博 士 論 文

同変実射影空間の標準直線束の研究
(Study of The Canonical Line Bundles of Equivariant Real Projective Spaces)

平成２６年１月

祁　艶

岡山大学大学院
自然科学研究科

目次

1　主結果と論文の構成

空間 B の各点にベクトル空間を付随させ, そのベクトル空間の集まりを B 上のベクトル束と呼び，空間 B を調べる上でベクトル束は重要な道具である．ベクトル束として良く知られているものに直積束，多様体の接束, 実射影空間の標準直線束などがあります．ベクトル束の応用例として, 実射影空間上の接束の非自明性を調べ, $\mathbb{R}$ 上の有限次元の多元体で体となるものの次元は 2 冪であることを示したものが有名である．また実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ 上の接束 $T(\mathbb{R}P^n)$, 標準直線束 $\gamma_{\mathbb{R}P^n}$ および直積束 $\varepsilon_{\mathbb{R}P^n}(V)$, $\varepsilon_{\mathbb{R}P^n}(\mathbb{R})$ について,

$$T(\mathbb{R}P^n) \oplus \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}(\mathbb{R}) = \gamma_{\mathbb{R}P^n} \otimes \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}(V)$$

である．

G を有限群とする．コンパクト Hausdorff 空間 X に対して, $Vect_G(X)$ を底空間を X とする G-ベクトル束の同型類のなす集合とする．また $F(Vect_G(X))$ は $Vect_G(X)$ を基底に持つ $\mathbb{Z}$-自由加群とする．このとき, X の同変 K-群と呼ばれる $KO_G(X)$ は次のように定義される．

$$KO_G(X) = F(Vect_G(X))/(\zeta \oplus \eta - \zeta - \eta).$$

ここで, $(\zeta \oplus \eta - \zeta - \eta)$ は $\zeta \oplus \eta - \zeta - \eta$ で生成される $F(Vect_G(X))$ の部分群であり, ζ, η は $Vect_G(X)$ 全体を渡る．また, $RO(G)$ を G の実表現環とし, x_0 を 1 点からなる G-空間とすると, 自然な準同型写像

$$i^* : KO_G(X) \to KO_G(x_0) = RO(G)$$

を得る．この i^* の定める群

$$\widetilde{KO}_G(X) = \mathrm{Ker}(i^*)$$

を X の簡約同変 K-群という．

$\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ をそれぞれ実数体と複素数体とし, $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{C}^n$ をそれぞれ n-次元実また複素ベクトル空間とする．γ_n は n-次元実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ 上の標準直線束を表し, γ_n の全空間 $E(\gamma_n)$ は定義により,

$$\{(\{\pm x\}, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S^n, v \in \mathbb{R} \cdot x\}$$

である．ここで, S^n は $\mathbb{R}^{n+1}$ の単位球面である．自然に包含関係

$$E(\gamma_0) \subset E(\gamma_1) \subset E(\gamma_2) \subset \cdots$$

が得られる．更に $E(\gamma_1)$ は境界を持たないメビウスの帯と同相であるが, $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}$ とは同相でないから, $n \geq 1$ に対して, γ_n は自明なベクトル束ではない．群の作用を考えない時, [8, Proposition 3.12] により, 簡約 K-群 $\widetilde{KO}(\mathbb{R}P^n)$ は位数が 2^h の巡回群 $\mathbb{Z}_{2^h}$ と同型である．ここで,

$$h = \sharp\{s \in \mathbb{Z} \mid 0 < s \leq n,\ s \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 4 \mod 8\}$$

である．また, $\widetilde{KO}(\mathbb{R}P^n)$ の生成元 ξ は $\xi = [\gamma_n] - [\varepsilon^1]$ である．ここで ε^1 は $\mathbb{R}P^n$ 上の自明な直線束を表す．更に, 生成元 ξ は関係式

$$\xi^2 = -2\xi,\ \ \xi^{h+1} = 0$$

を満たす.

以後 G を有限群とし, G の滑らかな群作用から得られる実射影空間について考える．U を有限次元の実 G-加群とする．$S(U)$ は U の G-不変な内積に関する単位球面を表し, $P(U)$ は同変実射影空間 $S(U)/\{\pm 1\}$ を表す．すると, $M = P(U)$ 上の標準直線束 γ_M において, 点 $\{\pm x\} \in P(U)$ におけるファイバー $F_{\{\pm x\}}$ は x を通る 1-次元実ベクトル空間である．ここで x は $S(U)$ の元である．また G-空間 N と実また複素 G-加群 V に対して, $\varepsilon_N(V)$ を N 上のファイバーが V である直積束とする．実 (また複素) ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ は自明な G-作用を持つとする．このとき次の定理が得られる.

定理 1.1. G を巡回群, V を偶数位数の自明ではない実 G-加群とし, G は V に原点以外に自由に作用するものとする．このとき, 同変実射影空間 $M = P(\mathbb{R} \oplus V)$ 上の標準直線束 γ_M と接束 $T(M)$ について, 次の (1) と (2) が成り立つ.

(1) [[4] Theorem 5] G の位数が偶数のとき, 任意の自然数 m と任意の実 G-加群 U, W に対して, $\gamma_M^{\oplus m} \oplus \varepsilon_M(U)$ は実 G-ベクトル束として $\varepsilon_M(W)$ と同型ではない．従って,

$$m[\gamma_M] \neq 0 \quad \text{in } \widetilde{KO}_G(M).$$

$$m[T(M)] \neq 0 \quad \text{in } \widetilde{KO}_G(M).$$

(2) [[4] Theorem 2, Theorem 3] G の位数が奇数の時, $\dim V = 2$ ならば, $\gamma_M^{\oplus 4}$ は実 G-ベクトル束として $\varepsilon_M(\mathbb{R}^4)$ と同型である．故に,

$$4[\gamma_M] = 0 \quad \text{in } \widetilde{KO}_G(M).$$

$$4[T(M)] = 0 \quad \text{in } \widetilde{KO}_G(M).$$

上の (2) の一般化として次の定理を得る.

複素 G-加群 V に対して, $V_{\mathbb{R}}$ を V の実化とする.

定理 1.2. G を奇数位数の有限群とし, V を 1-次元複素 G-加群 $V(1), \cdots, V(n)$ の直和とする. このとき, 同変実射影空間 $M = P(\mathbb{R} \oplus V_{\mathbb{R}})$ 上の標準直線束 γ_M について, ${\gamma_M}^{\oplus 2^{n+1}}$ の複素化 ${\gamma_M}_{\mathbb{C}}^{\oplus 2^{n+1}}$ $(= {\gamma_M}^{\oplus 2^{n+1}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ は複素 G-ベクトル束として $\varepsilon_M(\mathbb{C}^{2^{n+1}})$ と同型である. 従って, ${\gamma_M}^{\oplus 2^{n+2}}$ は実 G-ベクトル束として $\varepsilon_M(\mathbb{R}^{2^{n+2}})$ と同型である.

M の G-部分多様体の系列

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_k \subset \cdots \subset M_n = M \tag{1.1}$$

が容易に得られる. ここで,

$$M_k = P(\mathbb{R} \oplus (V(1) \oplus \cdots \oplus V(k))_{\mathbb{R}})$$

である. 本論文ではこの k に関する帰納法で定理 1.2 を証明する. つまり, $k = 1, 2, 3, \cdots$ と順次

$$(\gamma_{M_k}^{\oplus 2^{k+1}})_{\mathbb{C}} = ((\gamma_M^{\oplus 2^{k+1}})|_{M_k})_{\mathbb{C}}$$

が複素 G-ベクトル束として $\varepsilon_M(\mathbb{C}^{2^{k+1}})$ と同型であることを示す. M_1 は円板とメビウスの帯を境界で貼り合わせることにより得られる. 同様に, G-部分多様体 $Y_{k+1}(\supset M_k)$ と $Z_{k+1}(\supset P(V(k+1)_{\mathbb{R}}))$ を境界で貼り合わせ, M_{k+1} を得る. ここで, M_k と $P(V(k+1)_{\mathbb{R}})$ はそれぞれ Y_{k+1} と Z_{k+1} の強 G-変位レトラクトである. 帰納法の最終ステップで $(\gamma_{M_k}^{\oplus 2^{k+1}})_{\mathbb{C}}$ の自明性から $(\gamma_{M_{k+1}}^{\oplus 2^{k+2}})_{\mathbb{C}}$ の自明性を示すため, Eilenberg の拡張定理を使用する. Eilenberg の拡張障害類はコホモロジー群 $H^m(Z_{k+1}/G, \partial Z_{k+1}/G; \pi_{m-1}(\mathbf{U}(2^{k+2})))$ に属す. ここで, $1 \leq m \leq 2k+2$, また $\mathbf{U}(\ell)$ は次数が ℓ のユニタリー群である. このため本論文において, 各段階の障害コホモロジー群は次のものであることを証明する.

