces”, *Open Journal of Fluid Dynamics*, Vol. 7 (2017), pp. 657-672.
- 22) Batchelor, G. K., “An introduction to fluid dynamics”, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., (1967).
- 23) Guan, C., Yanase, S., Matsuura, K., Kouchi, T. and Nagata, Y., “Numerical study of interacting spherical air bubbles”, *Journal of the Physical Society of Japan*, (2018), (査読中).



## 第4章 計算における条件

### 4.1 Navier-Stokes 方程式の解法

Navier - Stokes 方程式は, 移流項に Adams-Bashforth 法<sup>1)</sup>, 粘性項に Crank-Nicolson 法<sup>1)</sup>を採用して時間積分を行う. まず, 前章の式(3.1)の非圧縮性流れの Navier-Stokes 方程式は, 次式のように変形する.

$$u_i^{t+1} = u_i^t + \Delta t \left[ -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p^{t+1}}{\partial x_i} + \frac{3A^t - A^{t-1}}{2} + \frac{B^{t+1} + B^t}{2} + g_i + f_{P,i} \right]. \quad (4.1)$$

ここで, 添え字  $t$  は現在の時間ステップを表し,  $t-1$  および  $t+1$  はそれぞれひとつ前, ひとつ後の時間ステップを表す.  $\Delta t$  は計算中における時間刻みを表し, 時間に対し, 2次精度を用いる.  $A^t$  と  $B^t$  はそれぞれ以下のように与える.

$$A^t = -u_j^t \frac{\partial u_i^t}{\partial x_j}, \quad (4.2)$$

$$B^t = \nu \frac{\partial^2 u_i^t}{\partial x_j^2}. \quad (4.3)$$

Navier-Stokes 方程式の解法は, SMAC 法 (Simplified Marker And Cell Method)<sup>2)</sup>を用いて解く. この解法には, 境界条件の導入が容易になるという利点がある. したがって, 式(4.1)を次式のように2段階に分けて表す.

$$u_i^p - \frac{\Delta t}{2} \cdot \nu \frac{\partial^2 u_i^p}{\partial x_j^2} = u_i^t + \Delta t \left[ -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p^{t+1}}{\partial x_i} + \frac{3A^t - A^{t-1}}{2} + \frac{B^{t+1} + B^t}{2} + g_i + f_{P,i} \right], \quad (4.4)$$

$$u_i^{t+1} = u_i^p - \Delta t \frac{\partial \phi}{\partial x_i}. \quad (4.5)$$

ここで,  $u_i^p$  は次の時間ステップでの速度の予測値を意味し,  $\phi$  は  $p^t$  と  $p^{t+1}$  との間に次の関係を持つ, 時間ステップごとの圧力の変化を表す未知数である.

$$p^{t+1} = p^t + \phi - \frac{\Delta t}{2} \cdot v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2}. \quad (4.6)$$

また,  $u_i^{t+1}$  は連続の式  $\partial u_i / \partial x_i = 0$  を満足する必要があるため, 式(4.5)を連続の式  $\partial u_i / \partial x_i = 0$  に代入すると, 次式が得られる.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial u_i^p}{\partial x_i}. \quad (4.7)$$

これより, 最初に式(4.4)で予測速度  $u_i^p$  を求め, そうして得られた  $u_i^p$  を用い, 式(4.7)から  $\phi$  を求める. その後, 式(4.5)と式(4.6)に  $\phi$  を代入し, 次の時間ステップでの速度  $u_i^{t+1}$ , 圧力  $p^{t+1}$  を求める. 以上は Kim-Moin<sup>3)</sup>による部分段階法を SMAC 法にアレンジしたものとなっている.

ただし,  $x$  方向が周期境界条件なので, ガウス関数  $\Delta$  は, そのままであると無限の範囲の値を持つこととなる. そこで, ある  $xy$  平面,  $yz$  平面,  $zx$  平面それぞれにおいて, その最大値が  $\Delta(x_i)/\Delta(0) > \varepsilon_\Delta$  を満たす, 気泡・粒子を中心とした立方体内のみを計算する. ここで,  $\varepsilon_\Delta$  は微小量を意味する数であり, 本論文では  $10^{-14}$  と置く. このとき立方体 1 辺の長さは, 気泡・粒子の直径に比べて約 3 倍となる. FM 項と FD 項の両方の計算とともに同じ範囲で  $\Delta$  の計算を行う.

## 4.2 計算格子

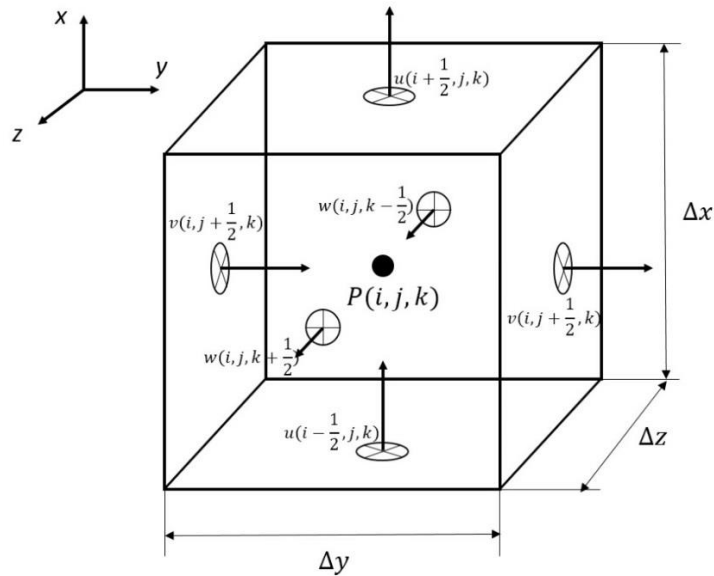


図 4.1 スタッガード格子.

本論文では、図 4.1 に示すようなスタッガード格子を用いる。ここで、 $u, v, w$  は、 $u_1, u_2, u_3$  と同じくそれぞれ  $x, y, z$  方向の速度を表し、 $i, j, k$  はそれぞれ  $x, y, z$  方向の成分を表す。スタッガード格子において、それぞれの変数の定義点をずらして設定することにより、誤差の成長を抑えることができるとし、圧力を格子中心、速度を格子境界面に定義する。

境界条件は、 $x$  方向には周期境界条件、 $y = \pm 0.5, z = \pm 0.5$  の壁面ですべりなし条件を満たす。また、壁面において、SMAC 法での予測速度に  $u_i^p|_{y=\pm 0.5} = u_i^p|_{z=\pm 0.5} = 0$  を用いて、さらに  $\frac{\partial \phi}{\partial y}|_{y=\pm 0.5} = \frac{\partial \phi}{\partial z}|_{z=\pm 0.5} = 0$  の条件を満たすことで、微分方程式を簡便なものにする。この条件を満たすことで予測速度  $u_i^p$  を求める際にディリクレ条件を用いて微分方程式を解くことができる。その後、得られた  $\phi$  と式(4.5)を用いて次ステップの速度を求める時も、壁面上および壁面外側の予測速度は 0 のまま維持されることになる。

また、圧力に関しては、次の境界条件  $p|_{x=0} = p|_{x=L} + \rho_f g_i L, \frac{\partial p}{\partial y}|_{y=\pm 0.5} = \frac{\partial p}{\partial z}|_{z=\pm 0.5} = 0$  が満たされる。すると、圧力についてのディリクレ条件がどこにも満たされず、このままでは圧力が発散する可能性がある。そこで、圧力の平均値をある一定値に保たせるように、各時間ステップに圧力の平均をとり、基準値からのずれを全体から引く作業を加える。ちなみに、本論文での解析における平均値を 0 にして計算を行っている。ただし、気泡・粒子から流体への作用が壁面の外側にも及ぶ時は、一部の計算領域が壁面の外側へ出ることが発生する。境界条件によって外側の速度を 0 として計算を行うため、計算領域が境界に重なり合っている可能性がある。したがって、気泡・粒子の速度、角速度、ひずみ速度を求める時に、局所的な体積平均化されるため、物理的な流れの外に出ることも発生する。その場合、FCM に基づいて壁面境界の付近流れの以前のシミュレーションでは、FCM の計算範囲は Navier-Stokes 方程式における壁面境界で切り捨てられ、物理的な流れの領域に限定されている<sup>4,8)</sup>。気泡・粒子は壁面と接触すれば、FM 項による力は、3.8%が消える。FD 項の対称成分による力は、1.4%が消える<sup>9)</sup>。この切り捨て処理の影響が含まれており、粒子・壁面の推定値より低い体積分率で処理してしまうため、自己矛盾となる。直接に課される外部せん断流に関連した結果を評価するための軽微な問題が生じる。

実例として、 $x_2 = 0$  の剛体壁面で囲まれた流れを考える領域は  $\Omega$  である。壁面により、 $\Omega$  は、半無限領域  $\Omega = (-\infty, \infty) \times (0, \infty) \times (-\infty, \infty)$  とする。壁面で囲まれた領域は  $\partial\Omega$  である。単一気泡・粒子における線形せん断流れは  $u^\infty = (\dot{\gamma}x_2, 0, 0)^T$  で表す ( $\dot{\gamma}$ :せん断速度)。通常に、FCM の結果を与える式は次式になる。

$$U_i^\infty = u^\infty(Y_i) = \int_{I_n(Y_i)} u^\infty(x_i) \Delta_M(x_i - Y_i) d^3x_i. \quad (4.8)$$

ここで、数値積分の領域は  $I_n(Y_i) = \{|x_i - Y_i| < na\}$  と表される。  $n$  は正の実数で、半径の大きさが  $na$  の球形気泡・粒子を表す。完全な正確さを得るために、  $n$  は  $n \geq 2.5$  となるように選択する。気泡・粒子が壁面に接近する場合は  $I_n(Y_i) \notin \Omega$  となる。その後、FCM の計算領域が壁面境界で切り捨てられれば、すなわち、  $I_n(Y_i) \cap \Omega$  だけの積分が行われる。結果としては、  $U_i^\infty \neq u^\infty(Y_i)$  となることであった。

この問題の改善策として、気泡・粒子が壁面に接近する際の FCM 計算領域を修正するために、イメージ計算領域を導入する。FM 項に対して、次式のように表される。

$$\Delta_M^{wall}(x_i - Y_i, \sigma_M) = \Delta_M(x_i - Y_i, \sigma_M) - \Delta_M(x_i - Y_i^{img}, \sigma_M). \quad (4.9)$$

ここで、  $Y_i^{img} = (Y_1, -Y_2, Y_3)^T$  である。同様に、FD 項に対しても、次式のように表される。

$$\Delta_D^{wall}(x_i - Y_i, \sigma_D) = \Delta_D(x_i - Y_i, \sigma_D) + \Delta_D(x_i - Y_i^{img}, \sigma_D). \quad (4.10)$$

修正された壁面近傍における気泡・粒子の速度の計算およびひずみ速度は、以下のように示す。

$$U_i^\infty = u^\infty(Y_i) = \int_{I_n(Y_i) \cap \Omega} u^\infty(x_i) \Delta_M^{wall}(x_i - Y_i, \sigma_M) d^3 x_i, \quad (4.11)$$

$$\Omega_{ij}^\infty = \frac{1}{2} \int \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \Delta_D^{wall}(x_i - Y_i^{img}, \sigma_D) d^3 x_i, \quad (4.12)$$

$$E_{ij}^\infty = e_{ij}^\infty(Y_i) = \int_{I_n(Y_i) \cap \Omega} e_{ij}^\infty(x_i) \Delta_D^{wall}(x_i - Y_i^{img}, \sigma_D) d^3 x_i. \quad (4.13)$$

この修正でも自己矛盾であるが、壁面近傍における計算領域を処理するための理由は異なっており、基準になる数値解は既にすべりなし条件が満たされていることを保証する<sup>9)</sup>。

### 4.3 計算格子による空間に関する離散化

数値計算では、連続量である各種物理量をそれぞれある幅ごとに区切られた離散的なものとして記憶・計算が行われる。3次元空間についての離散化を考え、格子数をそれぞれ  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  とする。  $i$ ,  $j$ ,  $k$  はそれぞれ  $x$ ,  $y$ ,  $z$  方向の成分を表し、それぞれ次のように表す。

$$x_i = \frac{i - \frac{1}{2}}{n_x} L, \quad i = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, n_x + \frac{1}{2} \quad (4.14)$$

$$y_j = \frac{1}{2} \frac{\tanh \left[ \alpha \left( \frac{2(j - \frac{1}{2})}{n_y} - 1 \right) \right]}{\tanh \alpha}, \quad j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, n_y + \frac{1}{2} \quad (4.15)$$

$$z_k = \frac{1}{2} \frac{\tanh \left[ \beta \left( \frac{2(k - \frac{1}{2})}{n_z} - 1 \right) \right]}{\tanh \beta}, \quad k = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, n_z + \frac{1}{2} \quad (4.16)$$

ここで、不等間隔格子を導入することによって、 $\alpha$ 、 $\beta$  はそれぞれ不等間隔の度合いを決めるパラメータである。図 4.2 にパラメータ  $\alpha$ 、 $\beta$  が変化したときの格子点の様子を示す。

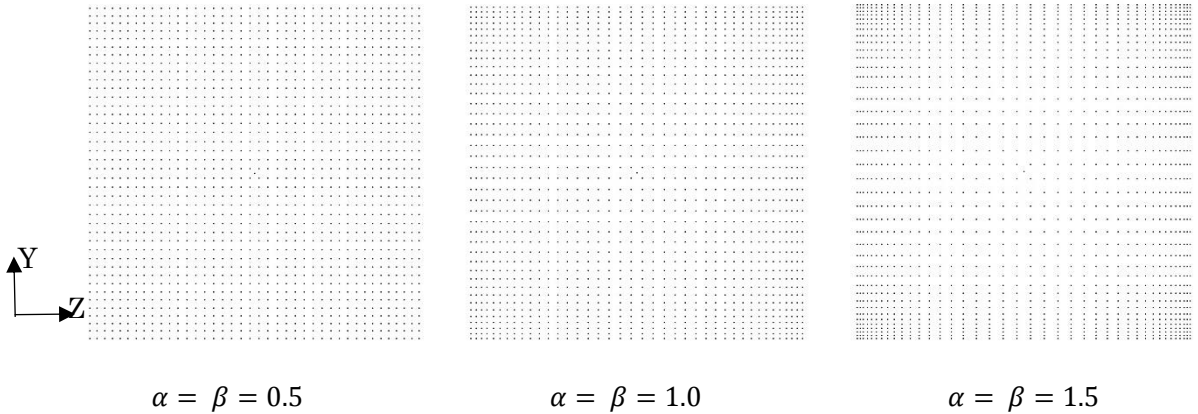


図 4.2 パラメータ  $\alpha$ 、 $\beta$  の様子 ( $y = z = 1$ )

すべての物理量が同じ点で定義されていると、チェッカーボード状に解が振動する現象が起こることがある。それを回避する手段として、離散化の格子をスタッガード格子にする。図 4.2 のようにこの格子は  $x$  方向速度  $u$  を  $x$  方向に、 $y$  方向速度  $v$  を  $y$  方向に、それぞれ 1/2 だけずらして配置をしたものである。同様に、 $z$  方向速度  $w$  もまた  $z$  方向にずらして離散化される。実際の計算では、ずらされていない格子を次のように定義する。

$$x_i = \frac{x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}}}{2} = \frac{i}{n_x} L, \quad i = 1, 2, \dots, n_x \quad (4.17)$$

$$y_j = \frac{1}{2} \frac{\tanh \left[ \alpha \left( \frac{2(j-\frac{1}{2})}{n_y} - 1 \right) \right]}{\tanh \alpha}, \quad j = 1, 2, \dots, n_y \quad (4.18)$$

$$z_k = \frac{1}{2} \frac{\tanh \left[ \beta \left( \frac{2(k-\frac{1}{2})}{n_z} - 1 \right) \right]}{\tanh \beta}. \quad k = 1, 2, \dots, n_z \quad (4.19)$$

そうすると、各々の格子幅について以下が成立する。

$$\Delta x = \Delta x_p = \frac{L}{n_x}, \quad (4.20)$$

$$\Delta y_{j+\frac{1}{2}} = y_{j+1} - y_j, \quad j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, n_y - \frac{1}{2} \quad (4.21)$$

$$\Delta z_{k+\frac{1}{2}} = z_{k+1} - z_k, \quad k = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, n_z - \frac{1}{2} \quad (4.22)$$

$$\Delta y_{p_j+\frac{1}{2}} = y_{p_{j+1}} - y_{p_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n_y - 1 \quad (4.23)$$

$$\Delta z_{p_k+\frac{1}{2}} = z_{p_{k+1}} - z_{p_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n_z - 1 \quad (4.24)$$

なお、周期境界面において、 $x = x_{1/2}$ ,  $x_{n_x+1/2}$ , 壁面において、それぞれ  $y = y_{1/2}$ ,  $y_{n_y+1/2}$ ,  $z = z_{1/2}$ ,  $z_{n_z+1/2}$  となるようにする。また、気泡・粒子計算において、最小粒子直径が最大格子幅の5倍以上になるようにする。

ある点  $i+1/2, j, k$  での速度  $u$  の  $x$  方向の補間、微分をそれぞれ  $\bar{u}_{i+1/2, j, k}$ ,  $\delta u_{i+1/2, j, k}$  と表すとする。以下に、スタッガード格子での  $x$  方向に並ぶ4点を用いる微分の式を示す。

$$\delta u_{i+\frac{1}{2}, j, k} = \frac{u_{i-1, j, k} - 27u_{i, j, k} + 27u_{i+1, j, k} - u_{i-2, j, k}}{24\Delta x} + O(\Delta x^4). \quad (4.25)$$

2階微分は式(4.25)を1階微分 $\delta u_{i+1/2, j, k}$ に対して適用するように求める。y, z方向での微分は式(4.15)と式(4.16)および式(4.18)と式(4.19)より求められた式(4.26)と式(4.27)を用いて変数変換をし、式(4.25)と同様な中心差分が適用できるようにしてから求めると、以下のようを与える

$$\frac{\partial j}{\partial y} = \frac{n_y \tanh \alpha}{\alpha} \cosh^2 \left[ \alpha \left( \frac{2(j - \frac{1}{2})}{n_y} - 1 \right) \right], \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial k}{\partial z} = \frac{n_z \tanh \beta}{4\beta} \cosh^2 \left[ \beta \left( \frac{2(k - \frac{1}{2})}{n_z} - 1 \right) \right]. \quad (4.27)$$

壁面近傍においては格子点を左右に2点ずつとることができないため、例えばy方向を微分するときは次のようにする。

$$\partial_j u_{i+\frac{11}{2}, k} = \frac{35}{8} u_{i+\frac{1}{2}, 1, k} - \frac{35}{24} u_{i+\frac{1}{2}, 2, k} + \frac{21}{40} u_{i+\frac{1}{2}, 3, k} - \frac{5}{56} u_{i+\frac{1}{2}, 4, k} \quad (4.28)$$

$$\partial_j u_{i+\frac{13}{2}, k} = -\frac{5}{4} u_{i+\frac{1}{2}, 1, k} - \frac{7}{6} u_{i+\frac{1}{2}, 2, k} - \frac{1}{20} u_{i+\frac{1}{2}, 3, k} \quad (4.29)$$

$$\partial_j v_{i, 1, k} = -\frac{23}{24} v_{i, \frac{1}{2}, k} + \frac{7}{8} v_{i, \frac{3}{2}, k} + \frac{1}{8} v_{i, \frac{5}{2}, k} - \frac{1}{24} v_{i, \frac{7}{2}, k} \quad (4.30)$$

$$\partial_j \phi_{i, \frac{3}{2}, k} = -\frac{577}{528} \phi_{i, 1, k} + \frac{201}{176} \phi_{i, 2, k} - \frac{9}{176} \phi_{i, 3, k} - \frac{1}{528} \phi_{i, 4, k} \quad (4.31)$$

ただし、式(4.28), (4.29)では壁面境界条件上で速度が0であることを式(4.21)では壁面鉛直方向の微分が0であることを利用している。

不等間隔格子における移流項の不等間隔格子における移流項の差分式化は、そのままでは運動エネルギーの保存ができないため、空間における完全保存系差分スキームを用いる。まず、不等間隔格子 $x_i(x, y, z)$ は等間隔格子 $\xi_i(\xi, \eta, \zeta)$ へと写像し、一般座標系での移流項の差分式に直す。ただし、 $\frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} = 0 (j \neq k)$  を利用している。

$$\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j} \partial \xi_j \left( \overline{\frac{\partial x_j}{\partial \xi_j} u_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \bar{u}_i^{\xi_j}} \right). \quad (4.32)$$

ここで、格子点の間隔を変えた 2 点中心差分の記号を次のように定義する。

$$\bar{f}_i^{m\xi} = \frac{f_{i-\frac{m}{2}} + f_{i+\frac{m}{2}}}{2}, \quad (4.33)$$

$$\partial_{m\xi} f_i = \frac{f_{i+\frac{m}{2}} - f_{i-\frac{m}{2}}}{m\partial\xi}. \quad (4.34)$$

