

氏名	應谷 洋二
授与した学位	博士
専攻分野の名称	学術
学位授与番号	博甲第5230号
学位授与の日付	平成27年 9月30日
学位授与の要件	環境学研究科 生命環境学専攻 (学位規則第5条第1項該当)
学位論文の題目	Lyapunov Functionals for Virus-Immune Models with Infinite Delay - One-strain and Multistrain Models (無限の遅れを持つウイルス免疫モデル(単一株モデルおよび複数株モデル)のリアプノフ汎関数)
論文審査委員	教授 梶原 毅 教授 水藤 寛 准教授 佐々木 徹

学位論文内容の要旨

本論文では、遅れのある微分方程式の解の漸近的な挙動についての研究を行なった。微分方程式の平衡点の大域安定性を議論する際において、リアプノフ関数およびリアプノフ汎関数は非常に有用である。多くの論文において、リアプノフ汎関数が定義され、その導関数の非正性の証明に様々な手法が述べられている。遅れのある微分方程式については、McCluskey がリアプノフ汎関数の構成に有用な積分項を示した。また、梶原らによる相加相乗平均不等式の拡張がリアプノフ汎関数の導関数の非正性の証明に重要な役割を果たす。これらを含めて様々な手法により、平衡点の大域安定性の研究が進展してきた。しかし、いまだ、リアプノフ汎関数の一般的な構成方法は知られていない。

本論文においては、いくつかの生体内感染症ダイナミクスに関する遅れのある微分方程式を題材として、リアプノフ汎関数の系統的な構成方法を示し、平衡点の安定性について解析した。単純な単一株モデルから出発して、最終的には複雑な複数株モデルについて解析を行なった。そこにおいて、リアプノフ汎関数を、比較的簡潔で系統的に構成することができた。リアプノフ汎関数が矛盾なく定義できることおよび平衡点の大域的な吸引性の確認においては、無限の遅れを扱っているため、数学的にいくつかの困難な課題が生じるが、それらについての厳密な証明を与えることができた。

本論文の内容は以下の通りである。まず、簡単な吸収効果のあるモデルを示して、基本的な記号や定義を与える。次に、いくつかの単一株モデルについて、単純なモデルから複雑なモデルへと、平衡点の挙動を、系統的に構成されたリアプノフ汎関数を用いて議論していく。これらは、引き続き解析を行う複数株モデルのための準備となる。最後に、複数株モデルとして、免疫変数を持たないモデルと、免疫変数を持つモデルの2つを取り上げる。それらの平衡点の大域安定性について、単一株での結果を踏まえたリアプノフ汎関数の構成を行ない、それらの解析により、免疫変数を持たないモデルにおいては競争排除の原理が成り立つことや、免疫変数を含むモデルにおいてはウイルス株の共存が成立することについて、数学的に厳密な証明を行なった。

論文審査結果の要旨

体内における病原体の感染動態において、時間遅れの及ぼす効果、および病原体における複数株存在の影響は重要である。体内の感染動態についてのこれまでの先行研究を受け、本論文では、体内における病原体の感染を記述した無限時間遅れ微分方程式の解の漸近挙動についての研究を行った。解の平衡点の安定性を記述するためには、Lyapunov 汎関数を利用する方法が有力であるが、Lyapunov 汎関数の一般的な構成法は知られておらず、Lyapunov 汎関数の系統的な構成には大きな利点がある。また、時間遅れを無限にすると、様々な数学的問題が発生する。

本論文においては、病原体と細胞のモデルに対して Lyapunov 汎関数を構成し、それを出発点として免疫変数を追加したモデル、複数株の病原体と細胞のモデル、複数株の病原体と細胞のモデルに免疫変数を追加したモデルに対して系統的に Lyapunov 汎関数の構成を行った。また本論文で考察している無限時間遅れの微分方程式においては、時間遅れを含まない場合と違いさまざまな数学的な問題を処理する必要がある。方程式に対して適切な解空間の設定を行い、また正値性、種々の有界性を証明した。さらに、安定性解析の鍵となる asymptotic smooth 性を示した。積分形の汎関数に解を代入するために、基礎再生産数が 1 より大きい場合に系が一様強 persistent であることを証明した。最終的に適切な解集合に対して Lyapunov 汎関数を定義して時間微分が非正になることを示し、平衡点が大域安定になることを厳密に証明した。複数株モデルは技術的に困難があるが、株数についての数学的帰納法を用いて処理している。

本論文は、免疫変数を含む複数株の相互作用を記述する無限時間遅れ方程式などの複雑な方程式に対して、系統的で見通しのよい Lyapunov 汎関数の構成法を与えており、独創的な研究である。また、時間遅れを無限にしたことによって生じる多くの困難な数学的問題を解決している。

以上により、本論文は博士（学術）に値するものである。