補題 1.3. 上の Z_{k+1} と G について,

$$H^m(Z_{k+1}/G, \partial Z_{k+1}/G; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & (m = 2k+2) \\ O & (m \neq 2k+2) \end{cases}$$

である.

第 2 節では, 補題 1.3 を用いて, 定理 1.2 を証明する. また 補題 1.3 コホモロジー群 $H^*(Z_{k+1}/G, \partial Z_{k+1}/G; \mathbb{Z})$ は普遍係数定理を用い計算する. そのため, 定理 4.1 ホモロ

ジー群 $H_*(Z_{k+1}/G, \partial Z_{k+1}/G; \mathbb{Z})$ の計算結果が第 4 節に挙げられる．第 4.1 節と第 4.2 節の内容は関連するホモロジー群の計算と定理 4.1 の証明である．更に, ホモロジー群の計算において, Serre スペクトル系列が使われるため, 第 3 節では, この論文に使用される Serre スペクトル系列の理論を紹介する．最後に付録として本論文の証明方法で論文 [3] の主結果の別証明を与える．

2　主定理の証明

G と $V(i)$ を定理 1.2 と同じものとし, また k は $0 \leq k \leq n-1$ を満たす整数とする. 更に

$$U = \bigoplus_{i=1}^{k} V(i),\ \ W = V(k+1)$$

とする. T を位数 2 の群 $\{-1, 1\}$ とし, $\widehat{G} = G \times T$ とする. 各 $V(i)$ を複素 $\widehat{G}$-加群とみなし, T は $V(i)$ にスカラー倍に作用する. また閉空間 $I = [-1, 1]$ においても, T が I にスカラー倍により作用するような $\widehat{G}$-作用を持ち, 更に, G は I に自明に作用する. K を G-表現 W の核とし, つまり準同型写像 $G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(W)$ の核とする. 系列 1.1 における M_0 は一点であるから, $(\gamma_{M_0}^{\oplus 2})_{\mathbb{C}} \cong_G \varepsilon_{M_0}(\mathbb{C}^2)$ は容易にわかる. ある k に対して, $(\gamma_{M_k}^{\oplus 2^{k+1}})_{\mathbb{C}} \cong_G \varepsilon_{M_k}(\mathbb{C}^{2^{k+1}})$ と仮定する.

系列 1.1 における定義により,

$$M_{k+1} = P(\mathbb{R} \oplus (U \oplus W)_{\mathbb{R}}) = S(\mathbb{R} \oplus U \oplus W)/\{\pm 1\}$$

である.

$$Y_{k+1} = (S(\mathbb{R} \oplus U) \times D(W))/\{\pm 1\},$$

また

$$Z_{k+1} = (D(\mathbb{R} \oplus U) \times S(W))/\{\pm 1\}$$

とする. すると, $M_{k+1} = Y_{k+1} \cup Z_{k+1}$ である. 更に M_k は Y_{k+1} の強 G-変位レトラクトであり,

$$(\gamma_{M_{k+1}}^{\oplus 2^{k+1}})_{\mathbb{C}}|_{Y_{k+1}} \cong_G \varepsilon_{Y_{k+1}}(\mathbb{C}^{2^{k+1}})$$

である. また明らかに, $P(W_{\mathbb{R}}) = S(W)/\{\pm 1\}$ は Z_{k+1} の強 G-変位レトラクトである. G/K は奇数位数の巡回群である. W は 1-次元複素 G/K-表現空間で, W の実化 $W_{\mathbb{R}}$ は 2-次元実 G/K-加群である. また G/K は $W_{\mathbb{R}}$ に原点以外に自由に作用する. 引用文献 [4] の定理 2 の証明を適応すると,

$$(\gamma_{M_{k+1}})|_{Z_{k+1}}^{\oplus 2} \cong_{G/K} \varepsilon_{Z_{k+1}}(\mathbb{R}^2)$$

が得られる. 従って,

$$(\gamma_{M_{k+1}})|_{Z_{k+1}}^{\oplus 2^{k+1}} \cong_{G/K} \varepsilon_{Z_{k+1}}(\mathbb{R}^{2^{k+1}}),$$

故に
$$(\gamma_{M_{k+1}}^{\oplus 2^{k+1}})_{\mathbb{C}}|_{Z_{k+1}} \cong_G \varepsilon_{Z_{k+1}}(\mathbb{C}^{2^{k+1}}).$$

これから $(\gamma_{M_{k+1}\mathbb{C}}|_{Y_{k+1}})^{\oplus 2^{k+1}}$ を $\varepsilon_{Y_{k+1}}(\mathbb{C}^{2^{k+1}})$ と，そして $(\gamma_{M_{k+1}\mathbb{C}}|_{Z_{k+1}})^{\oplus 2^{k+1}}$ を $\varepsilon_{Z_{k+1}}(\mathbb{C}^{2^{k+1}})$ と同一視する．すると, $(\gamma_{M_{k+1}\mathbb{C}}|_{Y_{k+1}})^{\oplus 2^{k+1}}$ と $(\gamma_{M_{k+1}\mathbb{C}}|_{Z_{k+1}})^{\oplus 2^{k+1}}$ 上にそれぞれ標準ユニタリー枠が存在し, それらを $(e_1, \ldots, e_{2^{k+1}})$ と $(f_1, \ldots, f_{2^{k+1}})$ とする. 行列関数 $A = [a_{ij}] : Y_{k+1} \cap Z_{k+1} \to \mathbf{U}(2^{k+1})$ を次のように定義する.

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{2^{k+1}} a_{ji}(x) e_j(x) \quad (x \in Y_{k+1} \cap Z_{k+1},\ i = 1, \ldots, 2^{k+1}).$$

また, $\mathbf{U}(2^{k+1})$ を自明な G-作用をもつ 2^{k+1} 次ユニタリー群とする．このとき次の (1) と (2) が従う.

(1) $Y_{k+1} \cap Z_{k+1}$ は Z_{k+1} の境界と等しい.
(2) 写像 A は G-同変である.

Z_{k+1} から $\mathbf{U}(2^{k+1})$ への G-写像は Z_{k+1}/G から $\mathbf{U}(2^{k+1})$ への写像と一対一対応する. よって
$$A'([x]) = A(x) \ \ (x \in \partial Z_{k+1})$$

で定義される写像
$$A' : \partial Z_{k+1}/G \to \mathbf{U}(2^{k+1})$$

を Z_{k+1}/G に拡張することができれば, $(\gamma_{M_{k+1}}^{\oplus 2^{k+1}})_{\mathbb{C}}$ は $\varepsilon_{M_{k+1}}(\mathbb{C}^{2^{k+1}})$ と G-同型である. Eilenberg の拡張定理により ([6, Chapter 4] に参照), 写像 A' の拡張障害類

$$\sigma_{m+1}(A') \in H^{m+1}(Z_{k+1}/G, \partial Z_{k+1}/G; \pi_m(\mathbf{U}(2^{k+1})))$$