4 次精度を採用すると以下のように変形される。

$$\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{9}{8} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j} \partial_{1\xi_j} \left( \overline{\frac{\partial x_j}{\partial \xi_j} u_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \bar{u}_i^{1\xi_j}} \right) - \frac{1}{8} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j} \partial_{3\xi_j} \left( \overline{\frac{\partial x_j}{\partial \xi_j} u_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \bar{u}_i^{3\xi_j}} \right). \quad (4.35)$$

しかし、壁面近傍ではこの方法が使えないのでその場合 2 次精度にして用いる。

本研究で解く必要がある差分方程式は、式(4.4)の各方向の予測速度  $u^P$ ,  $v^P$ ,  $w^P$  の三つ、圧力の時間変化  $\phi$  を求める式(4.7), 及び FD 項での反復計算を要する式(3.50)の五つである。

微分式を差分式に置き換えると、例えば式(4.7)の  $x$  方向成分は次のようになる。

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \quad (4.36)$$

$$\mathbf{x} = \left( \phi_{1,1,1} \cdots \phi_{n_x,1,1} \quad \phi_{1,2,1} \cdots \phi_{n_x,n_y,1} \quad \phi_{1,1,2} \cdots \phi_{n_x,n_y,n_z} \right)^T$$

$\mathbf{x}$  は要素数  $(n_x n_y n_z)$  個の未知数ベクトルであり、 $\mathbf{b}$  も要素数  $(n_x n_y n_z)$  個のベクトルで式(4.4)の右辺  $x$  方向成分に対応する。そして  $\mathbf{A}$  は  $(n_x n_y n_z) \times (n_x n_y n_z)$  の係数行列である。

本研究ではこれに計算速度改善のため、周期境界条件のある  $x$  方向にのみ、 $x \rightarrow (L/2\pi)\acute{x}$  の変数変換をした後、4 点差分に対応したフーリエ変換をすることで次のようにする。ただし、実際には FFTW という FFT ライブラリを用いて実離散フーリエ変換を行う<sup>10-12)</sup>。

$$\left( -\frac{2[730 - 783 \cos(k\Delta\acute{x}) + 54 \cos(2k\Delta\acute{x}) - \cos(2\Delta\acute{x})] 4\pi^2}{(24\Delta x)^2} \frac{\partial}{L^2} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \tilde{\phi}_{(k,y,z)} = \tilde{b}_{(k,y,z)}, \quad (4.37)$$



$$\Delta x = \frac{2\pi}{N} \quad x \text{ 方向の波数: } k$$

この操作を実施してから、差分式にすると、 $(n_x n_y n_z) \times (n_x n_y n_z)$  であった係数行列が、 $n_x$  個の  $(n_y n_z) \times (n_y n_z)$  の係数行列となる。

実際に式(4.37)を解くには、ここにも Bi-CGSTAB 法を用いる。これは、係数行列が非対称となる場合でも、安定した解法となっている。

また、収束性向上のため、次式に示すような右側前処理と呼ばれる処理を実施する。

$$(AK^{-1})(Kx) = b. \quad (4.38)$$

前処理行列： $K \approx A$

前処理行列は係数行列に近くなるほど収束までの反復回数が小さくなり、同時に 1 度の反復にかかる時間、前処理行列のための記憶容量が大きくなる。本研究では前処理行列として、予測速度  $u^P$ ,  $v^P$ ,  $w^P$  を解くときは係数行列の対角成分の逆数を用いる対角スケールングとよばれる手法を圧力の時間変化  $\phi$  を解くときは係数行列にクラウト法による ILU(0)分解を実施したものを採用する。

ただし、式(4.37)は  $k = 0$  の時に次式となる。

$$\left( \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \tilde{\phi}_{(0,y,z)} = \tilde{b}_{(0,y,z)}, \quad (4.39)$$

このとき  $\phi_{(x, y, z)}$  の  $x$  方向平均  $\tilde{\phi}_{(0, y, z)}$  には境界上で Neumann 条件しか課されていないため、答えを一意に求めることができない。そこで、点  $j = k = 1$  でのみあらかじめ  $\tilde{\phi}_{(0, y, z)} = 0$  と置くことで値を一意に求められるようにしている。これにより、その点で式(4.39)が満足されなくなるが端の一点のみであるので影響は小さいものとして無視している。

本論文で用いた MFCM または RFCM では、FM 項および FD 項の力に近似する表現によって生成され、対応している流れ構造は図 4.3 に示されている。渦度輪郭は、通常の一般的な構造を持っており、密接に離れている気泡・粒子表面に厳密な流れと一致している。表面付近の流体渦の強さは減衰されている。また、流線は明らかに、実際の気泡・粒子よりも半径の若干大きな気泡・粒子表面の存在を示している。ヒル球状の渦に似て、この球面領域内に内部循環がある。図 4.3 に示している流線は、小さな間隔で気泡・粒子内側の部分を除き、厳密な流れのものと一様であり、球状の境界に近いこととしている。

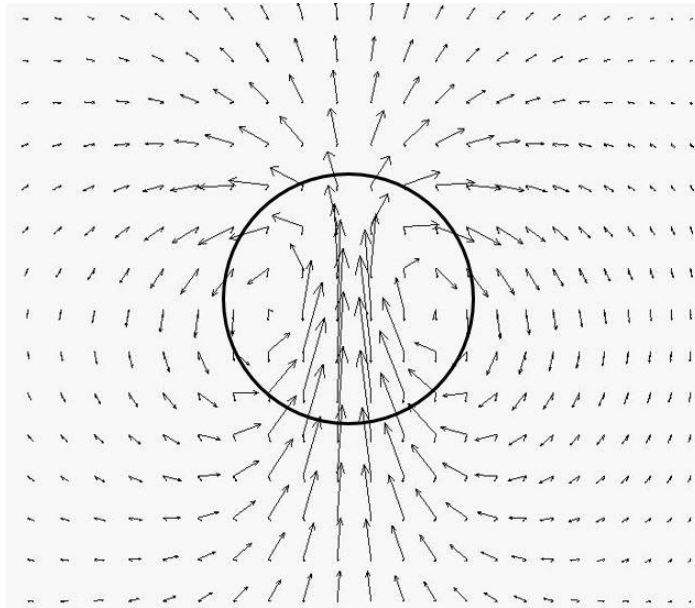


図 4.3 気泡・粒子にあたる流れ構造

## 第 4 章参考文献

- 1) Ferziger, J., H. and Peric, M., “Computational Methods for Fluid Dynamics”, Springer (2002).
- 2) Cheng, L. and Armfield, S., “A simplified marker and cell method for unsteady flows on non - staggered grids”, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 21 (1995), pp. 15-34.
- 3) Kim, J. and Moin, P., “Application of a Fractional-Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations”, Journal of computational Physics, Vol. 59 (1985), pp. 308-323.
- 4) Yeo, K., Dong, S., Climent, E. and Maxey, M. R., “Modulation of homogeneous turbulence seeded with finite size bubbles or particles”, International Journal of Multiphase Flow, vol. 36 (2010), pp. 221-233.
- 5) Yeo, K. and Maxey, M. R., “Ordering transition of non-Brownian suspensions in confined steady shear flow”, Physical Review E, Vol. 81 (2010), pp. 051502-1- 051502-8.
- 6) Yeo, K. and Maxey, M. R., “Simulation of concentrated suspensions using the force-coupling method”, Journal of Computational Physics, Vol. 229 (2010), pp. 2401–2421.
- 7) Yeo, K. and Maxey, M. R., “Numerical simulations of concentrated suspensions of monodisperse particles in a Poiseuille flow”, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 682 (2011), pp. 491-518.
- 8) Yeo, K. and Maxey, M. R., “Dynamics and rheology of concentrated, finite-Reynolds-number suspensions in a homogeneous shear flow”, Physics of fluids, Vol. 25 (2013), pp. 053303-1-053303-24.
- 9) Yeo, K. and Maxey, M. R., “Dynamics of concentrated suspensions of non-colloidal particles in Couette flow”, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 649 (2010), pp. 205-231.
- 10) Frigo, M. and Johnson, S.G., “FFTW Home Page”, FFTW, <http://www.fftw.org/>.
- 11) 涌井良幸, 涌井貞美, “道具としてのフーリエ解析”, 日本実業出版社(2014).
- 12) 田口俊弘, “Fortan ハンドブック”, 技術評論社(2015).

## 第5章 MFCM と RFCM の計算結果の正確さに関する検討

### 5.1 無限流体中における単一球形気泡・粒子

無限流体中における気泡・粒子の運動については、静止流体であれば、気泡・粒子が鉛直に上昇することとなる（本論文では流体密度より大きい密度の粒子を考慮しない）。その場合は、第2章で記述した気泡・粒子に働く各種の力が全て釣り合っている状態となれば、気泡・粒子が定常状態で一定の速度で上昇することとなる。その速度は、気泡・粒子の上昇終端速度と呼ぶ。

静止無限流体中における気泡上昇終端速度に関する重要な実験については、竹村と矢部<sup>1)</sup>は顕微鏡付きのカメラを移動させながら、静止流体中を上昇する気泡の上昇速度と気泡径を同時に測定できる装置を用い、シリコンオイル中を上昇する球形ガス気泡鉛直方向上昇速度を計測した。

本節は、MFCM と RFCM を用いて単一球形気泡・粒子の上昇終端速度における数値計算を行って、球形気泡の場合は竹村と矢部<sup>1)</sup>の実験結果との比較、球形粒子の場合は Clift et al.<sup>2)</sup>の式によって得られた終端速度の理論解との比較を行うことによって、新しい計算方法の静止無限流体中における気泡・粒子の上昇終端速度に対する妥当性を検討する。

本節での計算領域および気泡配置は、図 5.1 に示されるような立方体とし、実験におけるテストセクションと同様に各辺の長さを 0.04 m と取った。数値計算における格子数は、 $x$  方向には選点法によるフーリエ級数展開を用いるため、選点数を  $n_x = 128$  とした。 $y$  方向と  $z$  方向は等間隔スタガード格子を利用した差分法を用い、 $y$  方向と  $z$  方向どちらも  $n_y = 128$ ,  $n_z = 128$  とした。また、本論文における気泡半径にあたる格子数は最大の場合で 3 程度である。

一方、竹村と矢部<sup>1)</sup>が実験で用いたテストセクションは高さ（ $x$  方向）0.5 m、横（ $y$  方向）0.04 m、縦（ $z$  方向）0.04 m である。本研究での 3 次元数値計算では、 $x$  方向に周期境界条件を用い、領域長さの不足を補った。これは、計算負荷を軽減するためである。面  $y = -0.02$  m, 0.02 m および面  $z = -0.02$  m, 0.02 m では滑りなし条件を仮定した。本節の数値計算では、重力加速度を  $9.81 \text{ m/s}^2$  とし、動粘性係数、気泡半径を実験条件と等しく取った。計算領域内の流れを全体的に静止状態に保つため、重力と逆方向の圧力勾配を加えた。計算領域内を移動する気泡は浮力の作用によって初期速度がゼロから加速されて上昇する。また、初期位置パラメータは、 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  と設定した。気泡レイノルズ数は、式(3.55)と同様に、以下のように定義する。

$$Re_{\infty,b}^{(1)} = \frac{2R^{(1)}U_{\infty,b}}{\nu} = \frac{2g_i(R^{(1)})^3}{3\nu^2} \cdot \frac{1}{1 + \left[ \frac{8}{Re_{\infty,b}^{(1)}} + 0.5 \left( 1 + \frac{3.315}{(Re_{\infty,b}^{(1)})^{0.5}} \right) \right]^{-1}}. \quad (5.1)$$

ここで、右上の添え字 (1) は、気泡の番号を表す。右下の添え字  $\infty, b$  は、それぞれ無限流体と気泡を意味する。  $U_{\infty, b}$  は、式(3.54)から得られた無限流体中の気泡上昇終端速度を表す。

図 5.2 に  $Re_{\infty, b}^{(1)} = 0.11$  の場合に、気泡が計算領域の底部中心  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  から初期速度ゼロで出発し、壁面の影響が無視できる場合の鉛直方向の時間的な上昇速度  $U_{1, b}^{(1)}(t)$  と  $U_{\infty, b}$  との比を示す。図 5.2 より、  $t = 3 \text{ s}$  では  $U_{1, b}^{(1)}(t)$  は十分に  $U_{\infty, b}$  に近づくことがわかる。

図 5.3 は、MFCM と RFCM を用いて計算された結果と竹村と矢部<sup>1)</sup>の実験結果との比較を示している。図 5.3 より、MFCM の計算結果と RFCM の計算結果において、球形気泡の鉛直方向の上昇終端速度に対する予測は、大きな差が出なかった。また、両方法とともに、  $0.049 \leq Re_{\infty, b}^{(1)} \leq 22.8$  の範囲で、竹村と矢部<sup>1)</sup>の実験結果とよく一致していることがわかった。  $Re_{\infty, b}^{(1)} = 41.8$  および  $Re_{\infty, b}^{(1)} = 61.6$  の場合において、計算結果と実験結果とずれが生じて、計算結果は実験結果より小さい値が得られた。しかし、  $Re_{\infty, b}^{(1)} \leq 22.8$  の範囲であれば、MFCM と RFCM は鉛直方向の気泡の上昇終端速度に対する計算の妥当性が十分に確認できる。本節は単純に気泡の速度に関する計算を行ったが、気泡のより複雑な挙動の予測は、次節で述べる。

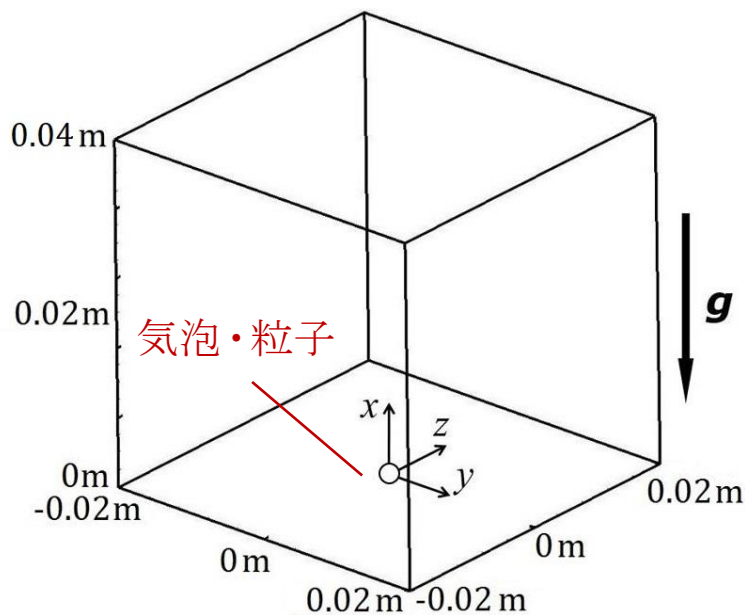


図 5.1 計算領域および気泡配置

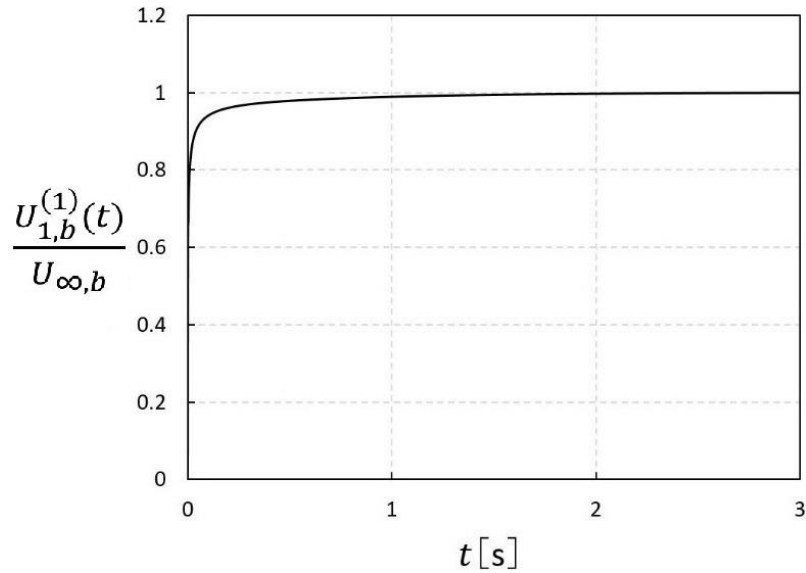


図 5.2  $Re_{\infty,b}^{(1)} = 0.11$  の場合の気泡における  $U_{1,b}^{(1)}(t) / U_{\infty,b}$  の時間変化.

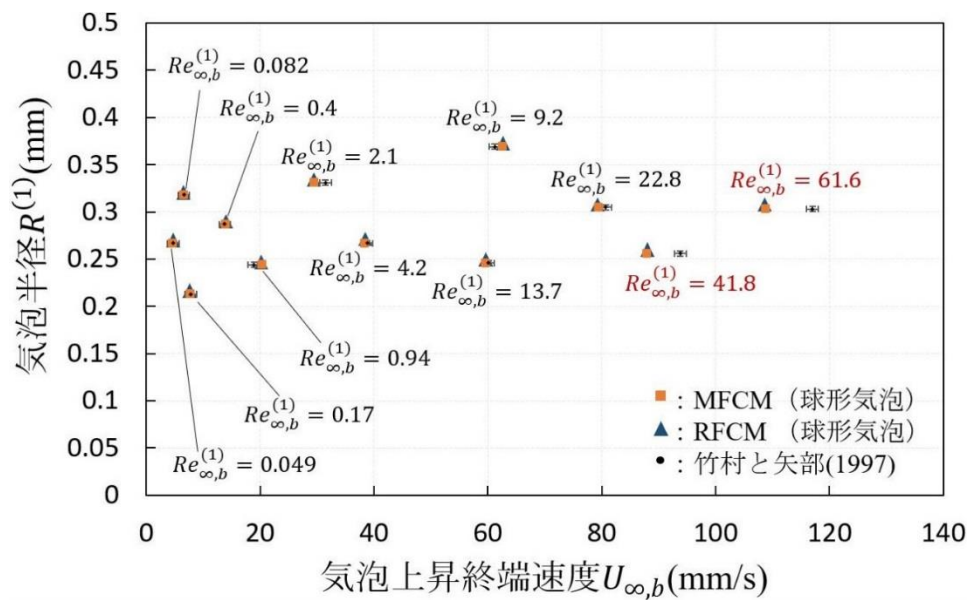


図 5.3 気泡上昇終端速度における実験値と計算値との比較

次に、球形粒子の計算については、Clift et al.<sup>2)</sup>の式によって得られた終端速度の理論解との比較を行う。計算領域と粒子の配置は、図 5.1 と同様に設定する。粒子レイノルズ数は、式(3.58)と同様に、以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
Re_{\infty,p}^{(1)} &= \frac{2R^{(1)}U_{\infty,p}}{\nu} = \frac{4g_i(R^{(1)})^3}{9\nu^2} \cdot \frac{1}{\frac{24}{Re_{\infty,p}^{(1)}} \left(1 + \frac{3}{16} Re_{\infty,p}^{(1)}\right)}, & (Re_{\infty,p}^{(1)} \leq 0.01) \\
&= \frac{2R^{(1)}U_{\infty,p}}{\nu} = \frac{4g_i(R^{(1)})^3}{9\nu^2} \cdot \frac{1}{1 + 0.1315 Re_{\infty,p}^{(1) \left(0.82 - 0.05 \log_{10} Re_{\infty,p}^{(1)}\right)}}, & (0.01 < Re_{\infty,p}^{(1)} \leq 20) \\
&= \frac{2R^{(1)}U_{\infty,p}}{\nu} = \frac{4g_i(R^{(1)})^3}{9\nu^2} \cdot \frac{1}{1 + 0.1935 Re_{\infty,p}^{(1) 0.6305}}, & (20 < Re_{\infty,p}^{(1)} \leq 260)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

ここで、 $U_{\infty,p}$  は、式(3.57)に得られた無限流体中の粒子上昇終端速度を表す。

図 5.4 に、MFCM と RFCM を用いて、 $Re_{\infty,p}^{(1)} = 41.8$  と  $61.4$  の場合に対して、粒子が計算領域の底部中心( $x, y, z$ ) = (0, 0, 0) から初期速度ゼロで出発し、壁面の影響が無視できる場合の鉛直方向の上昇速度  $U_{1,p}^{(1)}(t)$  と  $U_{\infty,p}$  との比を示す。ただし、MFCM と RFCM から得られた計算結果がほぼ同じであるため、図 5.4 に示されているのは、RFCM のみの計算結果である。図 5.4 より、 $Re_{\infty,p}^{(1)} = 41.8$  の場合において、 $t = 2.5$  s では  $U_1(t)$  は十分に  $U_{\infty,p}$  に近づくことがわかるが、 $Re_{\infty,p}^{(1)} = 61.4$  の場合において、計算結果と理論値とずれが生じて、計算結果は理論値より小さい値が得られた。しかし、MFCM と RFCM において、粒子に適用できるレイノルズ数の範囲は気泡に適用できるレイノルズ数の範囲より広いことがわかる。粒子のより複雑な挙動に関する実験結果との比較は、次節で述べる。

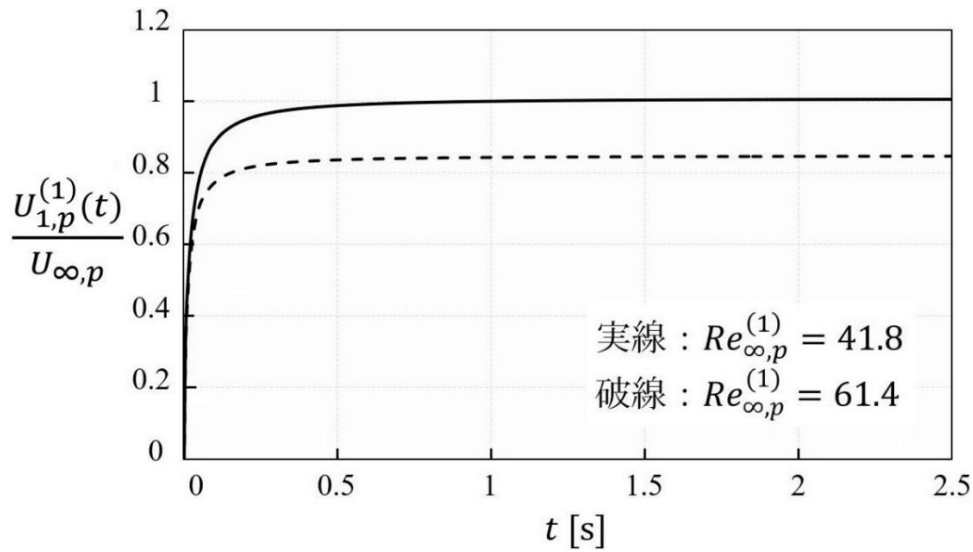


図 5.4  $Re_{\infty,p}^{(1)} = 41.8$  と  $61.4$  の場合の粒子における  $U_{1,p}^{(1)}(t)/U_{\infty,p}$  の時間変化.