が定まり, これが自明であれば写像 A' は Z_{k+1}/G 上に拡張する．ここで, $0 \le m \le \dim M_{k+1} - 1$ である．従って, コホモロジー群

$$H^{m+1}(Z_{k+1}/G, \partial Z_{k+1}/G; \pi_m(\mathbf{U}(2^{k+1})))$$

の計算が要点である．まずこのコホモロジー群の係数群 $\pi_m(\mathbf{U}(2^{k+1}))$ について, 次の結果がよく知られている．$0 \le i < 2^{k+2}$ $(= 2(2^{k+1}+1) - 2)$([10, p. 216] を参照) ならば,

$$\pi_i(\mathbf{U}(2^{k+1})) = \pi_i(\mathbf{U}) \cong \begin{cases} 0 & (i\text{: 偶数}) \\ \mathbb{Z} & (i\text{: 奇数}) \end{cases}$$

である．我にの扱っている問題では, 整数 m は $m+1 \leq \dim M_{k+1} = 2(k+1)$ を満たしている．よって, $m \leq 2k+1 < 2^{k+2}$ である．補題 1.3 により次の結果を得る．

$$H^{m+1}(Z_{k+1}/G, \partial Z_{k+1}/G; \pi_m(\mathbf{U}(2^{k+1}))) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & (m+1 = 2k+2) \\ O & (m+1 \neq 2k+2). \end{cases}$$

故に, $\sigma_{m+1}(A')$ が定義され, 全ての $0 \leq m \leq \dim M_{k+1} - 2$ を満たす m において, 自明である．ここで $m = \dim M_{k+1} - 1$ に対して, 写像

$$A'^2 : \partial Z_{k+1}/G \to U(2^{(k+1)+1})$$

を

$$A'^2([x]) = \begin{pmatrix} A'([x]) & 0 \\ O & A'([x]) \end{pmatrix} \quad ([x] \in \partial Z_{k+1}/G)$$

と定義する．同様に全ての $\sigma_{m+1}(A'^2) \in H^{m+1}(Z_{k+1}/G, \partial Z_{k+1}/G; \pi_m(\mathbf{U}(2^{(k+1)+1}))$ が定義され, $0 \leq m \leq \dim M_{k+1} - 1$ を満たす m に対して自明である．つまり, A'^2 は Z_{k+1}/G 上に拡張できる．従って,

$$\gamma_{M_{k+1}}{}_{\mathbb{C}}^{\oplus 2^{(k+1)+1}} \cong_G \varepsilon_{M_{k+1}}(\mathbb{C}^{2^{(k+1)+1}}),$$

すなわち

$$((\gamma_M^{\oplus 2^{(k+1)+1}})|_{M_{k+1}})_{\mathbb{C}} \cong_G \varepsilon_{M_{k+1}}(\mathbb{C}^{2^{(k+1)+1}}).$$

3 Serre スペクトル系列

3.1 一般のスペクトル系列

H, E を加群とし, f, g, h を加群の準同型写像とする. また,

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f"] & H \arrow[dl, "g"] \\ E \arrow[u, "h"] & \end{tikzcd}$$

は**完全系列**であるとする. このとき, $(H, E; f, g, h)$ を**完全対**という.

$$\partial = g \circ h : E \longrightarrow E$$

とおくと,

$$\partial \circ \partial = (g \circ h) \circ (g \circ h) = g \circ h \circ g \circ h = g(0) = 0$$

となる. よって, E の ∂ に関するホモトジー群 $H(E)$ を考えることができる. つまり, $Z(E) = \ker \partial$, $B(E) = \mathrm{Image}\, \partial$ とおくと, $H(E) = Z(E)/B(E)$. 上において,

(1) $Z(E) = h^{-1}(\mathrm{Image}\, f)$
(2) $B(E) = g(\mathrm{Ker}\, f)$

である.

$H^{(1)} = \mathrm{Image}\, f$, $E^{(1)} = H(E)$ とおき, 図式

$$\begin{tikzcd} H^{(1)} \arrow[r, "f^{(1)}"] & H \arrow[dl, "g^{(1)}"] \\ E^{(1)} \arrow[u, "h^{(1)}"] & \end{tikzcd}$$

を次のように定義する. $f^{(1)} = f|H^{(1)}$, $g^{(1)} = [g(f^{-1}(X))]$ $(x \in H^{(1)}$, $h^{(1)}[z] = h[z]$ $(z \in Z(E))$. ここで, $z \in Z(E)$ に対して, $[z] \in H(E)$ はそのホモロジー類を表す. 上の図式は完全系列である. つまり,

(1) $\mathrm{Image}\, f^{(1)} = \mathrm{Ker}\, g^{(1)}$
(2) $\mathrm{Image}\, g^{(1)} = \mathrm{Ker}\, h^{(1)}$
(3) $\mathrm{Image}\, h^{(1)} = \mathrm{Ker}\, f^{(1)}$

である.

完全対 $(H^{(1)}, E^{(1)}; f^{(1)}, g^{(1)}, h^{(1)})$ を完全対 $(H, E : f, g, h)$ の**導来対**という. 一般に完全対 $\epsilon = (H, E; f, g, h)$ の導来対を ϵ' と書き, ε の第 n 次導来対 $\epsilon^{(n)}$ を $\epsilon^{(}n) = (\epsilon^{(n-1)})'$ により定義する. また $\epsilon^{(n)} = (H^{(n)}, E^{(n)}; f^{(n)}, g^{(n)}, h^{(n)})$ において, $E^{(n)}$ は $E^{(n-1)}$ の $d^{(n-1)} = g^{(n-1)} \circ h^{(n-1)}$ に関するホモロジー群 $E^{(n)} = H(E^{(n-1)})$ である. 列 $E^{(0)} = E$, $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, $\cdots$ を完全対 ϵ に同伴する **スペクトル系列** (spectral sequence) という.

完全対 $(H, E; f, g, h)$ に対して, 自然な同型

$$E^{(r)} \longrightarrow h^{-1}(\mathrm{Image}\, f^r)/g(\mathrm{Ker}\, f^r)$$

が存在する. ここで, $f^r = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (r 回の合成) である. これから, $Z^{(r)} = h^{-1}(\mathrm{Image}\, f^r)$, $B^{(r)} = g(\mathrm{Ker}\, f^r)$ と定義し, $E^{(r)}$ を $Z^{(r)}/B^{(r)}$ と同一視する.

C_* をチェイン複体とし, C_* の部分複体の列 $F_nC_{*n\in\mathbb{Z}}$ で

$$\cdots \subset F_nC_* \subset F_{n+1}C_* \subset \cdots, \ \bigcup_n F_nC_* = C_*, \ \bigcap_n F_nC_* = 0$$

となるものをチェイン複体 C_* の **フィルター付け** (filtration) という.

C_* のフィルター付け F_nC_* が与えられたとき,

$$H^1 = \sum_{p,q} H^1_{p,q}, \ \ H^1_{p,q} = H_{p+q}(C_*/F_{p-1}C_*),$$

$$E^1 = \sum_{p,q} E^1_{p,q}, \ \ E^1_{p,q} = H_{p+q}(F_pC_*/F_{p-1}C_*)$$

とおくと, $(C_*, F_pC_*, F_{p-1}C_*)$ のホモロジー完全系列

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_{p+q}(F_pC_*/F_{p-1}C_*) &\xrightarrow{i_*} H_{p+q}(C_*/F_{p-1}C_*) \xrightarrow{j_*} \\ H_{p+q}(C_*/F_pC_*) &\xrightarrow{\partial_*} H_{p+q}(F_pC_*/F_{p-1}C_*) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

をまとめ, 完全対

$$\begin{tikzcd} H^{(1)} \arrow[r, "j_*"] & H \arrow[dl, "\partial_*"] \\ E^{(1)} \arrow[u, "i_*"] & \end{tikzcd}$$

が得られる. このとき,

$$i_* : E^1_{p,q} \longrightarrow H^1_{p,q}, \ \ j_* : H^1_{p,q} \longrightarrow H^1_{p+1,q-1}, \ \ \partial_* : H^1_{p,q} \longrightarrow E^1_{p-1,q}$$