## 5.2 壁面近傍を上昇する単一球形気泡・粒子

壁面近傍を上昇する単一気泡・粒子について、気泡・粒子レイノルズ数が小さい場合（1 以下）の Stokes 流れ領域における Stokes 流れの運動学的可逆性によって、鉛直に上昇するが、壁面の影響で気泡・粒子に働く抵抗力が増加することと、気泡・粒子レイノルズ数が大きくなると（1 以上）、壁面の影響で気泡・粒子に壁面から遠ざかる斥力（横力）が働くことを 2.3 節で述べた。また、壁面近傍における気泡・粒子の運動に関する重要な実験について、竹村ら<sup>3,4)</sup>と Takemura et al.<sup>5)</sup>は顕微鏡付きのカメラを移動させながら、静止流体中を上昇する気泡の上昇速度と気泡径を同時に測定できる装置を用い、シリコンオイル中を上昇する球形ガス気泡の壁面近傍の鉛直方向上昇速度および気泡を壁面から遠ざかる方向に働く斥力（横力）を求めた。および、竹村ら<sup>6,7)</sup>は水中に界面活性剤を十分添加することによって気泡が固体球として振る舞う気泡の壁面近傍の鉛直方向上昇速度および気泡を壁面から遠ざかる方向に働く斥力（横力）を求めた。

本節は、MFCM と RFCM を用いて、壁面近傍を上昇する単一球形気泡・粒子に対する数値計算を行って、球形気泡の場合は竹村ら<sup>3,4)</sup>の実験結果との比較、球形粒子の場合は竹村ら<sup>6,7)</sup>の実験結果との比較を行うことによって、新しい計算方法の壁面近傍における気泡・粒子の挙動の予測に対する妥当性を検討する。さらに、気泡・粒子の周辺の渦の計算結果から斥力（横力）の発生原因を検討した。

本節での計算領域および気泡配置は、図 5.5 に示されている前節と同様な立方体を考えたが、実験におけるテストセクションと同様に各辺の長さを 0.06 m と取った。数値計算にお



ける格子数は、 $x$  方向には  $n_x = 128$  とした。  $y$  方向と  $z$  方向は等間隔スタガード格子を利用した差分法を用い、  $y$  方向と  $z$  方向どちらも  $n_y = 128$ ,  $n_z = 128$  とした。 また、本節でも気泡半径にあたる格子数は最大の場合で 3 程度である。

竹村ら<sup>3,4,6,7</sup>が実験で用いたテストセクションは高さ ( $x$  方向) 0.5 m, 横 ( $y$  方向) 0.06 m, 縦 ( $z$  方向) 0.06 m である。本節での 3 次元数値計算では、 $x$  方向に周期境界条件を用い、領域長さの不足を補った。これは、計算負荷を軽減するためである。面  $y = -0.03$  m,  $0.03$  m および面  $z = -0.03$  m,  $0.03$  m では滑りなし条件を仮定した。図 5.6 に、竹村ら<sup>3,4,6,7</sup>の実験におけるテストセクション縦横長さと同論文における計算領域の  $y$ ,  $z$  方向長さとの比較、図 5.7 に、気泡・粒子の配置を示す。本研究での数値計算では、重力加速度を  $9.81$   $\text{m/s}^2$  とし、動粘性係数、気泡・粒子半径を実験条件と等しく取った。 $L$  は、気泡中心と最も近い壁面との距離を表し、気泡の移動とともに変化する。計算領域内の流れを全体的に静止状態に保つため、重力と逆方向の圧力勾配を加えた。計算領域内を移動する気泡は浮力の作用によって初期速度がゼロから加速されて上昇する。また、初期位置パラメータは、 $(x, y, z) = (0, 0, 0.03 - L_0)$  と設定した。ただし、 $L_0$  は実験条件に対応し、 $1.5R^{(1)}$  から  $5R^{(1)}$  まで変化させる。

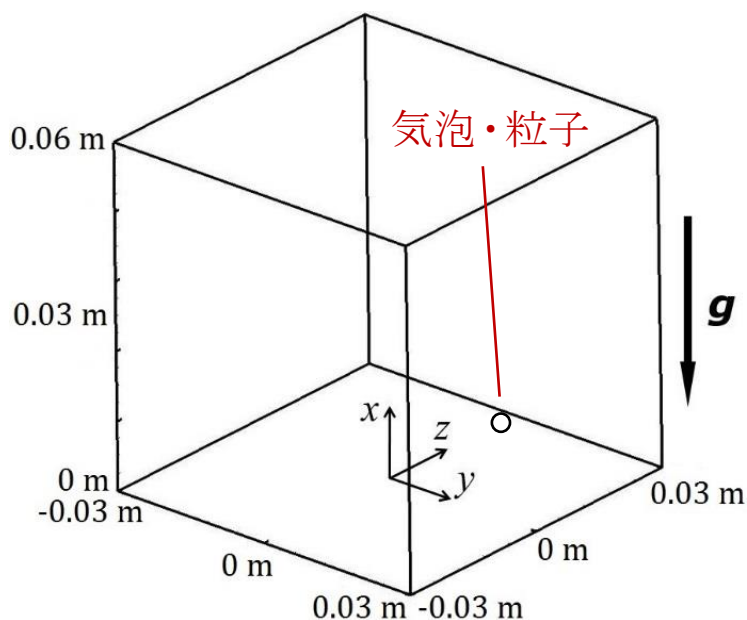


図 5.5 計算領域.

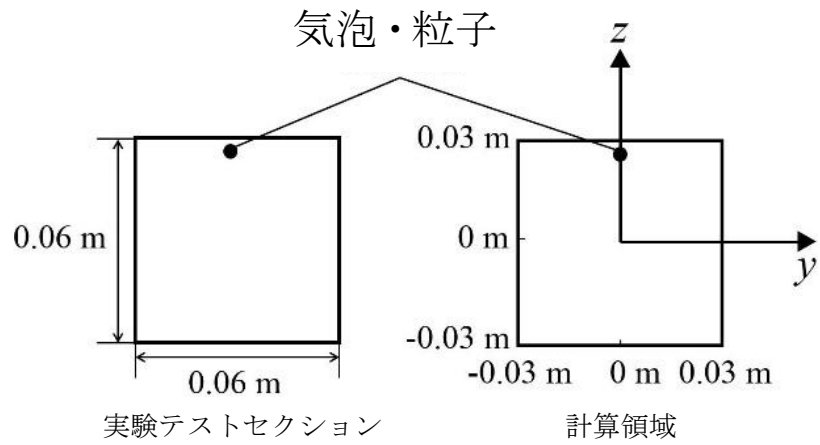


図 5.6 実験テストセクションと計算領域との比較

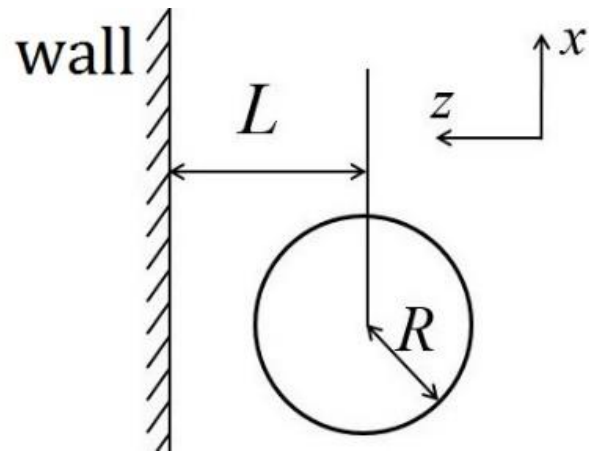


図 5.7 気泡・粒子半径と配置.

まず、低気泡・粒子レイノルズ数領域に対して検討を行う。図 5.8 に、 $Re_{\infty,b}^{(1)} = 0.11$  の気泡の場合における気泡中心から壁面間距離と気泡半径の比に対する速度比の変化を示す。ここで、 $U_{1,b}^{(1)}$  は、MFCM と RFCM の計算結果から得られた気泡の上昇終端速度を表す。黒い実線は式(2.34)によって求めた理論解、▲は MFCM による計算結果、□は RFCM による計算結果、●は竹村ら<sup>3)</sup>の実験結果を表す。図 5.8 より、MFCM と RFCM の計算結果は一致しており、理論解とのずれが生じるが、誤差範囲内において、 $L/R^{(1)}$  が 1.5 から 3.5 までの範囲の実験結果と比べ、実験結果とよく一致することがわかった。

一方、図 5.9 に、 $Re_{\infty,b}^{(1)} = 0.11$  の粒子の場合における気泡中心から壁面間距離と粒子半径の比に対する速度比の変化を示す。ここで、 $U_{1,p}^{(1)}$  は、MFCM と RFCM の計算結果から得られた粒子の上昇終端速度を表す。黒い実線は式(2.37)によって求めた理論解、▲は MFCM による計算結果、□は RFCM による計算結果を表す。図 5.9 より、MFCM と RFCM の計算結果は理論解と大きな差が生じなかったが、壁面に近づくと  $L/R^{(1)} = 1.5 \sim 2$  の範囲で MFCM の計算結果と RFCM の計算結果との微小のずれが生じた。

気泡・粒子レイノルズ数が大きくなると、壁面の影響で気泡・粒子に斥力（横力）が働くこととなり、図 5.10 に  $Re_{\infty,b}^{(1)} = Re_{\infty,p}^{(1)} = Re_{\infty}^{(1)}$  が 0.11, 0.5, 1 および 5 に対して、点(0, 0,  $0.03 - 2R^{(1)}$ )から初期速度ゼロで出発した気泡・粒子の移動経路の計算結果を示す。図 5.10 より、 $Re_{\infty}^{(1)} = 0.11$  の場合の気泡・粒子は、ほぼ鉛直方向に上昇するが、 $Re_{\infty}^{(1)} \geq 0.5$  の場合は、壁面から遠ざかる方向に上昇することがわかった。これは、 $Re_{\infty}^{(1)}$  が大きくなればなるほど、壁面の影響により壁面から遠ざかる方向に気泡がより大きな斥力（横力）を受けることを示している。

なお、ここには示していないが、十分に時間が経過すると、計算した全ての  $Re_{\infty}^{(1)}$  に対して、気泡・粒子の移動経路は、最終的に鉛直方向に上昇することがわかった。この理由は、気泡が壁面から遠ざかると、壁面の影響で生じた斥力（横力）が小さくなるからであると考えられる。

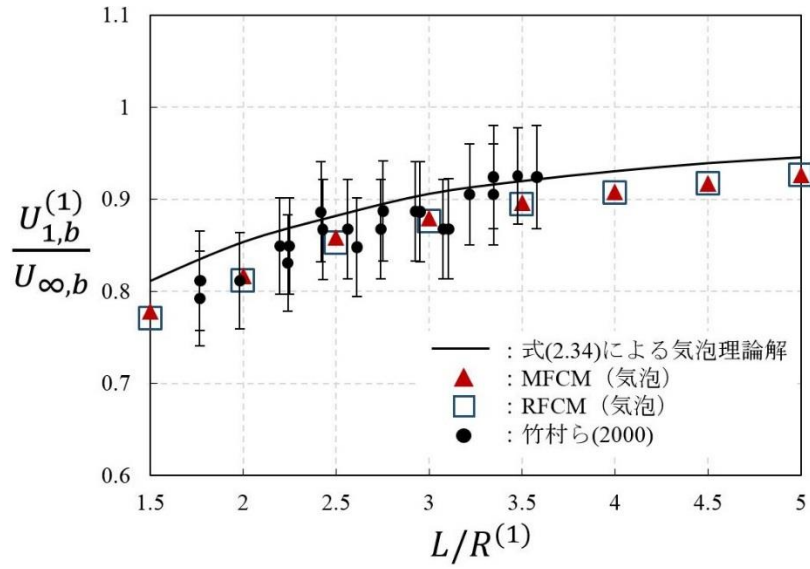


図 5.8  $Re_{\infty,b}^{(1)} = 0.11$  の場合の気泡における  $L/R^{(1)}$  に対する  $U_{1,b}^{(1)}/U_{\infty,b}^{(1)}$  の変化.

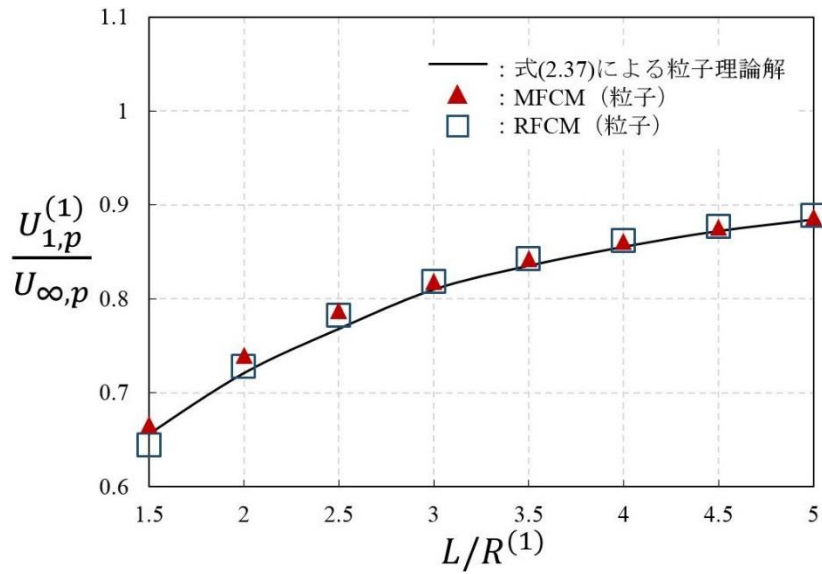


図 5.9  $Re_{\infty,p}^{(1)} = 0.11$  の場合の粒子における  $L/R^{(1)}$  に対する  $U_{1,p}^{(1)}/U_{\infty,p}^{(1)}$  の変化.

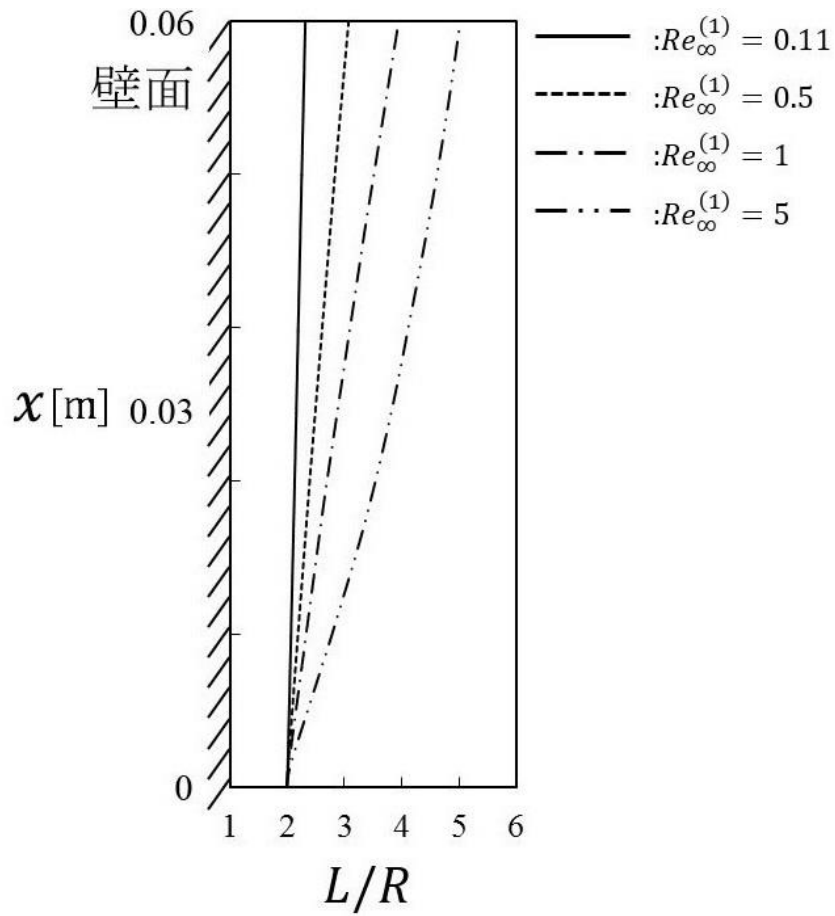


図 5.10 に  $Re_{\infty,b}^{(1)} = Re_{\infty,p}^{(1)} = Re_{\infty}^{(1)} = 0.11, 0.5, 1$  および  $5$  の場合の気泡・粒子移動経路.

本節での数値計算において、 $Re_{\infty}^{(1)}$  が大きくなるにつれ斥力（横力）が次第に大きくなることも明らかとなった。 $Re_{\infty}^{(1)}$  が比較的大きい場合において、竹村ら<sup>4)</sup>は気泡、竹村ら<sup>6,7)</sup>は水中に界面活性剤を十分添加することによって気泡が固体球として振る舞う気泡の移動軌跡および移動速度より斥力（横力）を求めた。しかし、水平方向の速度データは、竹村ら<sup>4,6,7)</sup>の論文中に与えられていないため、本研究でも MFCM と RFCM による計算結果から気泡の移動軌跡および移動速度より斥力（横力）を求め、竹村ら<sup>4,6,7)</sup>の結果と比較した。

竹村ら<sup>4,6,7)</sup>は、無限流体中に一つの壁面が存在する場合に、Oseen 近似を仮定して壁面近傍を移動する粒子が受ける力を解析した Vasseur と Cox<sup>8)</sup>の接合漸近展開法により斥力（横力）を求める式は、気泡の水平方向（ $z$  方向）斥力（横力）成分の逆フーリエ変換  $I_{L,b}$  は式(2.53)を用いて、水平方向（ $z$  方向）抵抗力成分の逆フーリエ変換  $I_{D,b}$  は式(2.52)を用いる。粒子の水平方向（ $z$  方向）斥力（横力）成分の逆フーリエ変換  $I_{L,p}$  は式(2.55)を用いて、水平方向（ $z$  方向）抵抗力成分の逆フーリエ変換  $I_{D,p}$  は式(2.54)を用いる。竹村ら<sup>4)</sup>にしたがい、気泡の場合における近似的な水平方向の力の釣り合いを仮定し、Mei et al.<sup>9)</sup>の式(式(2.12))を用いると、次のような等式が得られる。

$$\begin{aligned}
& 2\pi\nu\rho_f R^{(1)} U_{1,b}^{(1)} Re_{\infty,b}^{(1)} I_{L,b} \\
&= 4\pi\nu\rho_f R U_{3,b}^{(1)} \left\{ 1 + \left[ \frac{8}{Re_{\infty,b}^{(1)}} + 0.5 \left( 1 + \frac{3.315}{(Re_{\infty,b}^{(1)})^{0.5}} \right) \right]^{-1} \right\} + 2\pi\nu\rho_f R U_{3,b}^{(1)} Re_{\infty,b}^{(1)} I_{D,b},
\end{aligned} \tag{5.3}$$

竹村ら<sup>6,7)</sup>にしたがい、粒子の場合における近似的な水平方向の力の釣り合いを仮定し、Clift et al.<sup>2)</sup>の式(式(2.14))を用いると、次のような等式が得られる。

$$\begin{aligned}
& 3\pi\nu\rho_f R^{(1)} U_{1,p}^{(1)} Re_{\infty,p}^{(1)} I_{L,p} = 6\pi\nu\rho_f R^{(1)} U_{3,p}^{(1)} \left\{ \frac{24}{Re_{\infty,p}^{(1)}} \left( 1 + \frac{3}{16} Re_{\infty,p}^{(1)} \right) \right\} + 3\pi\nu\rho_f R^{(1)} U_{3,p}^{(1)} Re_{\infty,p}^{(1)} I_{D,p}, \\
& \hspace{20em} (Re_{\infty,p}^{(1)} \leq 0.01) \\
& 3\pi\nu\rho_f R^{(1)} U_{1,p}^{(1)} Re_{\infty,p}^{(1)} I_{L,p} \\
&= 6\pi\nu\rho_f R^{(1)} U_{3,p}^{(1)} \left\{ 1 + 0.1315 Re_{\infty,p}^{(1) (0.82 - 0.05 \log_{10} Re_{\infty,p}^{(1)})} \right\} + 3\pi\nu\rho_f R^{(1)} U_{3,p}^{(1)} Re_{\infty,p}^{(1)} I_{D,p}, \\
& \hspace{20em} (0.01 < Re_{\infty,p}^{(1)} \leq 20) \\
& 3\pi\nu\rho_f R^{(1)} U_{1,p}^{(1)} Re_{\infty,p}^{(1)} I_{L,p} = 6\pi\nu\rho_f R^{(1)} U_{3,p}^{(1)} \left\{ 1 + 0.1935 Re_{\infty,p}^{(1) 0.6305} \right\} + 3\pi\nu\rho_f R^{(1)} U_{3,p}^{(1)} Re_{\infty,p}^{(1)} I_{D,p}, \\
& \hspace{20em} (20 < Re_{\infty,p}^{(1)} \leq 260)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

なお、実際の斥力（横力）と抵抗力は、 $I_{L,b}$ 、 $I_{L,p}$ と $I_{D,b}$ 、 $I_{D,p}$ が含まれる式(5.3)と式(5.4)の左辺と右辺全体であることに注意して頂きたい。実験結果と比較するため、式(5.3)と式(5.4)より、 $I_{L,b}$ は以下のように計算される。

$$I_{L,b} = \frac{2}{Re_{\infty,b}^{(1)}} \cdot \frac{U_{3,b}^{(1)}}{U_{1,b}^{(1)}} \left\{ 1 + \left[ \frac{8}{Re_{\infty,b}^{(1)}} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{3.315}{(Re_{\infty,b}^{(1)})^{0.5}} \right) \right]^{-1} + \frac{R^{(1)}}{L} Re_{L,b} I_{D,b} \right\}. \quad (5.5)$$

ここで、

$$Re_{L,b} = \frac{LU_{\infty,b}}{\nu}$$

である。

$I_{L,p}$ は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} I_{L,p} &= \frac{2}{Re_{\infty,p}^{(1)}} \cdot \frac{U_{3,p}^{(1)}}{U_{1,p}^{(1)}} \left\{ \frac{24}{Re_{\infty,p}^{(1)}} \left( 1 + \frac{3}{16} Re_{\infty,p}^{(1)} \right) + \frac{R^{(1)}}{L} Re_{L,p} I_{D,p} \right\}, & (Re_{\infty,p}^{(1)} \leq 0.01) \\ &= \frac{2}{Re_{\infty,p}^{(1)}} \cdot \frac{U_{3,p}^{(1)}}{U_{1,p}^{(1)}} \left\{ 1 + 0.1315 Re_{\infty,p}^{(1) (0.82 - 0.05 \log_{10} Re_{\infty,p}^{(1)})} + \frac{R^{(1)}}{L} Re_{L,p} I_{D,p} \right\}, & (0.01 < Re_{\infty,p}^{(1)} \leq 20) \\ &= \frac{2}{Re_{\infty,p}^{(1)}} \cdot \frac{U_{3,p}^{(1)}}{U_{1,p}^{(1)}} \left\{ 1 + 0.1935 Re_{\infty,p}^{(1) 0.6305} + \frac{R^{(1)}}{L} Re_{L,p} I_{D,p} \right\}, & (20 < Re_{\infty,p}^{(1)} \leq 260) \end{aligned} \quad (5.6)$$

ここで、

$$Re_{L,p} = \frac{LU_{\infty,p}}{\nu}$$

である。

竹村ら<sup>4,6,7)</sup>の論文では、 $I_{L,b}$ と $I_{L,p}$ のデータが与えられているが、直接に $U_{1,b}^{(1)}$ 、 $U_{1,p}^{(1)}$ と $U_{3,b}^{(1)}$ 、 $U_{3,p}^{(1)}$ は示されていない。したがって、本論文ではMFCMとRFCMによる計算結果から鉛直方向上昇速度 $U_{1,b}^{(1)}$ と $U_{1,p}^{(1)}$ 、水平方向速度 $U_{3,b}^{(1)}$ と $U_{3,p}^{(1)}$ および $R^{(1)}/L$ を求め、式(2.52)と式(2.54)より、 $I_{D,b}$ と $I_{D,p}$ を求め、合わせて式(5.5)と式(5.6)に代入して、 $I_{L,b}$ と $I_{L,p}$ を求め

ることにより、竹村ら<sup>4,6,7)</sup>の実験結果と比較することができた。

まず、気泡の場合に対して、検討を行う。本論文では、斥力（横力）の影響が顕著となる  $Re_{\infty,b}^{(1)} > 1$  の場合を取り扱った。図 5.10 に  $Re_{\infty,b}^{(1)} = 1.25, 2.1$  および  $4.4$  の場合における  $L$  から決まる  $Re_{L,b} (= LU_{\infty,b}/\nu)$  に対する  $I_{L,b}$  の値を示す。黒色記号は竹村ら<sup>4)</sup>の実験結果、カラーの線は本研究で用いた MFCM と RFCM による計算結果から式(5.5)により  $I_{L,b}$  を求めた結果である。図 5.10 より、本研究で用いた MFCM と RFCM による計算結果は、 $Re_{\infty,b}^{(1)} = 1.25, 2.1$  および  $4.4$  の気泡に対する場合において、両方法ともに実験結果とよく一致することがわかる。最大の場合でも、誤差が 5%以下である。なお、竹村ら<sup>4)</sup>の実験では、浮上させた気泡が終端速度に達した後、壁面が存在する領域に侵入する条件としている。一方、本計算では、最初から壁面が存在する領域で初期速度ゼロから出発させて計算を行った。それでも、実験結果とよく一致することは特筆すべきことである。しかし、より複雑の計算で MFCM と RFCM による計算結果は、最大の 7%のずれが生じたことがわかった。

図 5.11 に  $Re_{\infty,b}^{(1)} = 7.3$  および  $15$  の場合における  $L$  から決まる  $Re_{L,b} (= LU_{\infty,b}/\nu)$  に対する  $I_{L,b}$  の値を示す。図 5.10 と同様に、黒色記号は竹村ら<sup>4)</sup>の実験結果、カラーの線は本研究で用いた MFCM と RFCM による計算結果から式(5.5)により  $I_{L,b}$  を求めた結果である。図 5.11 より、本研究で用いた MFCM と RFCM による計算結果は、 $Re_{\infty,b}^{(1)} = 7.3$  の気泡に対する場合において、両方法ともに実験結果とよく一致し、5%以下の誤差であるが、 $Re_{\infty,b}^{(1)} = 15$  の気泡の場合は、MFCM による計算結果不安定で実験結果からずれており、一致しなくなる。RFCM による結果が実験結果と一致する。RFCM は MFCM に比べて、より広い  $Re_{\infty,b}^{(1)}$  範囲の気泡に適用できることがわかった。

RFCM の計算結果に基づき、図 5.13 に  $2.1 \leq Re_{\infty,b}^{(1)} \leq 15$  の場合に対して、点  $(0, 0, 0.03 - 2R^{(1)})$  から初期速度ゼロで出発した気泡に対する  $I_{L,b} * Re_{\infty,b}^{(1)}$  の時間変化を示す。なお、式(5.3)より、気泡に働く斥力（横力）は  $I_{L,b} * Re_{\infty,b}^{(1)}$  に比例する量であるため、図 5.13 では  $I_{L,b} * Re_{\infty,b}^{(1)}$  の変化を斥力（横力）の変化として表現している。これから、 $Re_{\infty,b}^{(1)} \geq 4.4$  に対して、気泡が移動を開始したときに、壁面の影響で斥力（横力）が急激に増加しピークに達した後、緩やかに減衰していく傾向がわかる。ただし、 $Re_{\infty,b}^{(1)} = 2.1$  の場合、その変化が若干緩やかである。すなわち、 $Re_{\infty,b}^{(1)}$  が大きくなるにつれ、斥力（横力）がピーク値に達するのに必要な時間が短く、減衰も速くなることが示されている。一方、 $Re_{\infty,b}^{(1)}$  が小さければ小さいほど気泡に働く斥力（横力）の持続する時間が長くなる傾向がある。

図 5.13 において、 $Re_{\infty,b}^{(1)} = 2.1$  の  $I_{L,b}$  のピーク値 ( $t = 0.3$  s) と  $t = 1$  s における値の比は 1.53 である。他の  $Re_{\infty,b}^{(1)}$  に対して、 $I_{L,b}$  の値がピーク値の  $1/1.53$  となる  $t$  の値を  $t^*$  とする。図 5.14 に  $Re_{\infty,b}^{(1)}$  に対する  $t^*$  の変化を示す。また、図 5.14 中、 $t^*$  を  $Re_{\infty,b}^{(1)}$  の関数として近似曲線の式は次式のように与える。

$$t^* = 2.68 \left( Re_{\infty,b}^{(1)} \right)^{-1.35}. \quad (5.7)$$



これから、 $Re_{\infty,b}^{(1)}$  が大きくなるにつれて、特に  $Re_{\infty,b}^{(1)} > 5$  の場合に、斥力（横力）が減衰するために必要な時間が急激に減少することがわかった。すなわち、高  $Re_{\infty,b}^{(1)}$  の気泡に対しては、斥力（横力）の働く時間が短くなった。

気泡に働く斥力（横力）が発生する原因について、 $Re_{\infty,b}^{(1)} = 4.4$  の場合に対し、計算結果を利用して検討を行った。図 5.15(a)に、 $Re_{\infty,b}^{(1)} = 4.4$  の場合における点(0, 0, 0)から初期速度ゼロで出発した気泡が定常状態に達した時 ( $t = 1$  s) の気泡中心を含む  $y = 0$  面上の 2 次元流線と圧力分布(Pa)を示す。ここでの圧力分布は、気泡の上昇により、ゼロ圧力場から生じた変動を可視化した結果である。図 5.15(a)より、気泡が壁面の影響がない状態で移動する場合は、気泡周囲の渦が  $z$  方向に左右対称となっていることがわかる。一方、図 5.15(b)~(f)に同じ  $Re_{\infty,b}^{(1)}$  の値で点(0, 0,  $0.03 - 2R^{(1)}$ )から初期速度ゼロで出発し、壁面近傍を上浮する気泡の、気泡中心を含む  $y = 0$  面上の 2 次元流線と圧力分布を示す。これから、壁面が存在する場合には、気泡の周囲の渦が  $z$  方向に左右非対称となることがわかる。壁面側の渦は壁面の影響で非常に弱くなるが、反対側の渦はその強さを保っている。このため、気泡周辺の圧力のバランスが破れ、左右に圧力差が生じる。この圧力差により、壁面から遠ざかる方向への斥力（横力）が発生する。また、図 5.15(d)には、気泡の壁面側に渦が生成されている様子がわかる。その渦が時間経過とともにさらに発達していくことより、再び気泡周辺の圧力のバランスが回復し、斥力（横力）は減衰していく。

このように気泡が壁面近傍を上昇する場合、壁面を向いている方向に圧力勾配が生じ、水平方向の斥力（横力）を生み出す物理的メカニズムは Magnaudet et al.<sup>10)</sup>の理論解析により説明できるが、本研究で用いた RFCM による計算結果から、気泡周りの圧力分布を求めることができ、現象のより定量的な再現が可能となった。

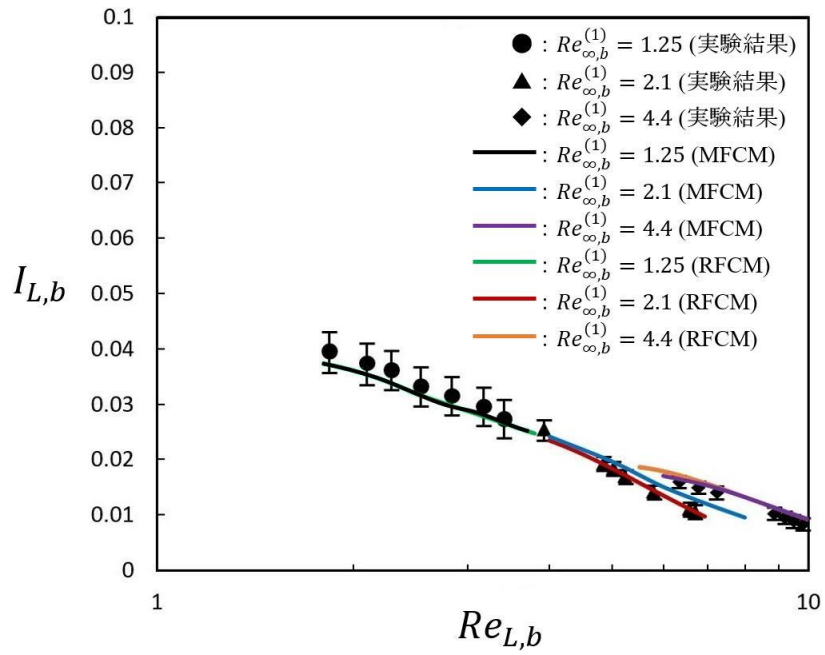


図 5.11  $Re_{\infty,b}^{(1)} = 1.25, 2.1$  および  $4.4$  の場合の  $Re_{L,b}$  に対する  $I_{L,b}$  の変化.

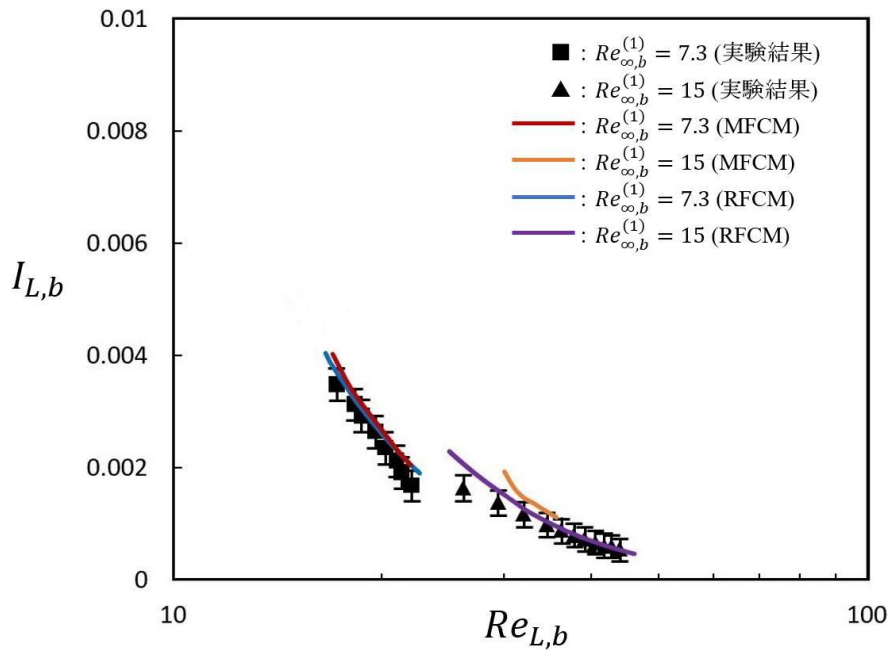


図 5.12  $Re_{\infty,b}^{(1)} = 7.3$  および  $15$  の場合の  $Re_{L,b}$  に対する  $I_{L,b}$  の変化.

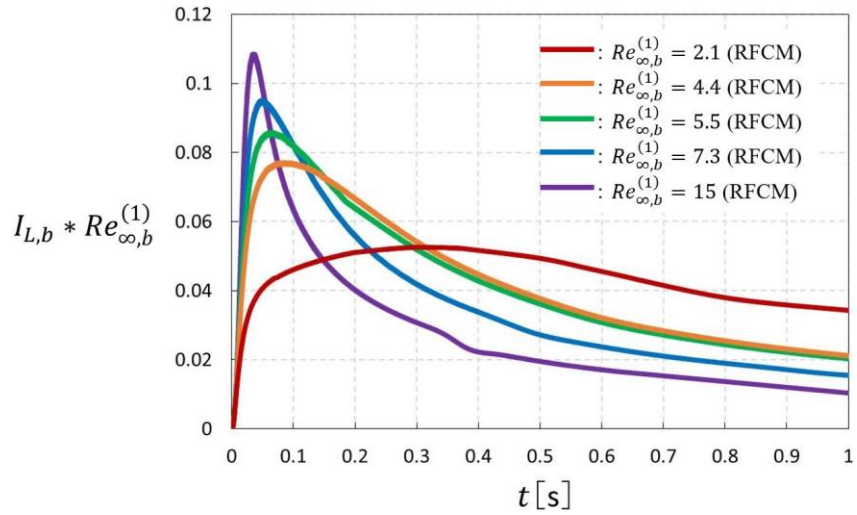


図 5.13 気泡の場合における  $Re_{\infty,b}^{(1)}$  に対する  $I_{L,b} * Re_{\infty,b}^{(1)}$  の時間的变化.