である．更に，この完全対に同伴するスペクトル系列を (E^1, d^1), (E^2, d^2), $\cdots$, と書き，(E^r, d^r) は $E^r = (E^1)^{(r-1)}$ および

$$d^r : E^r_{p,q} \longrightarrow E^r_{p-r,q+r-1}$$

で定められる．

3.2 ファイバー空間のスペクトル系列

X を位相空間とし，$X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n \subset X_{n+1} \subset \cdots$ を X の部分空間の列で，$\bigcup_n X_n = X$ となり，X の任意のコンパクト集合 Y はある X_n に含まれるとする．$n < 0$ のとき，$X_n = \emptyset$, $S(X_n) = 0$ とおくと，X の特異チェイン複体のフィルター付け

$$\cdots \subset S(X_n) \subset S(X_{n+1}) \subset \cdots$$

が得られる．これにより得るスペクトル系列 $(E^r, d\ r)$ について，

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(X_q, X_{p-1}),$$
$$E^\infty_{p,q} = \mathrm{Image}[H_{p+q}(X_p) \longrightarrow H_{p+q}(X)] / \mathrm{Image}[H_{p+q}(X_{p-1}) \longrightarrow H_{p+q}(X)]$$

である．同様に，加群 G を係数とする特異チェイン複体 $S(X_n; G)$ も得られる．

B を d-次元連結有限 CW-複体とし，B の基点を b_0 とし，$\pi : E \to B$ をファイバー束とする．またファイバー $F_{b_0} = \pi^{-1}(b_0)$ は連結 CW-複体とする．空間 B のフィルター付け

$$\mathfrak{F}_B : B^{(0)} \subset B^{(1)} \subset \cdots \subset B^{(i)} \subset \cdots \subset B^{(d)} = B$$

が与えられているものとする．ここで，$B^{(i)}$ により B の i-骨格を表す．$E_i = \pi^{-1}(B^{(i)})$ とすると，このフィルター付けは E 上のフィルター付け

$$\mathfrak{F}_E : E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_i \subset \cdots \subset E_d = E$$

を誘導する．Serre スペクトル系列理論として，次の結果が知られている．([11, p.480, Theorem 16] を参照.)

命題 3.1. ファイバー束 $\pi : E \to B$ が向き付け可能ならばスペクトル系列 $E(\pi)$ に対し，$E^2_{s,t} \cong H_s(B; H_t(F; \mathbb{Z}))$ であり，E^∞ は $H_*(E; \mathbb{Z})$ のフィルター付けと関連する．そのフィルター付けは

$$F_s H_*(E; \mathbb{Z}) = \mathrm{Im}[H_*(E_s; \mathbb{Z}) \to H_*(E; \mathbb{Z})]$$

である．ここで，$F = F_{b_0}$ である．

注 3.2. 上の命題において,

$$\begin{aligned} O \subset F_0H_*(E;\mathbb{Z}) \subset F_1H_*(E;\mathbb{Z}) \subset \cdots \\ \subset F_{s-1}H_*(E;\mathbb{Z}) \subset F_sH_*(E;\mathbb{Z}) \subset \cdots \\ \subset F_dH_*(E;\mathbb{Z}) = H_*(E;\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

および

$$E^\infty_{s,t} = F_sH_{s+t}(E;\mathbb{Z})/F_{s-1}H_{s+t}(E;\mathbb{Z})$$

が成り立つ.

命題 3.3. ファイバー束 $\pi : E \to B$ を向き付け可能とする. また全ての $s \neq 0, 1$ に対して, 有限アーベル群 R を係数とするホモロジー群 $H_s(B;R)$ が O であるとき, スペクトル系列 $E(\pi)$ において次が成り立つ.

$$E^2_{s,t} = E^3_{s,t} = E^4_{s,t} = \cdots = E^\infty_{s,t}. \tag{1}$$

更に自然な完全系列

$$O \to H_0(B;H_m(F;\mathbb{Z})) \to H_m(E;\mathbb{Z}) \to H_1(B;H_{m-1}(F;\mathbb{Z})) \to O. \tag{2}$$

が定まる.

証明. $E(\pi)$ の $d^r_{s,t}$ は $E^r_{s,t}$ から $E^r_{s-r,t+r-1}$ への準同型写像である. $s \neq 0,\ 1$ に対して, $E^2_{s,t} = O$ であるから, $E^2_{s,t}$ は図 1 のようになっている. $r \geq 2$ ならば明らかに全ての s と t において, $d^r_{s,t}$ は自明な準同型写像である. また $E^{r+1}_{s,t} = \operatorname{Ker} d^r_{s,t}/\operatorname{Image} d^r_{s+r,t-r+1}$ より, 命題の (1) が得られる.

完全系列 (2) は次の完全系列から生じる.

$$O \to E^2_{0,m} \to H_m(E;\mathbb{Z}) \to E^2_{1,m-1} \to O.$$

ここで, まず

$$H_0(B;H_m(F;\mathbb{Z})) = E^2_{0,m} = E^\infty_{0,m} = F_0H_m(E;\mathbb{Z})/F_{-1}H_m(E;\mathbb{Z})$$

である. また,

$$H_1(B;H_{m-1}(F;\mathbb{Z})) = E^2_{1,m-1} = E^\infty_{1,m-1} = F_1H_m(E;\mathbb{Z})/F_0H_m(E;\mathbb{Z})$$

である. 更に, $E^\infty_{i,m-i} = F_iH_m(E;\mathbb{Z})/F_{i-1}H_m(E;\mathbb{Z})$ $(i \geq 2)$ に対して,

$$E^\infty_{i,m-i} = E^2_{i,m-i} = 0 \ \ (i \geq 2)$$

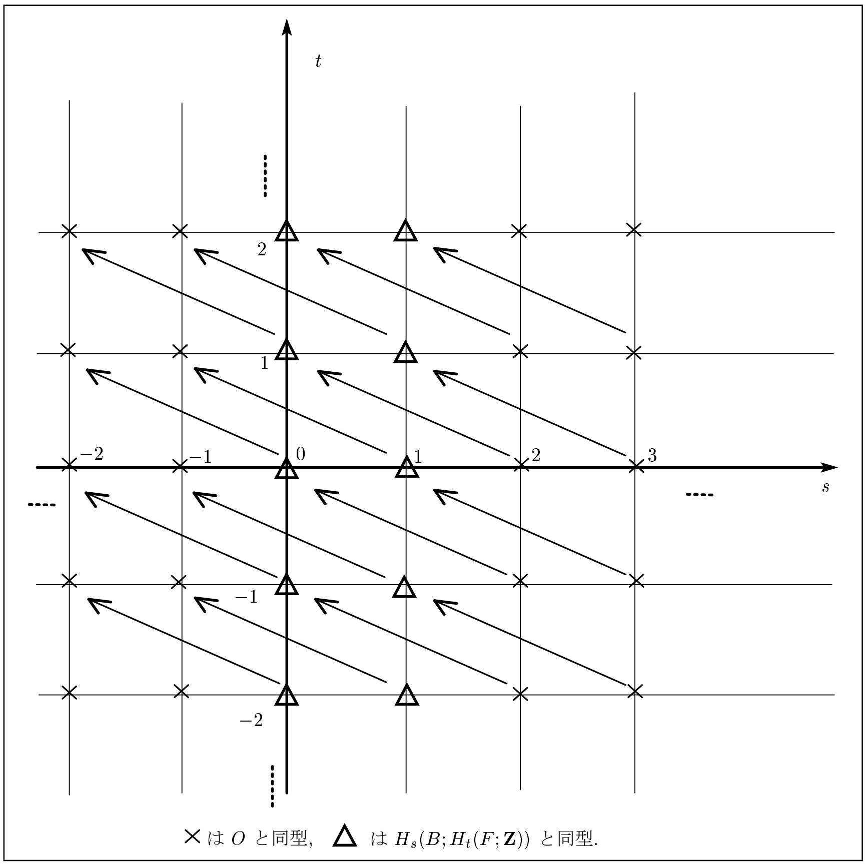

図 1　$E^2_{s,t}$

であり，

$$F_iH_m(E;\mathbb{Z}) = F_{i-1}H_m(E;\mathbb{Z}) \ \ (i \geq 2)$$

が得られる．従って，

$$\begin{aligned} O \subset F_0H_m(E;\mathbb{Z}) \subset F_1H_m(E;\mathbb{Z}) &= F_2H_m(E;\mathbb{Z}) \\ = \cdots = F_iH_m(E;\mathbb{Z}) &= F_{i+1}H_m(E;\mathbb{Z}) = \cdots \\ &= F_dH_m(E;\mathbb{Z}) = H_m(E;\mathbb{Z}) \ \ (i > 2). \end{aligned}$$

つまり，

$$H_m(E;\mathbb{Z}) = F_1H_m(E;\mathbb{Z})$$

である．明らかに，

$$O \to F_0H_m(E;\mathbb{Z}) \to F_1H_m(E;\mathbb{Z}) \to F_1H_m(E;\mathbb{Z})/F_0H_m(E;\mathbb{Z}) \to O$$

は完全系列である． □

4　主定理の補題の証明

この節に使われる記号 G, U, W, T, I, K を第 2 節のと同じものとする．また $\widehat{G}$ を $G\times T$ とする．この論文では, $\widehat{G}$-空間 X の軌道空間を $\overline{X}$ で表す,

第 2 節にある Z_{k+1} について, $Z_{k+1}=(D(\mathbb{R}\oplus U)\times S(W))/\{\pm 1\}$ であるから, Z_{k+1}/G は $(S(W)\times I\times D(U))/\widehat{G}$ と同相である．$N=S(W)\times D(\mathbb{R}\oplus U)$ とすると, つまり Z_{k+1}/G は $\overline{N}$ と同相である．従って, 補題 1.3 のコホモロジー $H^m(Z_{k+1}/G,\partial Z_{k+1}/G;\mathbb{Z})$ の計算が $H^m(\overline{N},\overline{\partial N};\mathbb{Z})$ の計算となる．また普遍係数定理を使いホモロジー群 $H_*(\overline{N},\overline{\partial N};\mathbb{Z})$ からコホモロジー群 $H^*(\overline{N},\overline{\partial N};\mathbb{Z})$ の計算ができる．

4.1　証明の準備

これから次の定理を証明する．

定理 4.1. ホモロジー群 $H_*(\overline{N},\overline{\partial N};\mathbb{Z})$ は

$$H_m(\overline{N},\overline{\partial N};\mathbb{Z})\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_2 & (m=2k+1)\\ O & (m\neq 2k+1)\end{cases}$$

である．

まず

$$\begin{aligned}&U^+=D(U)/S(U),\quad \{\infty\}=S(U)/S(U),\\ &X=S(W)\times I\times U^+,\quad \partial X=S(W)\times\partial I\times U^+,\\ &A=S(W)\times I\times\{\infty\},\quad \partial A=S(W)\times\partial I\times\{\infty\}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

とおく．すると, $N/\partial N$ は $(X/A)/(\partial X/\partial A)$ と $\widehat{G}$-同相である．故に, ホモロジー群 $H_*(\overline{N},\partial\overline{N};\mathbb{Z})$ は $H_*(\overline{X},\overline{A};\mathbb{Z})$ と $H_*(\overline{\partial X},\overline{\partial A};\mathbb{Z})$ を使い計算できる．また

$$\begin{aligned}X/\widehat{G}&=\left(S(W)\times I\times U^+\right)/\widehat{G}\\ &=(S(W)\times I\times F)/(G/K\times T)\end{aligned}$$

である．ただし

$$F=U^+/K$$

である．巡回群 $G/K\times T$ は $S(W)\times I$ に自由に作用し, 軌道空間

$$M=(S(W)\times I)/\widehat{G}$$

はメビウスの帯と同相である．従って, 射影 $\pi_X : \overline{X} \to M$ はファイバーが F となるファイバー束とみなすことができる．同じように, 射影 $\pi_{\partial X} : \overline{\partial X} \to \partial M$ もファイバーが F となるファイバー束とみなすことができる．ホモロジー群 $H_*(\overline{X};\mathbb{Z})$,

これから命題 3.1 と 3.3 をファイバー束 $\pi_X : \overline{X} \to M$ と $\pi_{\partial X} : \overline{\partial X} \to \partial M$ に適用する．そのために, 次の補題を証明しておく．

補題 4.2. ファイバー束 $\pi_X : \overline{X} \to M$ は向き付け可能である．つまり, $\pi_1(M, b_0)$ は $H_*(F;\mathbb{Z})$ に自明に作用する．ここで, $b_0 \in M$ また $F = \pi_X^{-1}(b_0)$ である．従って, ファイバー束 $\pi_{\partial X} : \overline{\partial X} \to \partial M$ も向き付けられである．

証明. ファイバー束 $\pi_Y : \overline{Y} \to \overline{S(W)}$ が向き付け可能であることを示せばよい．ここで, $Y = S(W) \times U^+$ である．また G は奇数位数の群であり, 各 $V(i)$ は 1-次元複素 $\widehat{G}$-加群である．すると, $V(i)$ を複素 S^1-加群と見なすことができる．また $V(i)$ 上のオリジナル $\widehat{G}$-作用は群準同型 $\psi_i : \widehat{G} \to S^1$ により得られる．g を $\widehat{G}$ の元とおく．巡回群 $\widehat{G}/K = C \times T$ における類 $[g]$ は写像 $F \to F$ を定義し, $F = U^+/K$ である．準同型写像 $[g]_* : H_*(F;\mathbb{Z}) \to H_*(F;\mathbb{Z})$ は恒等写像であることを示す必要がある．$\rho : [0,1] \to S^1 \times \cdots \times S^1$ (k-重) は $\rho(0) = (e, \cdots, e)$ と $\rho(1) = (\psi_1(g), \cdots \psi_k(g))$ を満たす連続写像とする．すると, 各 $t \in [0,1]$ に対して, $\rho(t)$ は写像 $U^+ \to U^+$ を定義し, 更に写像 $F \to F$ を定義する．従って, 準同型写像 $\rho(t)_* : H_*(F;\mathbb{Z}) \to H_*(F;\mathbb{Z})$ が得られる．また $\rho(0)_*$ は恒等写像であるから, $\rho(1)_*$ $(= [g]_*)$ は恒等写像である． □

これから $H_*(\overline{X}, \overline{A};\mathbb{Z})$ と $H_*(\overline{\partial X}, \overline{\partial A};\mathbb{Z})$ を計算する．

まず軌道空間
$$M = (S(W) \times I)/\widehat{G} = (S(W) \times I)/(C \times T)$$
はメビウスの帯と同相である．ここで, $C = G/K$. 明らかに任意のアーベル群 R に対して, $s \neq 0,\ 1$ のとき, $H_s(M;R) = O$ である．従って, $E(\pi_X)$ の Serre スペクトル系列に対し命題 3.3 を適用できる．

補題 4.3. ファイバー $F = U^+/K$ のホモロジー群 $H_*(F;\mathbb{Z})$ は以下のものである．
$$H_t(F;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (t = 0,\ 2k) \\ A_t & (0 < t < 2k) \\ O & (t > 2k), \end{cases}$$
ここで $0 < t < 2k$ となる整数 t に対して, A_t は奇数位数の有限アーベル群である．

証明. まず

$$H_t(U^+) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (t = 0,\ 2k) \\ O & (t \neq 0,\ 2k). \end{cases}$$

が分かる. また $\pi_* \circ tr = |K|$ となるトランスファー準同型写像 $tr : H_*(F;\mathbb{Z}) \to H_*(U^+;\mathbb{Z})$ が存在し, $\pi : U^+ \to F$ は自然な射影である.([7, 章 5.3] を参照) 従って, $0 < t < 2k$ となる t に対して, $|K|H_t(F;\mathbb{Z}) = O$ である.