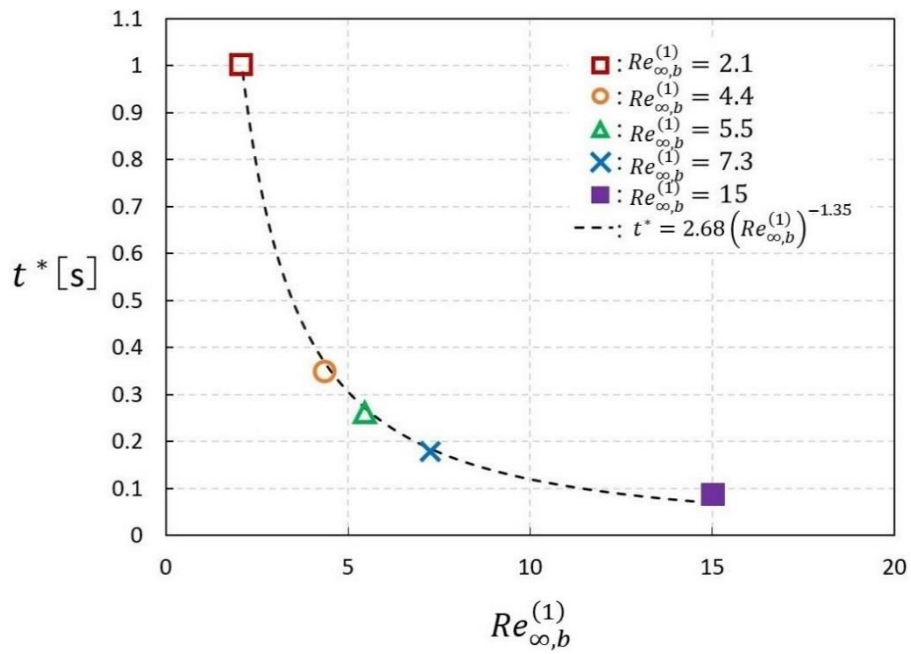
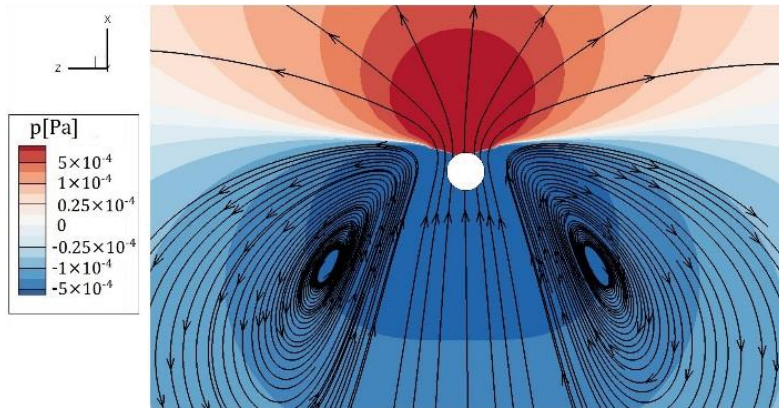
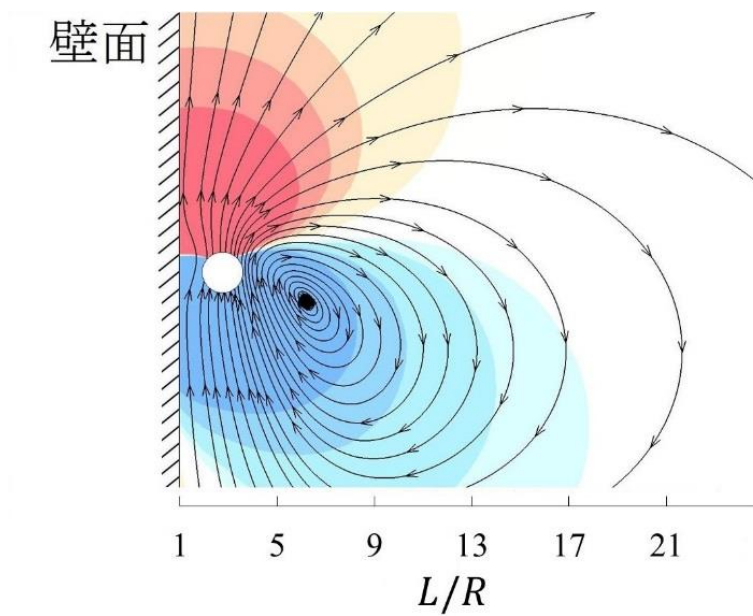


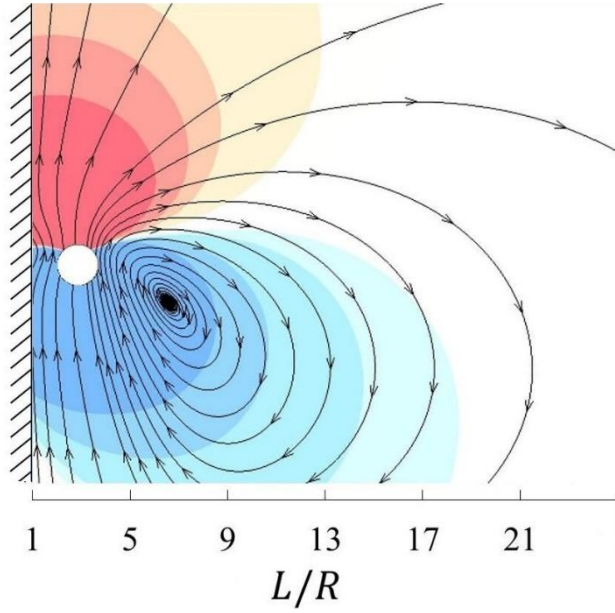
図 5.14 気泡の場合における  $Re_{\infty,b}^{(1)}$  に対する  $t^*$  の変化.



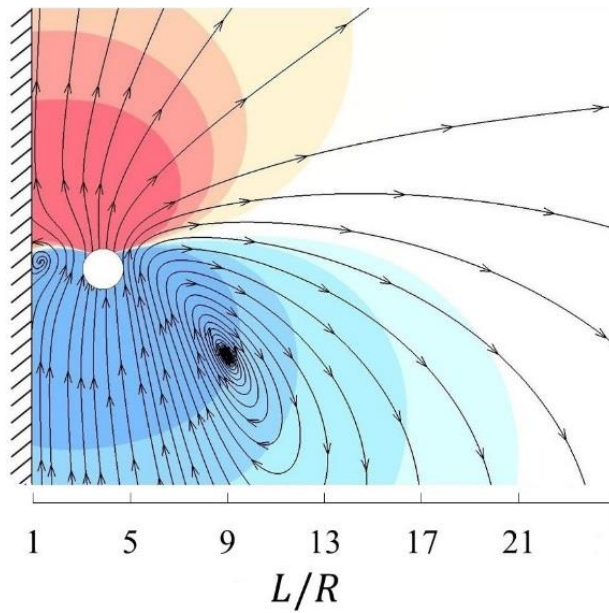
(a) 気泡が  $t = 1[s]$ における点(0, 0, 0)から出発した場合.



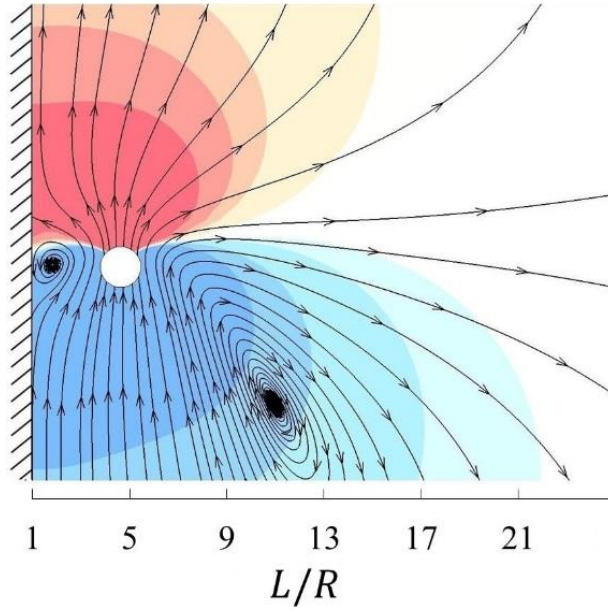
(b)  $t = 0.05$  s.



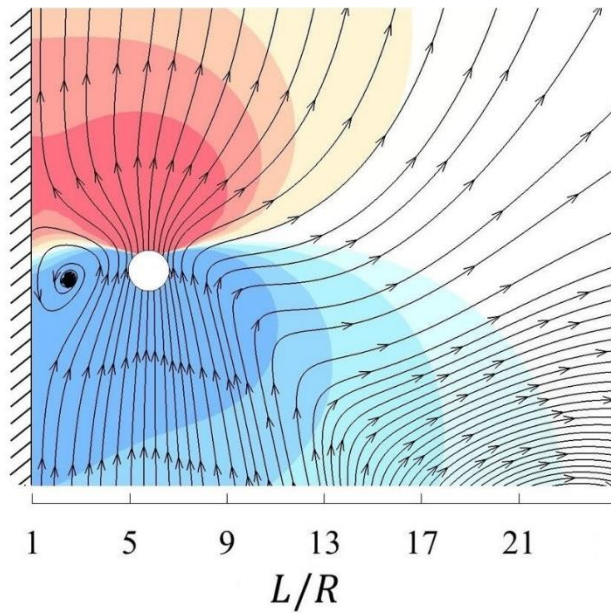
(c)  $t = 0.1$  s.



(d)  $t = 0.25$  s.



(e)  $t = 0.5$  s.



(f)  $t = 1.0$  s.

図 5.15 (a)  $Re_{\infty,b}^{(1)} = 4.4$  の場合における点  $(0, 0, 0)$  から出発した気泡の  $y = 0$  面上の 2 次元流線と圧力分布, (b)~(f) 壁面が存在する場合, 点  $(0, 0, 0.03 - 2R^{(1)})$  から出発した気泡の  $y = 0$  面上の 2 次元流線と圧力分布の時間変化.

次は、粒子の場合に対して、検討を行う。図 5.16 に  $Re_{\infty,b}^{(1)} = 0.9, 2.5$  および 5 の場合における  $L$  から決まる  $Re_{L,p} (= LU_{\infty,p}/\nu)$  に対する  $I_{L,p}$  の値を示す。黒色記号は竹村ら<sup>9)</sup>の実験結果、カラーの線は本研究で用いた MFCM と RFCM による計算結果から式(5.6)により  $I_{L,p}$  を求めた結果である。図 5.16 より、本研究で用いた MFCM と RFCM による計算結果は、 $Re_{\infty,p}^{(1)} = 0.9, 2.5$  および 5 の粒子に対する場合において、両方法ともに実験結果とよく一致することがわかる。最大の場合でも、誤差が 6%以下である。なお、竹村ら<sup>9)</sup>の実験では、浮上させた粒子が終端速度に達した後、壁面が存在する領域に侵入する条件としている。一方、本計算では、粒子が最初から壁面が存在する領域で初期速度ゼロから出発させて計算を行った。それでも、実験結果とよく一致することは特筆すべきことである。

図 5.17 に  $Re_{\infty,p}^{(1)} = 7.7, 14.2$  および 17.7 の場合における  $L$  から決まる  $Re_{L,p} (= LU_{\infty,p}/\nu)$  に対する  $I_{L,p}$  の値を示す。図 5.16 と同様に、黒色記号は竹村ら<sup>9)</sup>の実験結果、カラーの線は本研究で用いた MFCM と RFCM による計算結果から式(5.6)により  $I_{L,p}$  を求めた結果である。図 5.17 より、本研究で用いた MFCM と RFCM による計算結果は、 $Re_{\infty,p}^{(1)} = 17.7$  の粒子に対する場合において、両方法ともに実験結果とよく一致し、5%以下の誤差であるが、 $Re_{\infty,p}^{(1)} = 7.7$  および 14.2 の粒子の場合は、実験結果と若干にずれしており、ここで実験中用いられる気泡が界面活性剤によって完全に粒子にならないと考えられる。図 5.16 と図 5.17 より、粒子の場合において MFCM による計算結果と RFCM による計算結果はほぼ一致していることがわかった。MFCM と RFCM を用いて気泡の場合と粒子の場合の計算において、気泡の場合に対して、オリジナルの FCM における FM 項と FD 項の力の長さスケール  $\sigma_M$  と  $\sigma_D$  に対する修正は必要である。

気泡の場合と同様に、RFCM の計算結果に基づき、図 5.18 に  $2.5 \leq Re_{\infty,p}^{(1)} \leq 17.7$  の場合に対して、点  $(0, 0, 0.03 - 2R)$  から初期速度ゼロで出発した粒子に対する  $I_{L,p} * Re_{\infty,p}^{(1)}$  の時間変化を示す。なお、式(5.4)より、粒子に働く斥力（横力）は  $I_{L,p} * Re_{\infty,p}^{(1)}$  に比例する量であるため、図 5.18 では  $I_{L,p} * Re_{\infty,p}^{(1)}$  の変化を斥力（横力）の変化として表現している。これから、 $Re_{\infty,p}^{(1)} \geq 5$  に対して、粒子が移動を開始したときに、壁面の影響で斥力（横力）が急激に増加しピークに達した後、緩やかに減衰していく傾向がわかる。ただし、 $Re_{\infty,p}^{(1)} = 2.5$  の場合、その変化が若干緩やかである。気泡の場合と同様に、 $Re_{\infty,p}^{(1)}$  が大きくなるにつれ、斥力（横力）がピーク値に達するのに必要な時間が短く、減衰も速くなることが示されている。一方、 $Re_{\infty,p}^{(1)}$  が小さければ小さいほど粒子に働く斥力（横力）の持続する時間が長くなる傾向がある。

図 5.18 において、図 5.14 と同様のまとめ方法を用いて、図 5.19 に  $Re_{\infty,p}^{(1)}$  に対する  $t^*$  の変化を示す。また、図 5.19 中、 $t^*$  を  $Re_{\infty,p}^{(1)}$  の関数として近似曲線の式は次式のように与える。

$$t^* = 2.55 \left( Re_{\infty,p}^{(1)} \right)^{-1.175} + \left( Re_{\infty,p}^{(1)} \right)^{-2.5}. \quad (5.8)$$



これから、 $Re_{\infty,p}^{(1)}$ が大きくなるにつれて、特に $Re_{\infty,p}^{(1)} > 5$ の場合に、斥力（横力）が減衰するために必要な時間が急激に減少することがわかった。すなわち、高 $Re_{\infty,p}^{(1)}$ の粒子に対しては、斥力（横力）の働く時間が短くなった。

粒子に働く斥力（横力）が発生する原因について、 $Re_{\infty,p}^{(1)} = 5$ の場合に対し、計算結果を利用して検討を行った。図 5.20(a)と(b)に $Re_{\infty,p}^{(1)} = 5$ で点(0, 0, 0.03 - 2R)から初期速度ゼロで出発し、壁面近傍を浮上する粒子の、粒子中心を含む $y = 0$ 面上の2次元流線と圧力分布を示す。これから、気泡の場合における状況と同様に、壁面が存在する場合には、粒子の周囲の渦が $z$ 方向に左右非対称となることがわかる。壁面側の渦は壁面の影響で非常に弱くなるが、反対側の渦はその強さを保っている。このため、粒子周辺の圧力のバランスが破れ、左右に圧力差が生じる。この圧力差により、壁面から遠ざかる方向への斥力（横力）が発生する。さらに、図 5.20(b)において、 $t = 0.5$  sの時には、粒子の壁面側に渦が生成されている様子がわかるが、気泡の場合の同じ時間（図 5.15(e)）より、渦の生成が激しくなる。その原因は、粒子の表面が滑りなしの条件で、粒子まわりの流体の動きが激しいと考えられる。また、粒子の場合でもその渦が時間経過とともにさらに発達していくことより、再び粒子周辺の圧力のバランスが回復し、斥力（横力）は減衰していく。さらに、MFCMとRFCMを用いて、図 5.21に $Re_{\infty,p}^{(1)} = 24.9$ の場合に対して、竹村<sup>7)</sup>の実験結果と計算結果との比較で、図 5.22に $Re_{\infty,p}^{(1)} = 43.8$ の場合に対して、竹村<sup>7)</sup>の実験結果と計算結果との比較である。図 5.21と図 5.22より、MFCMによる計算結果とRFCMによる計算結果はほぼ一致し、 $Re_{\infty,p}^{(1)} = 24.9$ の場合において実験結果と比較における最大の誤差は9%であったが、 $Re_{\infty,p}^{(1)} = 43.8$ の場合において実験結果と比較における最大誤差は30%であった。

以上の結果から、MFCMとRFCMを用いて気泡・粒子を計算する時に、お勧めの適用するレイノルズ数の範囲は、以下の表となる。

計算手法	適用種類	気泡・粒子レイノルズ数における適用範囲
MFCM	球形気泡	$Re_{\infty,b}^{(1)} \leq 7.3$
	球形粒子	$Re_{\infty,p}^{(1)} \leq 24.9$
RFCM	球形気泡	$Re_{\infty,b}^{(1)} \leq 15$
	球形粒子	$Re_{\infty,p}^{(1)} \leq 24.9$

表 5.1 MFCM と RFCM における気泡・粒子の適用範囲。

表 5.1 より、RFCM を用いて球形気泡に対する計算の適用範囲は、 $Re_{\infty,b}^{(1)} \leq 15$  となるが、その以上の場合不明確であるため、次節で RFCM を用いて 2 気泡に対する計算を行い、Katz and Meneveau<sup>11)</sup>の実験結果と比較する。



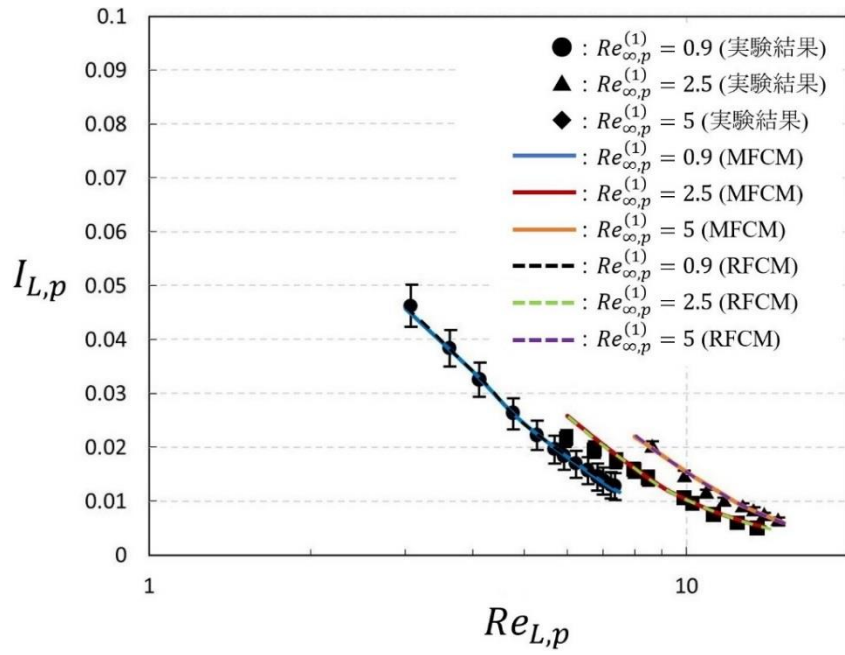


図 5.16  $Re_{\infty,p}^{(1)} = 0.9, 2.5$  および  $5$  の場合の  $Re_{L,p}$  に対する  $I_{L,p}$  の変化.

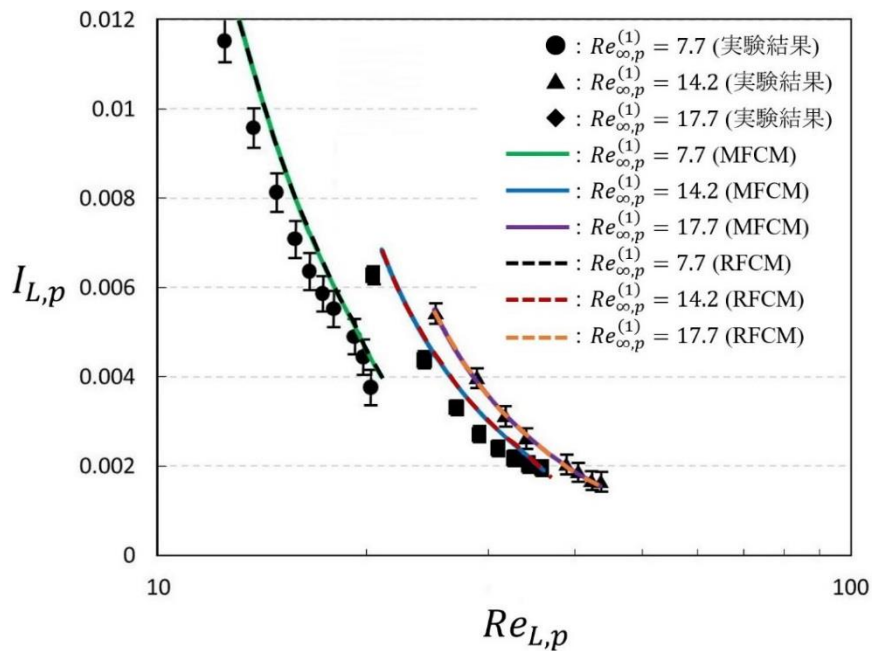


図 5.17  $Re_{\infty,p}^{(1)} = 7.7, 14.2$  および  $17.7$  の場合の  $Re_{L,p}$  に対する  $I_{L,p}$  の変化.

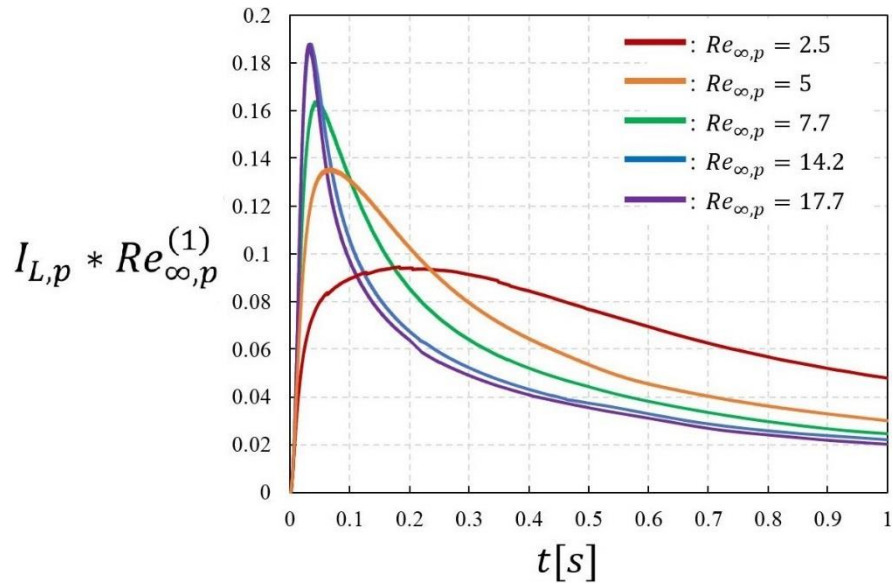


図 5.18 粒子の場合における  $Re_{\infty,p}^{(1)}$  に対する  $I_{L,p} * Re_{\infty,p}^{(1)}$  の時間的変化.

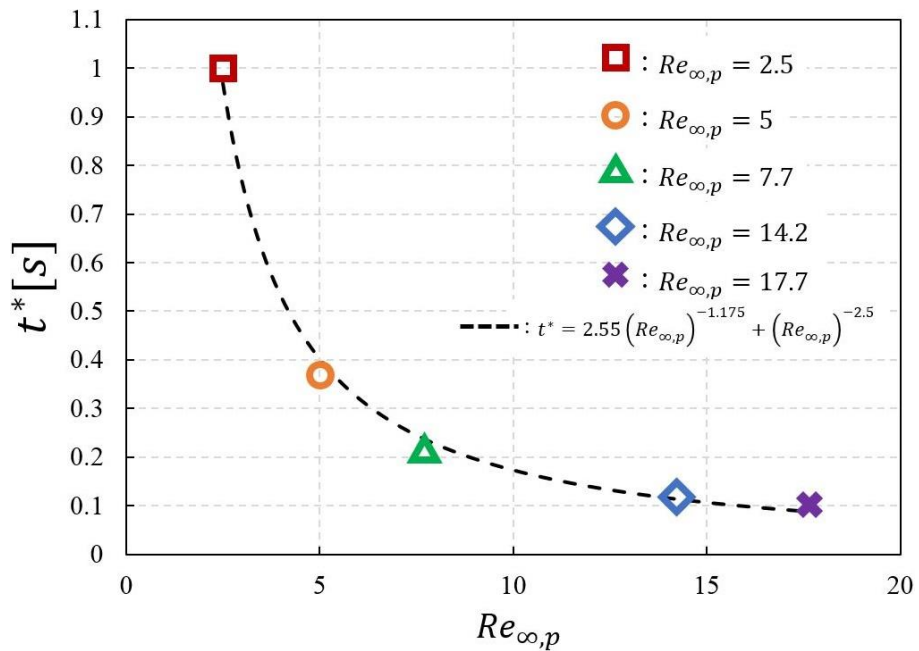
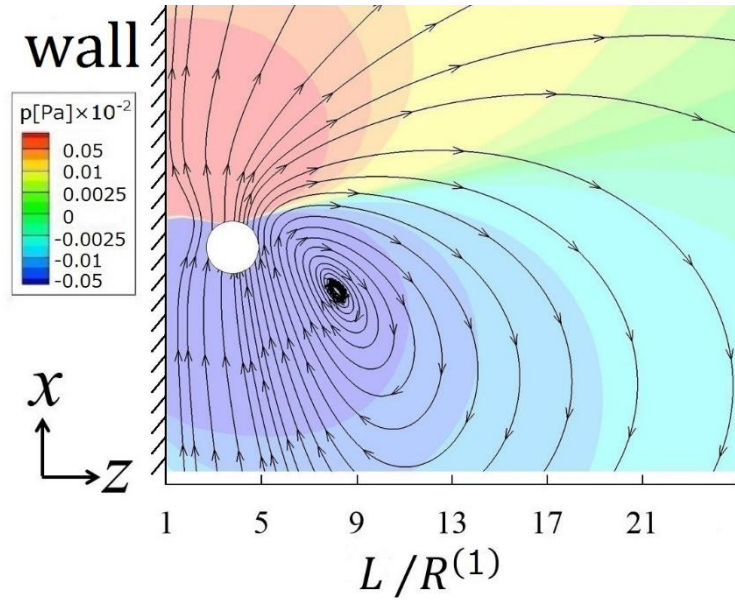
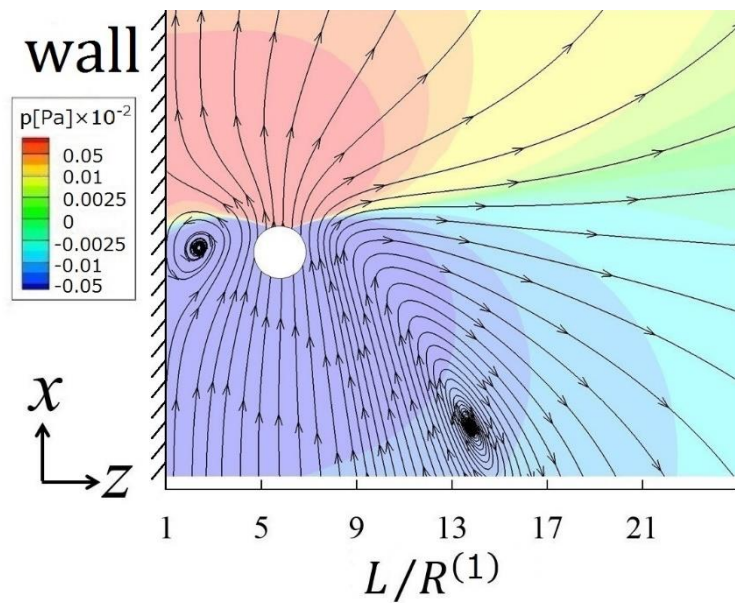


図 5.19 粒子の場合における  $Re_{\infty,p}^{(1)}$  に対する  $t^*$  の変化.



(a)  $t = 0.01$  s.



(b)  $t = 0.5$  s.

図 5.20 (a), (b)壁面が存在する場合,  $Re_{\infty,p}^{(1)} = 5$  の場合における点  $(0, 0, 0.03 - 2R)$  から出発した粒子の  $y = 0$  面上の 2 次元流線と圧力分布の時間変化.

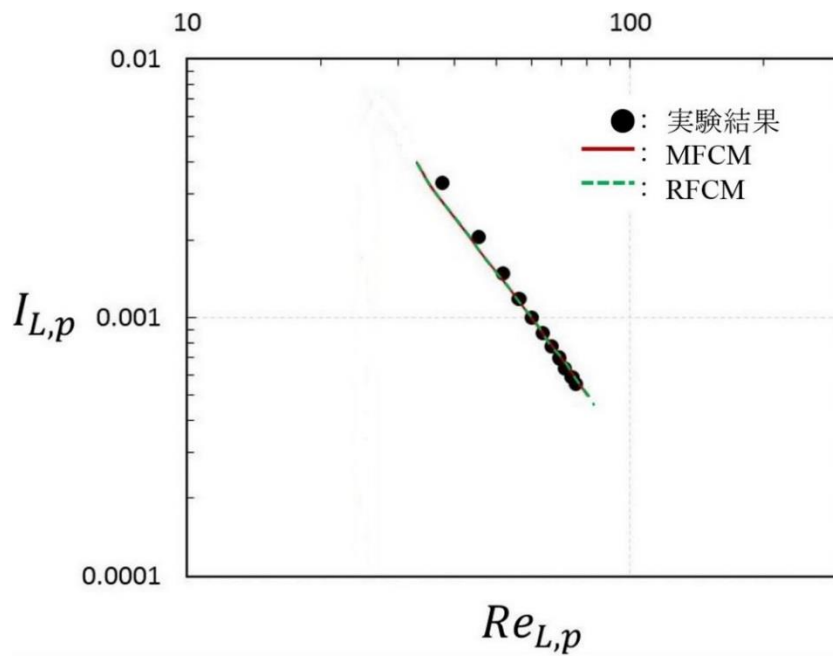


図 5.21  $Re_{\infty,p}^{(1)} = 24.9$  の場合の  $Re_{L,p}$  に対する  $I_{L,p}$  の変化.

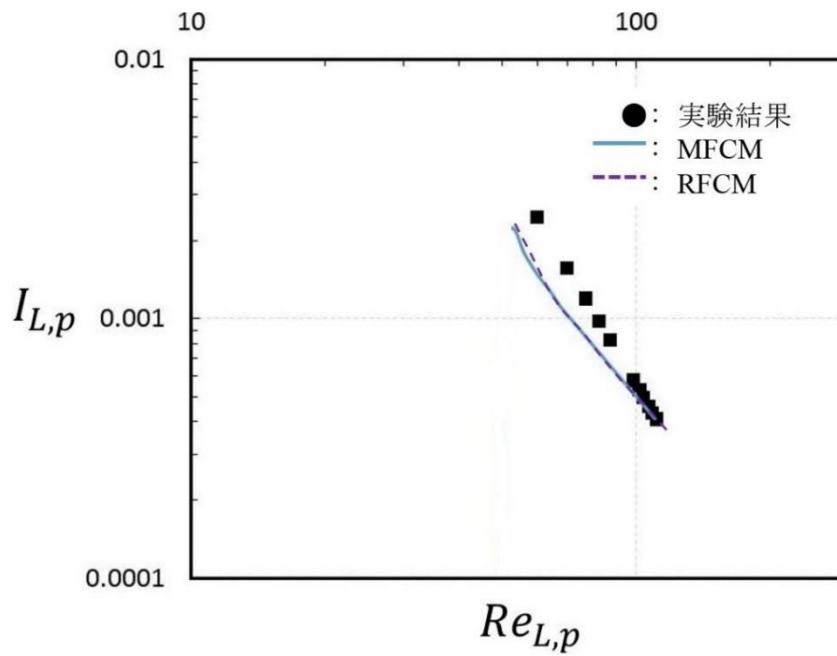


図 5.22  $Re_{\infty,p}^{(1)} = 43.8$  の場合の  $Re_{L,p}$  に対する  $I_{L,p}$  の変化.

### 5.3 無限流体中における2球形気泡の相互作用

本節では、RFCM を用いて、静止流体中において鉛直に上昇する2気泡間の相互作用について Katz and Meneveau<sup>11)</sup>の実験結果と比較することにより、RFCM の気泡レイノルズ数における適用範囲を検討する。この場合、 $N = 2$  とする。図 5.23 に、本節の計算領域において気泡の初期位置を示す。ここで、2気泡が鉛直に上下並んで  $y = z = 0$  とし、2気泡の半径が等しく、 $R^{(1)} = R^{(2)} = R$  とする。下側の気泡中心の初期位置は  $(0, 0, 0)$  とし、上側の気泡中心の初期位置は  $(S_0, 0, 0)$  とする。ここで、 $S_0$  は  $S$  の初期値であり、2気泡間の距離を表し、Katz and Meneveau<sup>11)</sup>の実験値と等しくなるように設定した。なお、2気泡は鉛直方向にのみ移動することとなる。

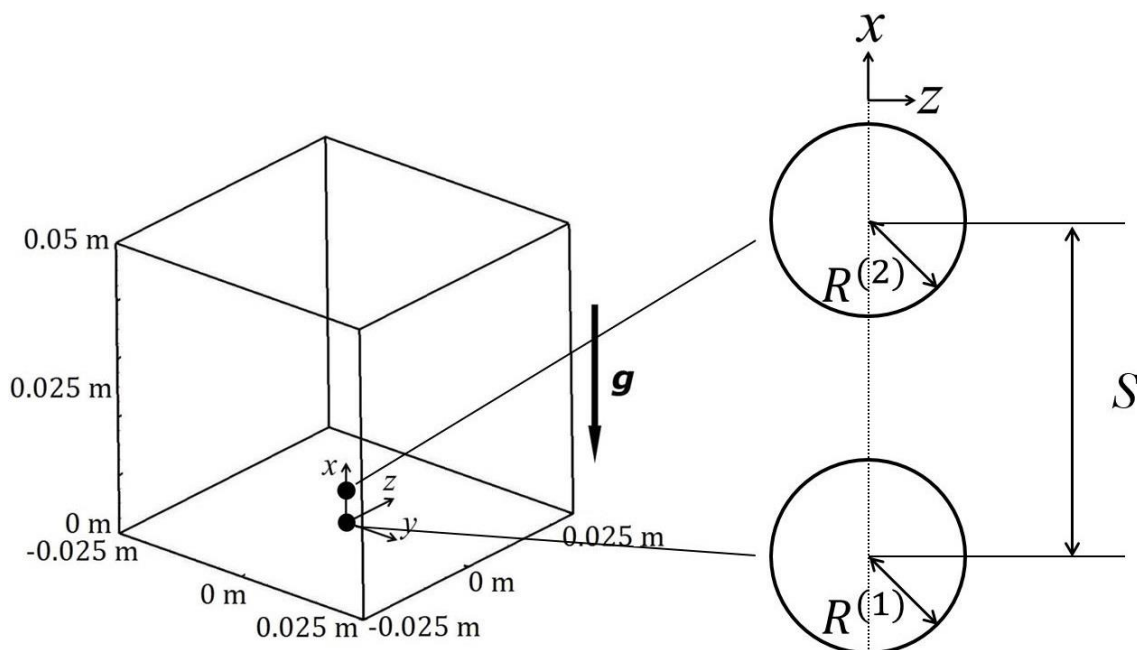
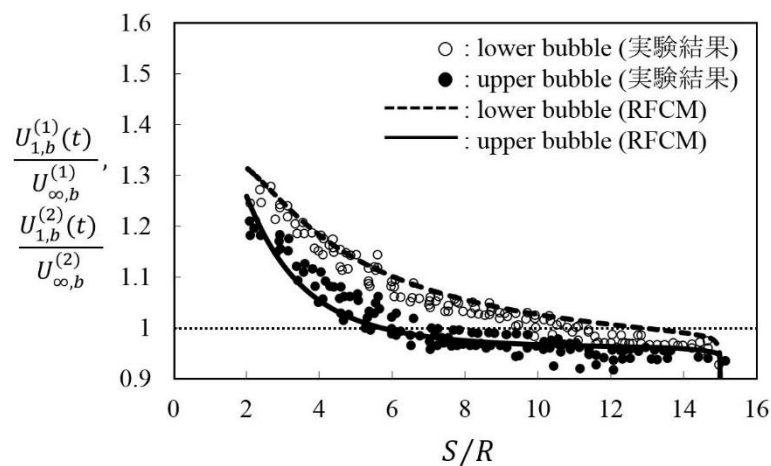


図 5.23 計算領域と気泡の配置.

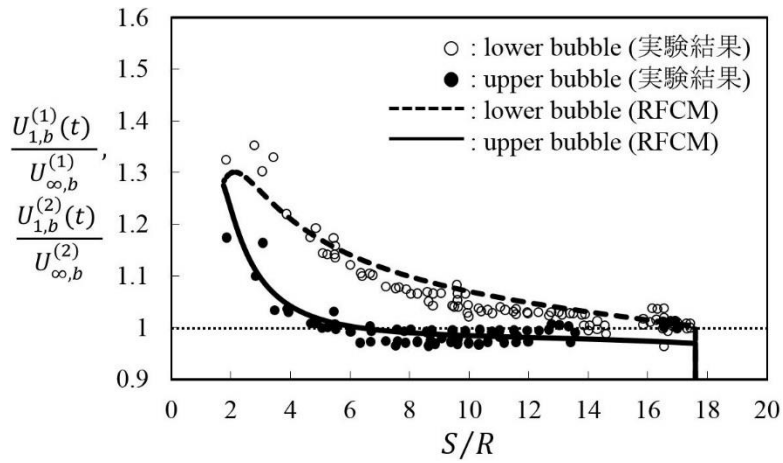
図 5.24(a)~(c)に、 $Re_{\infty,b}^{(1)} = Re_{\infty,b}^{(2)} = 3, 19$  および  $35$  の場合において2気泡の無次元上昇速度  $U_{1,b}^{(1)}(t)/U_{\infty,b}$  および  $U_{1,b}^{(2)}(t)/U_{\infty,b}$  と2気泡間の距離と気泡半径の比の変化を表す。黒い円形および白い円形は Katz and Meneveau<sup>11)</sup>の実験結果における気泡の無次元上昇速度を表す。黒い実線および黒い破線は RFCM により得られた計算結果を表す。図 5.24(a)および(b)より、 $Re_{\infty,b}^{(1)} = Re_{\infty,b}^{(2)} = 3$  および  $19$  の場合において RFCM による計算結果と実験結果とよく一致している。2気泡が存在する場合は、1気泡の場合の上昇終端速度より速くなっており、時間経過とともに、2気泡間の距離が縮んでいくことがわかった。図 5.24(c)より、 $Re_{\infty,b}^{(1)} =$

$Re_{\infty,b}^{(2)} = 35$  の場合は、RFCM による計算結果と実験結果とのずれが生じた。しかしながら、2 気泡が非常に接近していた場合、実験では 2 気泡が合体したが、計算では一定の距離を維持したまま上昇することとなった。2 気泡が互いに非常に接近している場合は RFCM の適用範囲外であると考えられる。

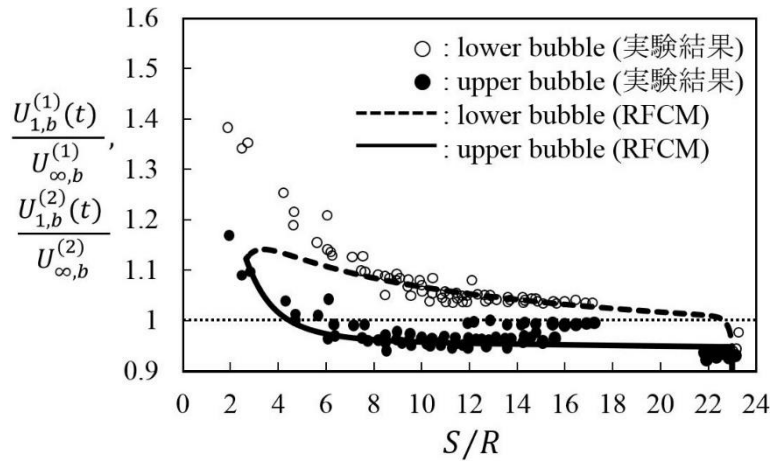
2 気泡が加速される原因および 2 気泡間の距離が短縮する物理的なメカニズムを理解するために、 $Re_{\infty,b}^{(1)} = Re_{\infty,b}^{(2)} = 3$  の場合における 2 気泡間の距離の変化が時間の関数として図 5.25 にプロットされている。さらに、図 5.25 において、 $t = 0.05$  s, 2.3 s および 2.9 s における 2 気泡の状態図を示される。図 5.26(a)に、 $t = 0.05$  s において、左図は 2 気泡の圧力分布とベクトル図を示し、右図は 2 気泡の鉛直方向の速度分布を示す。図 5.26(b)に、図 5.26(a)の左図中の破線部分 ( $y = z = 0$  線上) の圧力分布を示す。図 5.27 と図 5.28 は図 5.26 と同様に、それぞれ  $t = 2.3$  s および 2.9 s における 2 気泡の状態図を示す。図 5.26, 図 5.27 および図 5.28 より、 $t = 0.05$  s の時に 2 気泡の圧力分布と鉛直方向の速度分布は同様であるが、 $t = 2.3$  s の時に後方気泡が前方気泡の伴流域に進入したことにより、後方気泡の前面圧力が減少し始め、加速されることがわかった。 $t = 2.9$  s の時に 2 気泡間の圧力変動が小さくなり、同時に動く傾向があることを示唆している。この場合は、最大上昇速度が  $2U_{\infty,b}$  であると、2 気泡が合体して各気泡の 2 倍の容積を有する単一の球体を形成する場合に実現可能であると考えられる。また、圧力分布において、各泡の前面に山および後面の谷に発生するのが妥当であると考えられ、気泡の境界が配合に明示的に含まれていなくても、ほぼ気泡の境界を示すことができた。さらに、RFCM を用いて球形気泡に対する計算の適用範囲は、 $Re_{\infty,b}^{(1)} \leq 19$  となることが確認できた。



(a)  $Re_{\infty,b}^{(1)} = Re_{\infty,b}^{(2)} = 3$ .



(b)  $Re_{\infty,b}^{(1)} = Re_{\infty,b}^{(2)} = 19$ .



(c)  $Re_{\infty,b}^{(1)} = Re_{\infty,b}^{(2)} = 35$ .

図 5.24  $Re_{\infty,b}^{(1)} = Re_{\infty,b}^{(2)} = 3, 19$  および  $35$  の場合, 2 気泡の無次元上昇速度  $U_{1,b}^{(1)}(t)/U_{\infty,b}$  および  $U_{1,b}^{(2)}(t)/U_{\infty,b}$  と 2 気泡間の距離と気泡半径の比の変化.