$H_{2k}(F;\mathbb{Z})$ の計算において, K は $S(U)$ に効果的に作用すると仮定する. このとき任意の $g \in G \setminus \{e\}$ に対して, $\dim S(U)^g \leq 2k-3$ である. Σ を $S(U)$ の特異集合とする, つまり

$$\Sigma = \bigcup_{g \in G \setminus \{e\}} S(U)^g$$

とする. また $N(\Sigma)$ を $S(U)$ における Σ の K-同変閉正規近傍とおく. K は $S(U)$ に向きを保ったまま作用するため, $B = (S(U) \setminus N(\Sigma)^\circ)/K$ は境界を持つコンパクト連結で向き付け可能な多様体である. ここで $N(\Sigma)^\circ$ は $N(\Sigma)$ の内部である. よって $H_{2k-1}(B,\partial B;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ が得られる. 従って

$$H_{2k-1}(S(U)/K;\mathbb{Z}) = H_{2k-1}(S(U)/K, N(\Sigma)/K;\mathbb{Z}) = H_{2k-1}(B,\partial B;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

また F は $S(U)/K$ の懸垂であるから, $H_{2k}(F;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ を得る. □

命題 3.1 と補題 4.2 より,

$$E^2_{s,t}(\pi_X) = H_s\left(M; H_t(F;\mathbb{Z})\right), \text{ ここで } M = \overline{S(W) \times I}$$

がわかる. 従って, 補題 4.3 から次が得られる.

$$E^2_{s,t}(\pi_X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (s = 0,\ 1, t = 0,\ 2k) \\ A_t & (s = 0,\ 1,\ 0 < t < 2k) \\ O & (s \neq 0,\ 1). \end{cases} \tag{4.2}$$

つまり, $E^2_{s,t}(\pi_X)$ は図 2 のようになっている.

更に命題 3.3 より次が得られる.

補題 4.4. ホモロジー群 $H_*(\overline{X};\mathbb{Z})$ について

$$H_0(\overline{X};\mathbb{Z}) = H_0(M; H_0(F;\mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z},$$

$$H_{2k+1}(\overline{X};\mathbb{Z}) = H_1(M; H_{2k}(F;\mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}$$

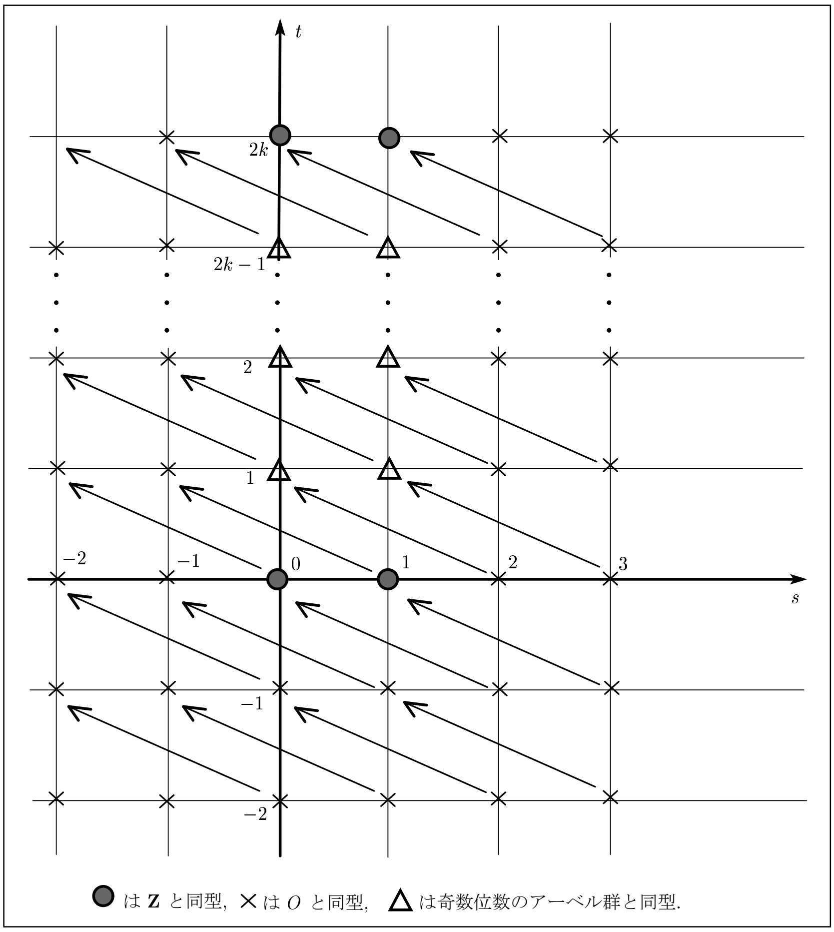

図 2　$E^2_{s,t}(\pi_X)$

が成り立つ. また $1 \leq m \leq 2k$ となる m に対して, 完全系列

$$O \to H_0(M; H_m(F;\mathbb{Z})) \to H_m(\overline{X};\mathbb{Z}) \to H_1(M; H_{m-1}(F;\mathbb{Z})) \to O$$

が定まる.

証明. まず

$$\begin{aligned} F_1H_0(\overline{X};\mathbb{Z})/F_0H_1(\overline{X};\mathbb{Z}) &= E^\infty_{1,-1}(\pi_X) \\ &= E^2_{1,-1}(\pi_X) = H_1(M; H_{-1}(F;\mathbb{Z})) = 0 \end{aligned}$$

より,

$$F_1H_0(\overline{X};\mathbb{Z}) = F_0H_1(\overline{X};\mathbb{Z}) \tag{4.3}$$

が得られる. 同様に,

$$F_iH_0(\overline{X};\mathbb{Z})/F_{i-1}H_1(\overline{X};\mathbb{Z}) = E^\infty_{i,-i}(\pi_X) = E^2_{i,-i}(\pi_X) = H_i(M; H_{-i}(F;\mathbb{Z})) = 0 \ \ (i \geq 2) \tag{4.4}$$

である. 式 (4.3) と (4.4) より

$$
\begin{aligned}
O \subset F_0 H_0(\overline{X};\mathbb{Z}) &= F_1 H_m(\overline{X};\mathbb{Z}) \\
= \cdots = F_i H_m(\overline{X};\mathbb{Z}) &= F_{i+1} H_0(\overline{X};\mathbb{Z}) = \cdots \\
= F_d H_0(\overline{X};\mathbb{Z}) &= H_0(\overline{X};\mathbb{Z}) \ \ (i > 1)
\end{aligned}
$$

が得られる. 更に,

$$E^{\infty}_{0,0}(\pi_X) = F_0 H_0(\overline{X};\mathbb{Z})/F_{-1} H_0(\overline{X};\mathbb{Z}) = F_0 H_0(\overline{X};\mathbb{Z}),$$

$$E^{\infty}_{0,0}(\pi_X) = E^{2}_{0,0}(\pi_X) = H_0(M; H_0(F;\mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}$$

である. 従って

$$H_0(\overline{X};\mathbb{Z}) = H_0(M; H_0(F;\mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}.$$

同様に $H_{2k+1}(\overline{X};\mathbb{Z})$ も計算できる. □

$\pi_A : \overline{S(W) \times I \times \{\infty\}} \to M$ は自明なファイバー $\{\infty\}$ を持つファイバー束と見なすことができる. ここで $M = \overline{S(W) \times I}$ である.

従って, 次の結果が容易に得られる.

$$E^{2}_{s,t}(\pi_A) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (s = 0,\ 1,\ t = 0) \\ O & (s = 0,\ 1,\ t > 0) \\ O & (s \neq 0,\ 1). \end{cases} \tag{4.5}$$

従って, $E^{2}_{s,t}(\pi_A)$ は図 3 のようになっている.

補題 4.5. ホモロジー群 $H_*(\overline{X}, \overline{A};\mathbb{Z})$ は

$$H_0(\overline{X}, \overline{A};\mathbb{Z}) = O,$$

$$H_1(\overline{X}, \overline{A};\mathbb{Z}) = H_0(M; H_1(F;\mathbb{Z})),$$

$$H_{2k+1}(\overline{X}, \overline{A};\mathbb{Z}) = H_1(M; H_{2k}(F;\mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}$$

である. また $2 \leq m \leq 2k$ となる m に対して, 完全系列

$$O \to H_0(M; H_m(F;\mathbb{Z})) \to H_m(\overline{X}, \overline{A};\mathbb{Z}) \to H_1(M; H_{m-1}(F;\mathbb{Z})) \to O$$

が定まる.