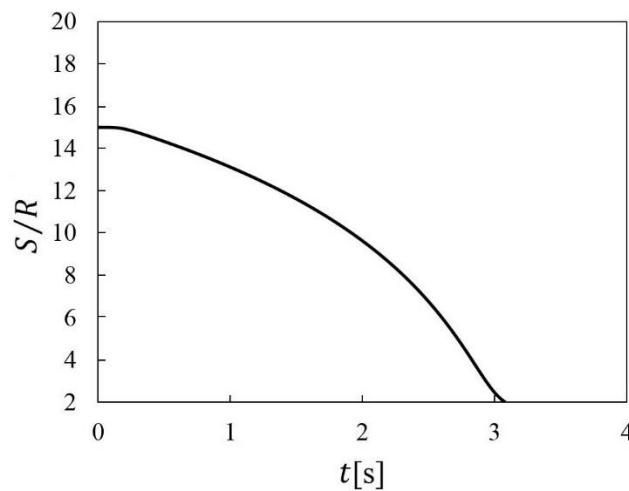
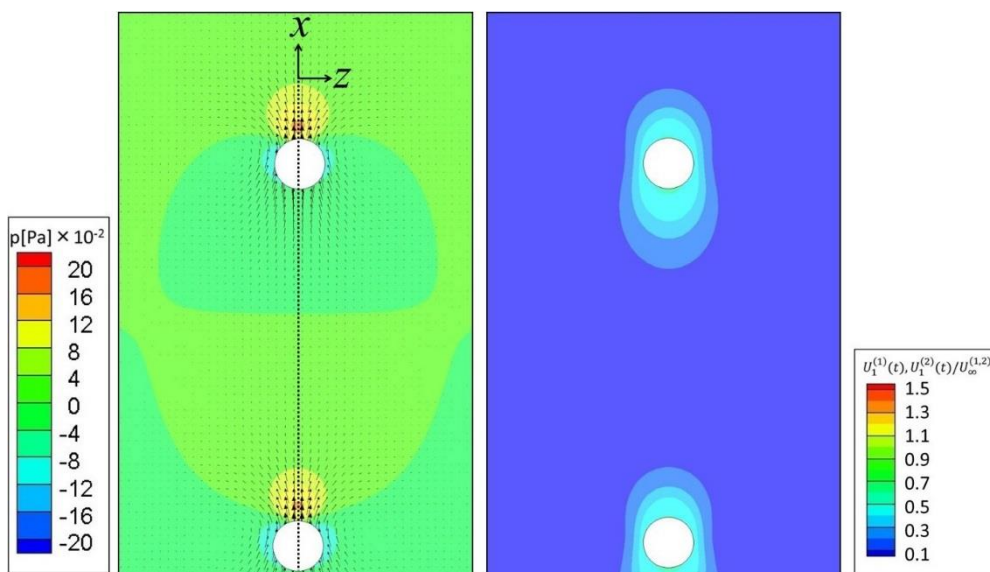
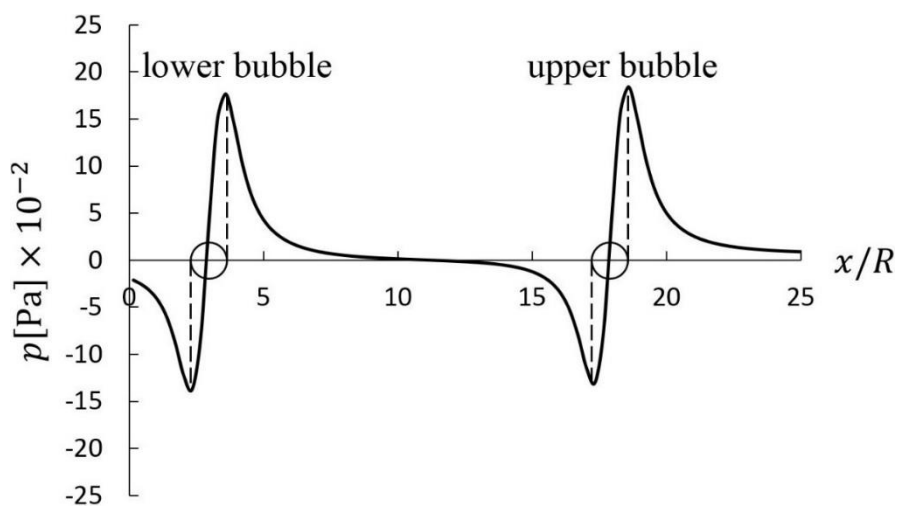


図 5.25  $Re_{\infty,b}^{(1)} = Re_{\infty,b}^{(2)} = 3$  の場合における時間変化による 2 気泡間の距離変化.



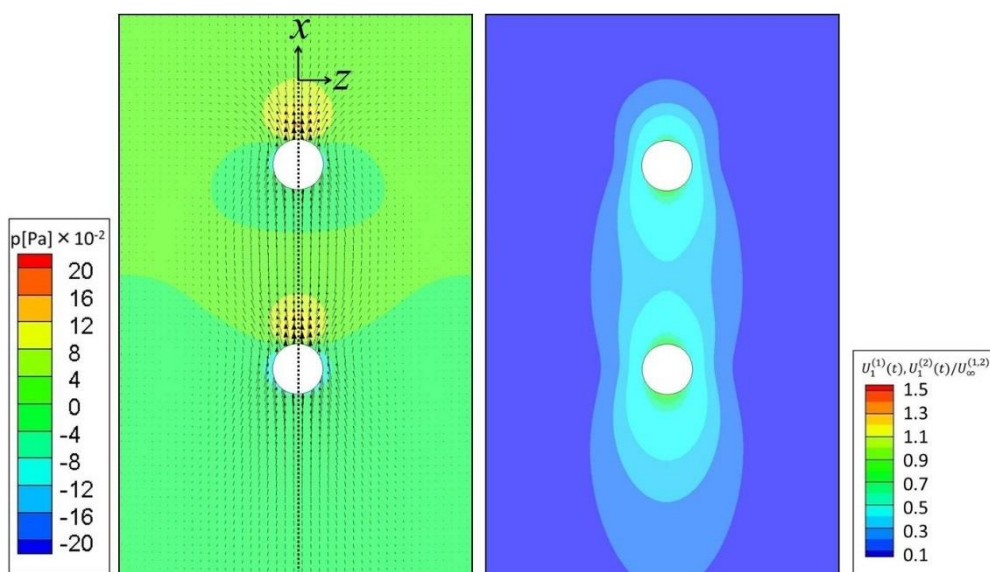
(a) 2 気泡の圧力分布とベクトル図およびの鉛直方向の速度分布.



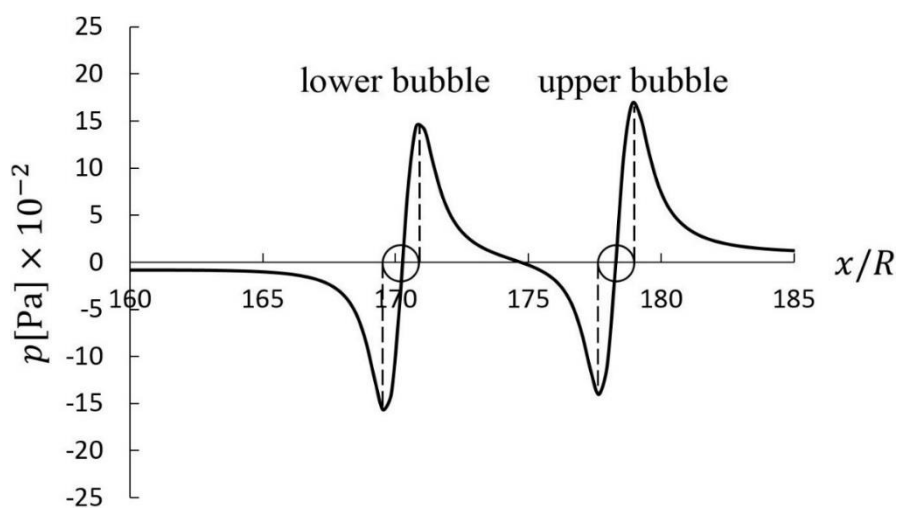
(b)  $y = z = 0$  線上における 2 気泡の圧力分布.

図 5.26  $t = 0.05 \text{ s}$  のときに  $S/R = 15$  における  $Re_{\infty,b}^{(1)} = Re_{\infty,b}^{(2)} = 3$  の 2 気泡状態.



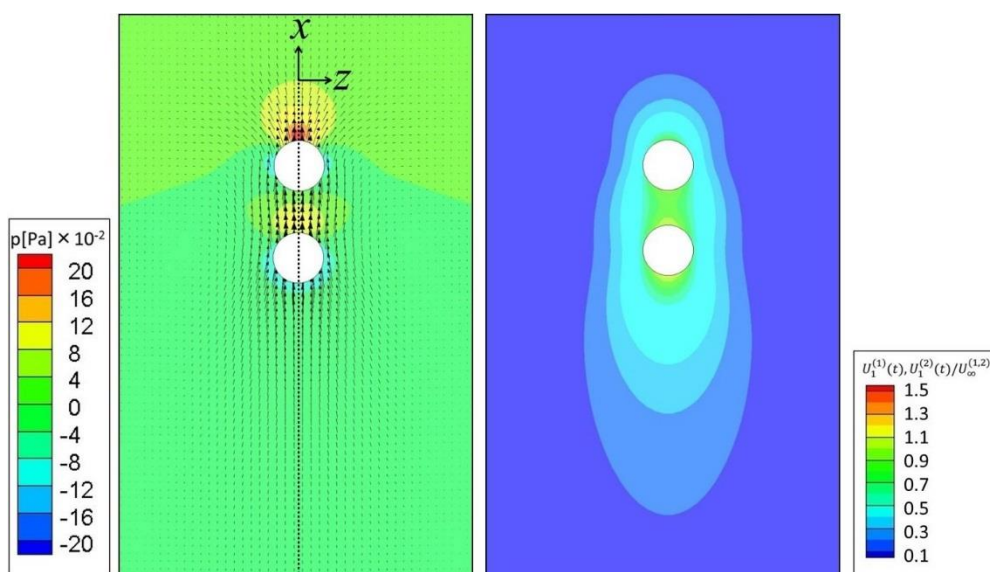


(a) 2気泡の圧力分布とベクトル図および鉛直方向の速度分布.

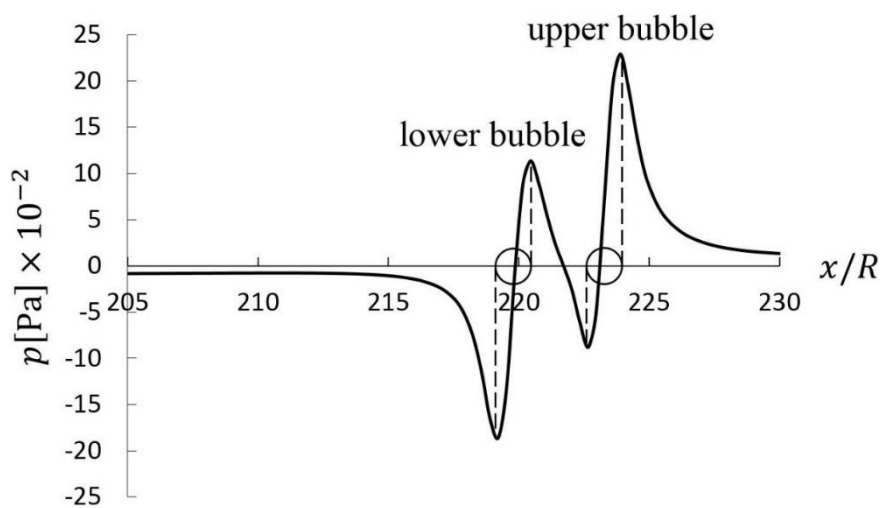


(b)  $y = z = 0$  線上における2気泡の圧力分布.

図 5.27  $t = 2.3 \text{ s}$  のときに  $S/R = 8$  における  $Re_{\infty,b}^{(1)} = Re_{\infty,b}^{(2)} = 3$  の2気泡状態.



(a) 2気泡の圧力分布とベクトル図および鉛直方向の速度分布.



(b)  $y = z = 0$  線上における2気泡の圧力分布.

図 5.28  $t = 2.9 \text{ s}$  のときに  $S/R = 3$  における  $Re_{\infty,b}^{(1)} = Re_{\infty,b}^{(2)} = 3$  の2気泡状態.

## 第5章参考文献

- 1) 竹村文男, 矢部彰, “低レイノルズ数領域における球形気泡の上昇速度”, 日本機械学会論文集 B 編, 第 63 巻 613 号(1997), pp. 2909-2914.
- 2) Clift, R., Grace, J. R. and Weber, M. E., “Bubbles, Drops and Particles”, Academic Press (1978).
- 3) 竹村文男, 高木周, 松本洋一郎, “壁面近傍における球形ガス気泡の上昇速度”, 日本機械学会論文集 B 編, 第 66 巻 648 号(2000) pp. 2087-2094.
- 4) 竹村文男, 高木周, 松本洋一郎, “壁面近傍を上昇する球形ガス気泡に働く揚力”, 日本機械学会論文集 B 編, 第 66 巻 649 号(2000) pp. 2320-2326.
- 5) Takemura, F., Takagi, S., Magnaudet, J. and Matsumoto, Y., “Drag and lift forces on a bubble rising near a vertical wall in a viscous liquid”, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 461 (2002) pp. 277-300.
- 6) 竹村文男, 高木周, 松本洋一郎, “壁近傍を上昇する水中気泡に働く低レイノルズ数域における揚力”, 第 68 巻 670 号(2002) pp. 1684-1690.
- 7) 竹村文男, “壁近傍を上昇する気泡に働く揚力に対する気泡表面状態の影響”, 第 69 巻 682 号(2003) pp. 1327-1332.
- 8) Vasseur, P. and Cox, R. G., “The lateral migration of spherical particle sedimenting in stagnant bounded fluid”, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 80 (1977) pp. 561-591.
- 9) Mei, R., Klausner, J. F. and Lawrence, C. J., “A Note on the History Force on Spherical Bubble at Finite Reynolds Number”, Physics of Fluids, Vol. 6 (1994) pp. 418-420.
- 10) Magnaudet, J., Takagi, S. and Legendre, D., “Drag, deformation and lateral migration of a buoyant drop moving near a wall”, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 476 (2003) pp. 115-157.
- 11) Katz, J. and Meneveau, C., “Wake-induced relative motion of bubbles rising in line”, International Journal of Multiphase Flow, Vol. 22 (1996), pp. 239-258.

## 第6章 RFCM と VOF (Volume of Fluid) 法の計算コストについての検討

### 6.1 VOF 法の基礎

前章より, MFCM は球形気泡レイノルズ数  $Re_{\infty,b}^{(1)} \leq 7.3$  のみの範囲で適用できるが, RFCM はより広い範囲  $Re_{\infty,b}^{(1)} \leq 19$  で適用できることを確認できた. 本章では, 現在に気泡向けの最も用いられる VOF 法を用いて, RFCM の計算コストを検討する.

VOF 法は Hirt and Nichols<sup>1)</sup>によって開発され, セル内における気相は 0 とし, 液相は 1 とする体積比率 (ボイド率)  $\alpha$  (図 1.3) を取る相関数によって相界面の移動を評価する. したがって, VOF 法の場合には相関数が体積比率  $\alpha$  という物理量を表し, 移流方程式は次式のように表される.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (u_i \alpha) = 0. \quad (6.1)$$

ここで, Navier-Stoke 方程式は单相のものと同様にして解かれ, 密度と粘性は気相と液相に分けて, 次のように求められる.

$$\rho = \alpha \rho_l + (1 - \alpha) \rho_g, \quad (6.2)$$

$$\mu = \alpha \mu_l + (1 - \alpha) \mu_g. \quad (6.3)$$

ここで,  $\rho_l$  と  $\rho_g$  はそれぞれ液相と気相の密度を表す.  $\mu_l$  と  $\mu_g$  はそれぞれ液相と気相の粘性を表す. VOF 法は, 数値計算上で質量保存の精度がよいが, 相界面の曲率を精度良く求めるのが困難であるため, Brackbill et al.<sup>2)</sup>の表面張力モデル (CSF モデル) を用いて, 外力項として Navier-Stokes 方程式に加える. 表面張力モデルは, 次式のように与える.

$$\mathbf{f}_{csf} = \sigma \kappa \mathbf{n}. \quad (6.4)$$

ここで,  $\sigma$  は表面張力,  $\kappa$  は曲率,  $\mathbf{n}$  は界面の法線方向ベクトルを表し, 次式のように与える.

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|}, \quad (6.5)$$

$$\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n}. \quad (6.6)$$

移流方程式において，液相と気相の速度を用いて，それぞれ次式のように与える．

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (u_{i,l} \alpha) = 0, \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (u_{i,g} \alpha) = 0. \quad (6.8)$$

相対速度  $u_{i,r}$  を用いて式(6.1)を再定義されると，次式のように与える．

$$u_{i,r} = u_{i,l} - u_{i,g}, \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha u_i) + \nabla \cdot \{(1 - \alpha) \alpha u_{i,r}\} = 0. \quad (6.10)$$

上式は最終的な移流方程式の形であり，上式の第 3 項は実際の物理現象では界面の厚みがないため数値計算のために用いられる仮想的なものである．本論文では流体解析ソフトである OpenFOAM (Open source Field Operation And Manipulation) に実装されている非圧縮性の二相流ソルバである interFoam における VOF 法を用いる<sup>3)</sup>．

非圧縮性流体を対象とした混相流用の interFoam ソルバを使用して界面捕獲法による非定常計算を行う．計算アルゴリズムには SIMPLE 法と PISO 法を組み合わせた PIMPLE 法が使用されている．計算手順は以下に示す<sup>4,5)</sup>．

- 1) 境界条件を設定する．
- 2) 中間の速度場を計算するために離散化された運動量の方程式を解く．
- 3) セルの境界条件における質量流束を計算する．
- 4) 圧力方程式を解き，不足緩和による安定化処理をする．
- 5) セルの境界面における質量流束を修正する．
- 6) 更新された圧力場から速度を修正する．
- 7) 境界条件を更新する．
- 8) 時間ステップを増やして 1)から繰り返す．

## 6.2 計算モデルおよび計算条件

本計算では OpenFOAM における blockMesh を用いる．blockMesh は構造格子であり，3 次元の計算モデルを作成する．blockMesh は OpenFOAM の標準ユーティリティに含まれてい

るプログラムで、モデルをブロックの集合として表現し、それぞれのブロックを格子状のメッシュに分割する。設定はテキストで行う。

図 6.1 に、本節の計算領域において気泡の初期位置を示す。ここで、2 気泡が鉛直に上下並んで  $y = z = 0$  とし、2 気泡の半径が等しく、 $R^{(1)} = R^{(2)} = R$  とする。下側の気泡中心の初期位置は  $(0, 0, 0)$  とし、上側の気泡中心の初期位置は  $(S_0, 0, 0)$  とする。ここで、 $S_0$  は  $S$  の初期値であり、2 気泡間の距離を表す。なお、2 気泡は鉛直方向にのみ移動することとなる。本節での計算は無次元計算で気泡のレイノルズ数に基づくため、各辺の長さ  $x:y:z = 8:1:1$  を取った。数値計算における格子数は、 $x$  方向には  $n_x = 512$  とし、 $y$  方向と  $z$  方向どちらも  $n_y = 64$ ,  $n_z = 64$  とした。ただし、VOF 法における気泡の計算で気泡の直径に当たる格子数は 28 個以下の場合精度が落ち、RFCM における気泡の計算で気泡の直径に当たる格子数は 6 があれば十分であるため、同様に  $512 \times 64 \times 64$  格子数の計算モデルに対する気泡径が計算方法によって異なる。

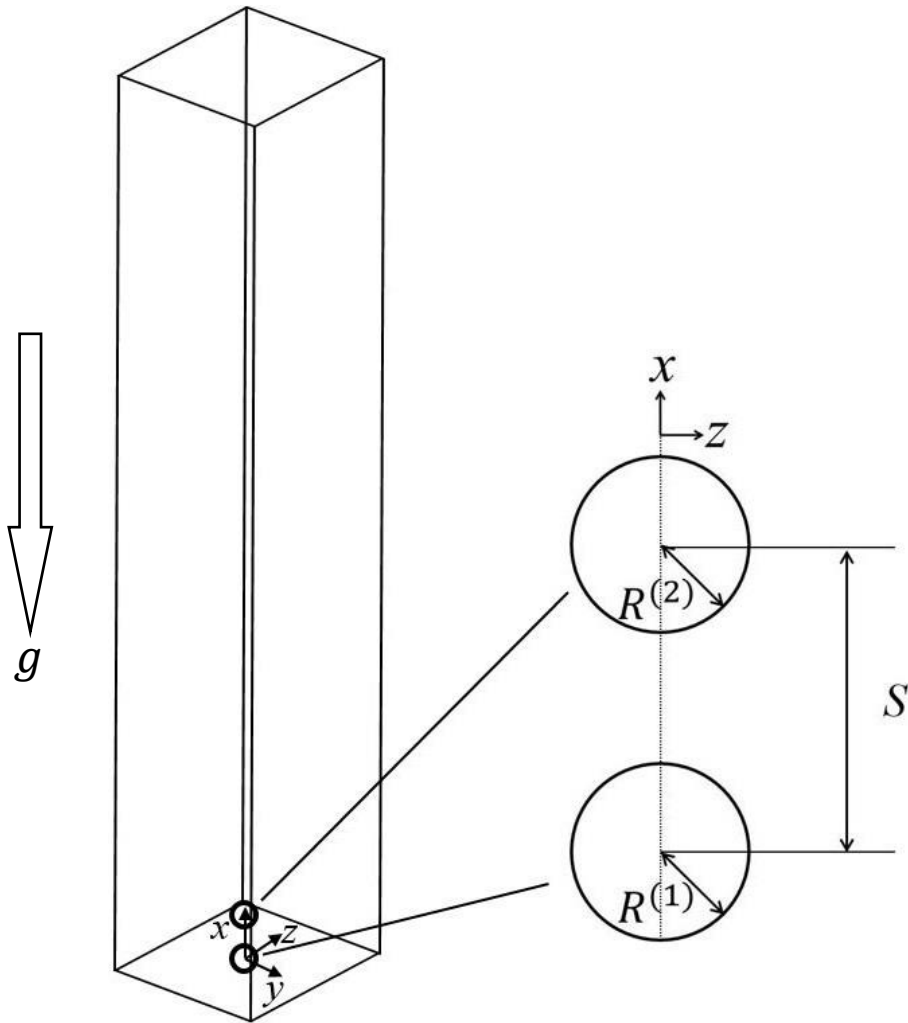


図 6.1 計算領域と気泡の配置.

RFCM と VOF における計算の仮定条件は、以下のようになる。

- 1) 液相は、非圧縮の水とする。気相は、非圧縮の空気とする。
- 2) 気液界面の表面張力は一定とする。
- 3) 気泡の密度は、水の密度の 1/1000 とする。気泡の粘度は、水の粘度に対して無視することができる。
- 4) 上昇する気泡の体積は一定で、球形とする。
- 5) 無限流体中における気泡レイノルズ数  $Re_{\infty,b}^{(1)} = Re_{\infty,b}^{(2)} = 19$  とし、気泡中心間距離と気泡半径との比は 3 とする ( $S_0/R = 3$ )。

計算用 PC の仕様は、以下のようになる。

OS	ubuntu 14.04 LTS
マザーボード	Supermicro X11SAE
チップセット	Intel(R) C236 チップセット
プロセッサ	Intel(R) Core™ i7-6700K (4.0-4.2GHz / 4 コア / 8 スレッド / 8MB キャッシュ)
メモリ	DDR4-2666 16GB×4 (計 64GB)
グラフィック	VESA : GK208 Board-21320014
HDD	2TB HDD / 3.5 インチ Serial-ATA

### 6.3 計算結果との比較および検討

図 6.2 に、RFCM による計算結果と VOF 法による計算結果から得られた時間的に 2 気泡の移動状態図を表す. 左図は RFCM による 2 気泡の位置および圧力分布を表す. 右図は VOF 法による 2 気泡の位置を表し, 赤い領域は液相, 青い領域は気相を意味する. 図では, 気泡の大きさは異なるが, レイノルズ数の無次元数は等しい条件で計算した結果となる. 図 6.2(a) は  $t = 0.01$  s の場合, 図 6.2(b) は  $t = 0.1$  s の場合, 図 6.2(c) は  $t = 0.15$  s の場合を表す. 図 6.3 に, RFCM および VOF 法における時間的に 2 気泡間距離の変化を表す. ● は VOF 法の計算結果を表し, 黒い実線は RFCM の計算結果を表す. 図 6.2 と図 6.3 より, 両方法でも 2 気泡の移動を再現され, 時間的に 2 気泡間距離の変化も大きな差が生じなかったが, 若干の差は両方法での計算における 2 気泡の気泡レイノルズ数が同じであるが, 気泡径の違いによる原因であると考えられる. また, 本節での計算結果は前節の計算結果と異なり, 時間の経過とともに 2 気泡が衝突せずに一定距離を持つままで上昇することとなった. その原因は, 2 気泡間初期距離が短くて, 後方気泡が十分に加速されずに, 後方気泡の上昇に生成された慣性力は液相の粘性力より小さいと考えられる. さらに, 両方法の計算コストについては, 気泡の 3 次元計算に対する計算時間, VOF 法は RFCM の 50 倍となり, 1 個気泡の 3 次元計算における必要なメモリ, VOF 法は RFCM の 100 倍となることがわかった.

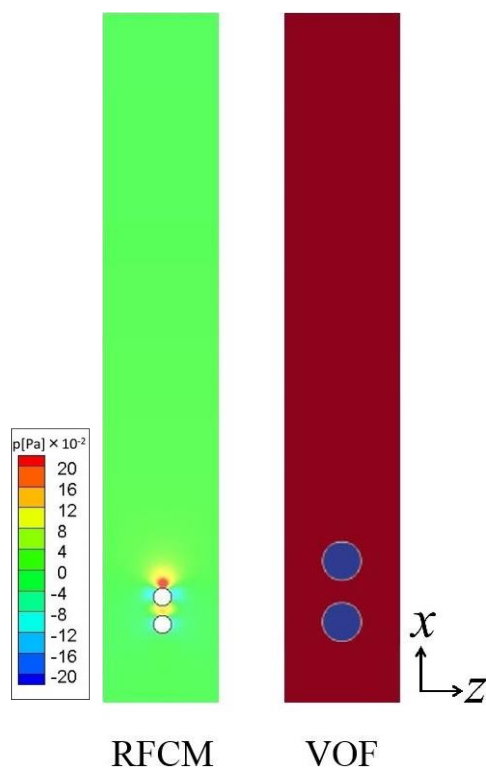


図 6.2(a)  $t = 0.01$  s



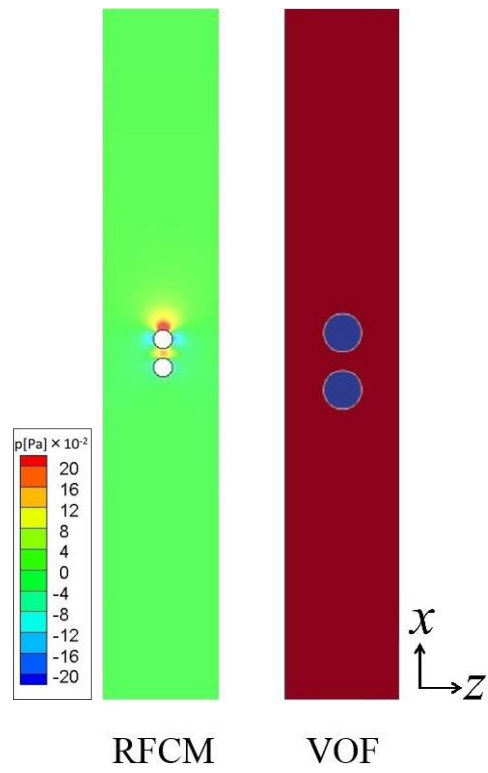


図 6.2(b)  $t = 0.1 \text{ s}$

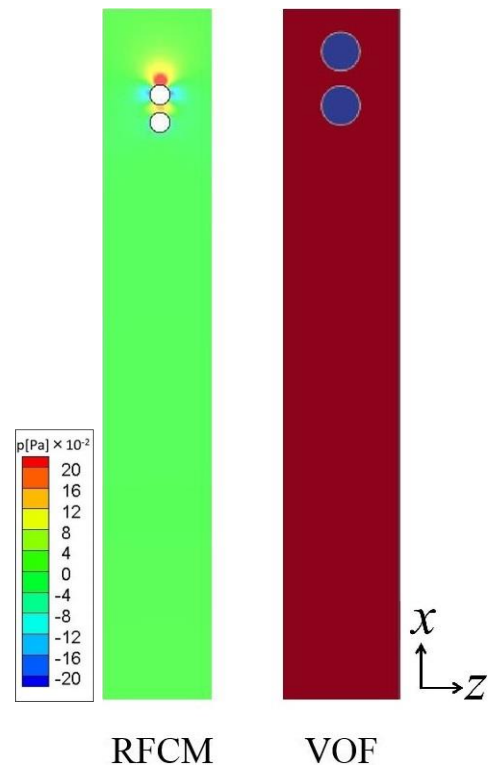


図 6.2(c)  $t = 0.15 \text{ s}$

図 6.2 RFCM と VOF 法による時間的な気泡の上昇位置.

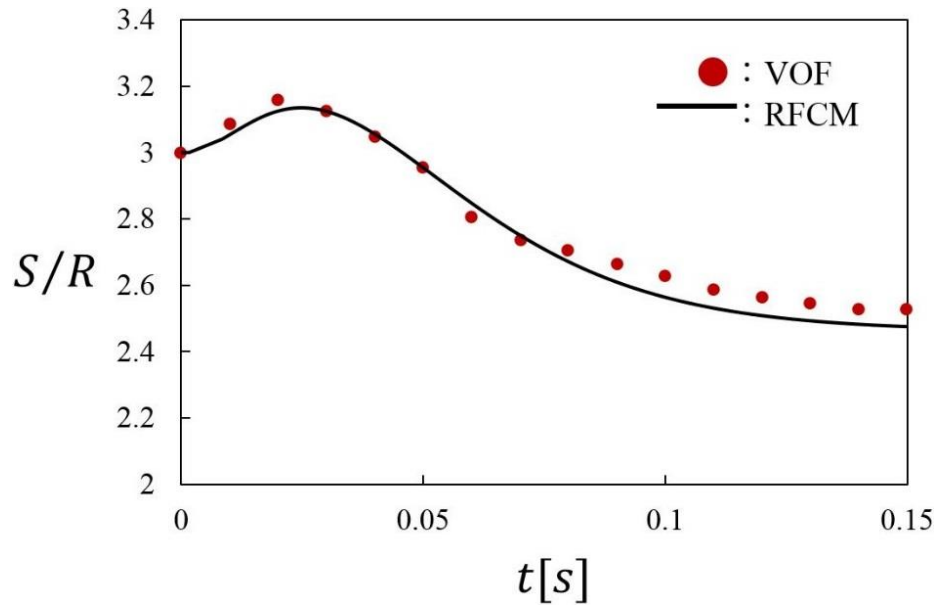


図 6.3 RFCM および VOF における時間的に 2 気泡間距離の変化.

## 第 6 章参考文献

- 1) Hirt, C. W. and Nichols, B. D., “Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries”, Journal of Computational Physics, Vol. 39 (1981), pp. 201-225.
- 2) Brackbill, J. U., Kothe, D.B. and Zemach, C, “A continuum method for modeling surface tension”, Journal of Computational Physics, Vol. 100 (1992), pp. 335-354.
- 3) 山本卓也, “OpenFOAM に実装した S-CLSVOF 法の検証”, OpenCAE 勉強会発表資料 (2013).
- 4) 一般社団法人オープン CAE 学会, “OpenFOAM プログラマズガイド和訳 Version 2.3.0”, (2014).
- 5) 一般社団法人オープン CAE 学会, “OpenFOAM による熱移動と流れの数値解析”, 森北出版(2016).

## 第7章 結 言

本研究は、様々な条件下における多数気泡・粒子を含む流れのシミュレーションを目指して、Maxey ら<sup>1-10)</sup>によって開発された Stokes 領域における球形粒子に適用する計算手法 FCM に基づいて、新たな計算手法 MFCM と RFCM を提案した。主な改良点は、①Stokes 近似あるいは Oseen 近似から外れた一般粘性流体（例えば、水）での球形粒子への解析ができるようになった。②球形気泡に適用できるようになった。③一般粘性流体での球形気泡への解析ができるようになった。さらに、それらの手法の妥当性に対する検討を行った。

本研究全体を通じて得られた知見は、次のようになる。

第1章では、自然現象や工業装置などにおいて、気液・固液二相流の頻繁性およびそれに対する数値計算手法の重要性、さらに既存の数値計算手法の紹介を述べたとともに、本研究の必要性と目的についての概要を述べた。

第2章では、無限静止流体中における単一気泡・粒子に働く各種の力についてまとめたとともに、2.3.1 節で壁面の影響で生じた気泡・粒子に働く抵抗力の増加量の数学モデルを理論解析によって導出し、2.3.2 節でその数学モデルを用いて気泡・粒子が壁面からの影響に対する検討を理論解析によって行った。

第3章では、3.1 節で FCM の基礎方程式を述べた。3.2 節で FCM の基礎方程式における離散化方法を述べたとともに、気泡・粒子が球形を保持するため、FCM の FD 項における気泡・粒子内のひずみ速度がゼロとなるような反復計算を再正規化し、全体の計算速度が約 2.5 倍速く実現できた。3.3.1 節で気泡・粒子に働く Stokes 抵抗に低次の補正項を加えることにより、Stokeslet の補正ができると仮定する観点から、FCM における気泡・粒子から流体に作用する力の式(3.6)の代わりに、気泡の場合は式(3.53)を用いて、粒子の場合は式(3.56)を用いる MFCM を提案した。3.3.2 節で球形気泡・粒子の中心を点源として周りの流れに作用する視点に立ち、その作用力の分布を考慮する FM 項と FD 項の力の影響範囲に対して、平滑化デルタ関数  $\Delta_M$  と  $\Delta_D$  中のそれぞれの力長さスケールを表す  $\sigma_M$  と  $\sigma_D$  に対して、気泡の Stokes 近似の理論解と近くなるように定めて、気泡・粒子の半径  $R$  を用いて、粒子の場合は、 $\sigma_M = R/\sqrt{\pi}$ 、 $\sigma_D = R/(6\sqrt{\pi})^{1/3}$  を、気泡の場合は、 $\sigma_M = R/\sqrt{1.88\pi}$ 、 $\sigma_D = R/(3\sqrt{\pi})^{1/3}$  を用いる RFCM を提案した。

第4章では、FCM の外力項を含めた Navier-Stokes 方程式の解法を述べたとともに、本研究で用いた計算格子を説明し、計算モデルにおける周期境界条件のある  $x$  方向にのみ 4 点差分に対応したフーリエ変換を行う空間離散化の方法を述べた。

第5章では、MFCM と RFCM の計算結果の正確さに関する検討を行った。多数気泡・粒子を含む流れを解析への第一歩として、MFCM と RFCM 両手法を用いて、5.1 節で無限流体中における単一球形気泡・粒子への解析を行い、気泡の場合は竹村と矢部<sup>11)</sup>の実験結果と、粒子の場合は Clift et al.<sup>12)</sup>の式による理論解との比較を行い、5.2 節で壁面近傍を上昇する単一球形気泡・粒子への解析を行い、球形気泡の場合は竹村ら<sup>13,14)</sup>の実験結果と、球形粒

子の場合は竹村ら<sup>15,16)</sup>の実験結果との比較を行い、5.3節で RFCM のみを用いて静止流体中において鉛直に上昇する2球形気泡間の相互作用について Katz and Meneveau<sup>17)</sup>の実験結果との比較を行ったことにより、MFCM と RFCM を用いて球形気泡・粒子を計算する時に、お勧めの適用するレイノルズ数の範囲は、以下の表にまとめた。

計算手法	適用種類	気泡・粒子レイノルズ数における適用範囲
MFCM	球形気泡	$0 < Re_{\infty,b}^{(1)} \leq 7.3$
	球形粒子	$0 < Re_{\infty,p}^{(1)} \leq 24.9$
RFCM	球形気泡	$0 < Re_{\infty,b}^{(1)} \leq 19$
	球形粒子	$0 < Re_{\infty,p}^{(1)} \leq 24.9$

表 7.1 MFCM と RFCM における球形気泡・粒子の適用範囲。

さらに、単一球形気泡・粒子が壁面近傍を上昇する場合、壁面を向いている方向に圧力勾配が生じ、水平方向の斥力（横力）を生み出す物理的メカニズムは本研究で用いた MFCM と RFCM による計算結果から、気泡・粒子周りの圧力分布を求めることができ、そのメカニズムの定量的な再現が可能となった。また、静止流体中において鉛直に上昇する2球形気泡間の相互作用によって加速される原因および2気泡間の距離が変化する物理的なメカニズムを再現することができた。

第6章では、現在の工業などに気泡向けの最も用いられる VOF 法<sup>18)</sup>を用いて、RFCM の計算コストを検討した。計算コストについては、気泡の3次元計算に対する計算時間、VOF 法は RFCM の50倍となり、1個気泡の3次元計算における必要なメモリ、VOF 法は RFCM の100倍となることがわかった。

## 第7章参考文献

- 1) Maxey, M. R. and Patel, B. K., “Localized force representations for particles sedimenting in Stokes flow”, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 27 (2001), pp. 1603–1626.
- 2) Xu, J., Maxey, M. R. and Karniadakis, G. E., “Numerical simulation of turbulent drag reduction using micro-bubbles”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 468 (2002), pp. 271-281.
- 3) Lomholt, S., Stenum, B. and Maxey, M. R., “Experimental verification of the force coupling method for particulate flows”, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 28 (2002), pp. 225-246.
- 4) Lomholt, S., and Maxey, M. R., “Force-coupling method for particulate two-phase flow: Stokes flow”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 184 (2003), pp. 381-405.
- 5) Dance, S. L. and Maxey, M. R., “Incorporation of lubrication effects into the force-coupling method for particulate two-phase flow”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 189 (2003), pp. 212-238.
- 6) Climent, E. and Maxey, M. R., “Numerical simulations of random suspensions at finite Reynolds numbers”, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 29 (2003), pp. 579-601.
- 7) Yeo, K. and Maxey, M. R., “Dynamics of concentrated suspensions of non-colloidal particles in Couette flow”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 649 (2010), pp. 205-231.
- 8) Yeo, K. and Maxey, M. R., “Simulation of concentrated suspensions using the force-coupling method”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 229 (2010), pp. 2401–2421.
- 9) Yeo, K. and Maxey, M. R., “Numerical simulations of concentrated suspensions of monodisperse particles in a Poiseuille flow”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 682 (2011), pp. 491-518.
- 10) Yeo, K. and Maxey, M. R., “Dynamics and rheology of concentrated, finite-Reynolds-number suspensions in a homogeneous shear flow”, *Physics of fluids*, Vol. 25 (2013), pp. 053303-1-053303-24.
- 11) 竹村文男, 矢部彰, “低レイノルズ数領域における球形気泡の上昇速度”, *日本機械学会論文集 B 編*, 第 63 卷 613 号(1997), pp. 2909-2914.
- 12) Clift, R., Grace, J. R. and Weber, M. E., “*Bubbles, Drops and Particles*”, Academic Press (1978).
- 13) 竹村文男, 高木周, 松本洋一郎, “壁面近傍における球形ガス気泡の上昇速度”, *日本機械学会論文集 B 編*, 第 66 卷 648 号(2000) pp. 2087-2094.
- 14) 竹村文男, 高木周, 松本洋一郎, “壁面近傍を上昇する球形ガス気泡に働く揚力”, *日本機械学会論文集 B 編*, 第 66 卷 649 号(2000) pp. 2320-2326.
- 15) 竹村文男, 高木周, 松本洋一郎, “壁近傍を上昇する水中気泡に働く低レイノルズ数域における揚力”, 第 68 卷 670 号(2002) pp. 1684-1690.
- 16) 竹村文男, “壁近傍を上昇する気泡に働く揚力に対する気泡表面状態の影響”, 第 69 卷 682 号(2003) pp. 1327-1332.

- 17) Katz, J. and Meneveau, C., "Wake-induced relative motion of bubbles rising in line", *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 22 (1996), pp. 239-258.
- 18) Hirt, C. W. and Nichols, B. D., "Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries", *Journal of Computational Physics*, Vol. 39 (1981), pp. 201-225.

## 謝辞

本研究を進めるにあたり、岡山大学大学院自然科学研究科 柳瀬眞一郎教授には、研究に関するご教示を賜るとともに、多方面からの暖かいご指導、ご鞭撻をいただきました。研究に行き詰まった一時期には、研究テーマの検討に始まり、研究者として未成熟であった私を一から詳細な点までご指導をいただきました。特に、留学生である私の言葉表現力と文章力の不足に対して、常に丁寧にご指導いただきました。さらに、厳しい留学生活においても、優しく暖かいご支援をいただきました。私が異国で研究の道を歩む中での大きな心の支えであり、日本人の勤勉さや真面目の精神を学びました。重ねて柳瀬教授に敬意を表します。

岡山大学大学院自然科学研究科 河内俊憲准教授には、私が岡山大学大学院に入学して、左も右もわからず時期から、実験に数値計算に研究室生活にと様々な場合で大変お世話になりました、心より深く感謝致します。

岡山大学大学院自然科学研究科 永田靖典助教には、数値計算及び実験に対しても、たくさんの助言をいただきました。また、研究のみならず研究室生活においても大変お世話になりましたことを心より深く感謝致します。

岡山理科大学 松浦宏治先生には、ご多忙中に、実験に関して貴重なコメントと助言をいただきました。研究についても相談に乗っていただいたお陰で、研究に対する熱意を持ち続けられましたことを心より深く感謝致します。

京都繊維工芸大学 田中満先生には、ご多忙中に、遠く京都から岡山大学にご来校いただき、研究上の特に数値計算のプログラムの修正について、たくさんの助言をいただきましたことを心より深く感謝致します。

岡山大学流体力学研究室の先輩や後輩にも大変お世話になりました。皆様を素晴らしい議論や意見交換をさせていただいたことに本当に感謝致します。皆様の研究への真摯な姿勢からも多くを学び、そのお陰で研究を進めてこられました。私の留学生活に大きな心の支えとなり、研究や生活の悩みの相談に乗っていただき、心強かったです。心より深く感謝致します。

最後に、生まれてここまで子としてあたたかく見守り続けてくれた父および母に深く感謝し、この学位論文を捧げます。