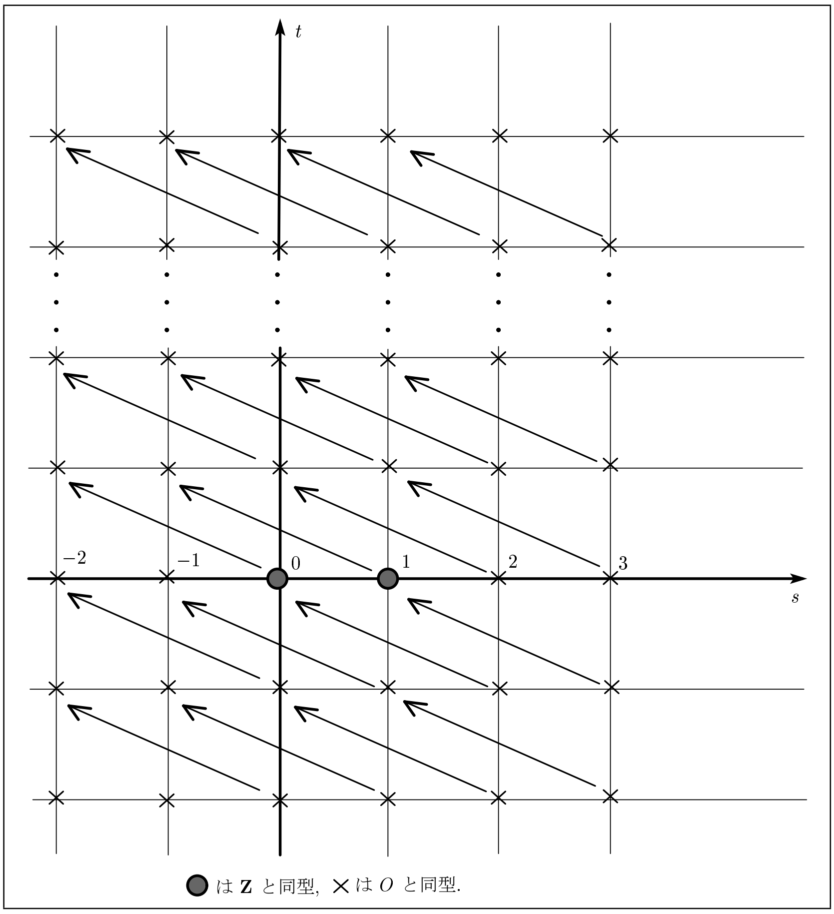

図 3　$E^2_{s,t}(\pi_A)$

証明．命題 3.3 の結果を利用すると, π_A の自然な完全系列が得られる．すなわち,

$$O \to H_0(M; H_m(\{\infty\}; \mathbb{Z})) \to H_m(\overline{A}; \mathbb{Z}) \to H_1(M; H_{m-1}(\{\infty\}; \mathbb{Z})) \to O$$

が存在する．これから次の可換図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r] & H_0(M; H_m(\{\infty\}; \mathbb{Z})) \arrow[r] \arrow[d] & H_m(\overline{A}; \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & H_1(M; H_{m-1}(\{\infty\}; \mathbb{Z})) \arrow[r] \arrow[d] & O \\
O \arrow[r] & H_0(M; H_m(F; \mathbb{Z})) \arrow[r] & H_m(\overline{X}; \mathbb{Z}) \arrow[r] & H_1(M; H_{m-1}(F; \mathbb{Z})) \arrow[r] & O.
\end{tikzcd}$$

- $m=1$ のとき: 上の可換図式は次のようになる.

$$\begin{CD}
O @>>> O @>>> H_1(\overline{A};\mathbb{Z}) @>>> H_1(M;\mathbb{Z}) @>>> O\\
@. @VVV @VVV @VVV @.\\
O @>>> H_0(M;H_1(F;\mathbb{Z})) @>>> H_1(\overline{X};\mathbb{Z}) @>>> H_1(M;\mathbb{Z}) @>>> O.
\end{CD}$$

従って,

$$H_1(\overline{X},\overline{A};\mathbb{Z}) = H_0(M;H_1(F;\mathbb{Z})).$$

- $2 \le m \le 2k$ のとき: その可換図は次のようになる.

$$\begin{CD}
O @>>> O @>>> H_m(\overline{A};\mathbb{Z}) @>>> O @>>> O\\
@. @VVV @VVV @VVV @.\\
O @>>> H_0(M;H_m(F;\mathbb{Z})) @>>> H_m(\overline{X};\mathbb{Z}) @>>> H_1(M;H_{m-1}(F;\mathbb{Z})) @>>> O.
\end{CD}$$

更に, このとき, $H_m(\overline{A};\mathbb{Z}) = O \ (2 \le m \le 2k)$ である. 完全系列

$$O \to H_0(M;H_m(F;\mathbb{Z})) \to H_m(\overline{X},\overline{A};\mathbb{Z}) \to H_1(M;H_{m-1}(F;\mathbb{Z})) \to O$$

が容易に得られる. また明らかに $H_0(\overline{X},\overline{A};\mathbb{Z}) = O$ である.

□

命題 3.1 と補題 4.2 により, $\partial M = \overline{S(W)\times \partial I}$ は S^1 と同相である. 従って

$$E^2_{s,t}(\pi_{\partial X}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (s=0,\ 1,\ t=0,\ 2k) \\ A_t & (s=0,\ 1,\ 0<t<2k) \\ O & (s\neq 0,\ 1) \end{cases} \tag{4.6}$$

である.

この結果により次の二つの補題が得られる.

補題 4.6. ホモロジー群 $H_*(\overline{\partial X};\mathbb{Z})$ は

$$H_0(\overline{\partial X};\mathbb{Z}) = H_0(\partial M;H_0(F;\mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z},$$
$$H_{2k+1}(\overline{\partial X};\mathbb{Z}) = H_1(\partial M;H_{2k}(F;\mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}$$

である. また $1 \le m \le 2k$ となる m に対して, 完全系列

$$O \to H_0(\partial M;H_m(F;\mathbb{Z})) \to H_m(\overline{\partial X};\mathbb{Z}) \to H_1(\partial M;H_{m-1}(F;\mathbb{Z})) \to O$$

が定まる.

補題 4.7. ホモロジー群 $H_*(\overline{\partial X}, \overline{\partial A}; \mathbb{Z})$ は

$$H_0(\overline{\partial X}, \overline{\partial A}; \mathbb{Z}) = O,$$
$$H_1(\overline{\partial X}, \overline{\partial A}; \mathbb{Z}) = H_0(\partial M; H_1(F; \mathbb{Z})),$$
$$H_{2k+1}(\overline{\partial X}, \overline{\partial A}; \mathbb{Z}) = H_1(\partial M; H_{2k}(F; \mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}$$

である．また $2 \leq m \leq 2k$ となる m に対して, 完全系列

$$O \to H_0(\partial M; H_m(F; \mathbb{Z})) \to H_m(\overline{\partial X}, \overline{\partial A}; \mathbb{Z}) \to H_1(\partial M; H_{m-1}(F; \mathbb{Z})) \to O$$

が定まる．

証明．証明は補題 4.5 の証明と同様である． □

4.2 証明の仕上げ

可換図式

$$\begin{tikzcd}
H_0(\partial M; H_1(F; \mathbb{Z})) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"'] & H_1(\overline{\partial X}, \overline{\partial A}; \mathbb{Z}) \arrow[d] \\
H_0(M; H_1(F; \mathbb{Z})) \arrow[r, "\cong"'] & H_1(\overline{X}, \overline{A}; \mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

より $H_1(\overline{N}, \overline{\partial N}; \mathbb{Z}) = O$ が得られる．

$2 \leq m \leq 2k$ となる m に対して, 次の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r] & H_0(\partial M; H_m(F; \mathbb{Z})) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & H_m(\overline{\partial X}, \overline{\partial A}; \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & H_1(\partial M; H_{m-1}(F; \mathbb{Z})) \arrow[r] \arrow[d] & O \\
O \arrow[r] & H_0(M; H_m(F; \mathbb{Z})) \arrow[r] & H_m(\overline{X}, \overline{A}; \mathbb{Z}) \arrow[r] & H_1(M; H_{m-1}(F; \mathbb{Z})) \arrow[r] & O,
\end{tikzcd}$$

ここで, 水平の列は完全系列である．従って, 可換図式

$$\begin{tikzcd}
H_1(\partial M; H_{m-1}(F; \mathbb{Z})) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & H_{m-1}(F; \mathbb{Z}) \arrow[d, "\times 2"] \\
H_1(M; H_{m-1}(F; \mathbb{Z})) \arrow[r, "\cong"'] & H_{m-1}(F; \mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

が得られる．更に, $H_{m-1}(F; \mathbb{Z}) = A_{m-1}$ は奇数位数の有限アーベル群である．故に, $A_{m-1}/2A_{m-1} = O$. 以上より $H_m(\overline{N}, \overline{\partial N}; \mathbb{Z}) = O$ がわかる．

これから次の可換図式を考える.

$$\begin{tikzcd}
H_{2k+1}(\overline{\partial X}, \overline{\partial A}; \mathbb{Z}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & H_1(\partial M; H_{2k}(F;\mathbb{Z})) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\times 2"] \\
H_{2k+1}(\overline{X}, \overline{A}; \mathbb{Z}) \arrow[r, "\cong"'] & H_1(M; H_{2k}(F;\mathbb{Z})) \arrow[r, "\cong"'] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

この可換図式より $H_{2k+1}(\overline{N}, \overline{\partial N}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$ が得られる.

以上より定理 4.1 の証明が終わる.

5 付録 (奇数位数巡回群の場合)

論文 [3] では, ペアの Thom 同型と Eilenberg の拡張定理を用い, 次の定理を証明した.

定理 5.1. G は奇数位数の巡回群で, V を原点以外で自由な G-作用を持つ $2k$-次元実 G-加群 $(k \geq 1)$ とする. $M = P(\mathbb{R} \oplus V)$ のとき, $\gamma_M^{\oplus 2^{k+1}} \otimes \mathbb{C} \cong_G \varepsilon_M(\mathbb{C}^{2^{k+1}})$ である.

この節では, Eilenberg の拡張定理と Serre スペクトル系列を使い, 別証を与える.

第 2 節と同様に k に関して帰納法を使うと, 最終ステップで Eilenberg の拡張障害類, つまりコホモロジー群 $H^m(Z_{k+1}/G, \partial Z_{k+1}/G; \pi_{m-1}(\mathbf{U}(2^{k+2})))$ の計算が必要である. 普遍係数定理を用いると,

$$H_m(Z_{k+1}/G, \partial Z_{k+1}/G; \pi_{m-1}(\mathbf{U}(2^{k+2})))$$

を求めれば良いことがわかる. $\pi_{m-1}(\mathbf{U}(2^{k+2}))$ が $\mathbb{Z}$ と同型であることが第 2 節で証明済みである. ここで Z_{k+1} は定理 1.2 の証明で用いたものと同じもので, $(D(\mathbb{R} \oplus U) \times S(W))/\{\pm 1\}$ である. すると, Z_{k+1}/G は

$$(S(W) \times I \times D(U))/G \times \{\pm 1\}$$

と同相である. 同じように,

$$N = S(W) \times I \times D(U)$$

とする.

定理 5.2. 上記 N と $\widehat{G} = G \times \{\pm 1\}$ に対し

$$H_m(N/\widehat{G}, \partial N/\widehat{G}; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & (m = 2k+1) \\ O & (m \neq 2k+1) \end{cases}$$

である.

証明. X, ∂X, A, ∂A を定理 1.2 の証明と同じように定義し, $H_*(\overline{X}, \overline{A}; \mathbb{Z})$ と $H_*(\overline{\partial X}, \overline{\partial A}; \mathbb{Z})$ を使い $H_*(\overline{N}, \overline{\partial N}; \mathbb{Z})$ を計算する.

注 5.3. $\overline{X} = X/G = (S(W) \times I \times U^+)/\widehat{G}$ とする. ここで, $U^+ = D(U)/S(U)$ である. $(S(W) \times I)/\widehat{G}$ はメビウスの帯と同相であることが容易にわかる. 従って, 射影 $\pi_X : \overline{X} = X/G \to M$ はファイバーが U^+ となるファイバー束とみなすことができる.

つまり, 第 4 節と比べ, ファイバーが $F=U^+/K$ から U^+ に変わる. ここで, K は G-表現 W の核である. 更に,

$$H_t(U^+)=\begin{cases}\mathbb{Z} & (t=0,\ 2k)\\ O & (t\neq 0,\ 2k)\end{cases}$$

であることに注意する. 次に

$$E^2_{s,t}(\pi_X)=H_s\left(M;H_t(U^+;\mathbb{Z})\right)$$

について,

$$E^2_{s,t}(\pi_X)\cong\begin{cases}\mathbb{Z} & (s=0,\ 1, t=0,\ 2k)\\ A_t=O & (s=0,\ 1,\ 0<t<2k)\\ O & (s\neq 0,\ 1).\end{cases} \tag{5.1}$$

であることがわかる.

従って, 補題 4.4, 補題 4.5, 補題 4.6 と補題 4.7 の計算結果について, 全ての F が U^+ に変わるだけである. すなわち,

補題 5.4. ホモロジー群 $H_*(\overline{X};\mathbb{Z})$ について

$$H_0(\overline{X};\mathbb{Z})=H_0(M;H_0(U^+;\mathbb{Z}))\cong\mathbb{Z},$$
$$H_1(\overline{X};\mathbb{Z})=H_1(M;H_0(U^+;\mathbb{Z}))\cong\mathbb{Z},$$
$$H_{2k}(\overline{X};\mathbb{Z})=H_0(M;H_{2k}(U^+;\mathbb{Z}))\cong\mathbb{Z},$$
$$H_{2k+1}(\overline{X};\mathbb{Z})=H_1(M;H_{2k}(U^+;\mathbb{Z}))\cong\mathbb{Z}$$

が成り立つ. また $2\leq m\leq 2k-1$ となる m に対して,

$$H_m(\overline{X};\mathbb{Z})=O.$$

補題 5.5. ホモロジー群 $H_*(\overline{X},\overline{A};\mathbb{Z})$ は

$$H_0(\overline{X},\overline{A};\mathbb{Z})=O,$$
$$H_1(\overline{X},\overline{A};\mathbb{Z})=H_0(M;H_1(U^+;\mathbb{Z}))=O,$$
$$H_{2k}(\overline{X},\overline{A};\mathbb{Z})=H_0(M;H_{2k}(U^+;\mathbb{Z}))\cong\mathbb{Z},$$
$$H_{2k+1}(\overline{X},\overline{A};\mathbb{Z})=H_1(M;H_{2k}(U^+;\mathbb{Z}))\cong\mathbb{Z}$$

である. また $2\leq m\leq 2k-1$ となる m に対して,

$$H_m(\overline{X},\overline{A};\mathbb{Z})=O.$$

補題 5.6. ホモロジー群 $H_*(\overline{\partial X};\mathbb{Z})$ は

$$H_0(\overline{\partial X};\mathbb{Z}) = H_0(\partial M; H_0(U^+;\mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z},$$
$$H_1(\overline{\partial X};\mathbb{Z}) = H_1(\partial M; H_0(U^+;\mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z},$$
$$H_{2k}(\overline{\partial X};\mathbb{Z}) = H_0(\partial M; H_{2k}(U^+;\mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z},$$
$$H_{2k+1}(\overline{\partial X};\mathbb{Z}) = H_1(\partial M; H_{2k}(U^+;\mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}$$

である. また $2 \leq m \leq 2k-1$ となる m に対して,

$$H_{2k+1}(\overline{\partial X};\mathbb{Z}) = O.$$

補題 5.7. ホモロジー群 $H_*(\overline{\partial X},\overline{\partial A};\mathbb{Z})$ は

$$H_0(\overline{\partial X},\overline{\partial A};\mathbb{Z}) = O,$$
$$H_1(\overline{\partial X},\overline{\partial A};\mathbb{Z}) = H_0(\partial M; H_1(U^+;\mathbb{Z})) = O,$$
$$H_{2k}(\overline{\partial X},\overline{\partial A};\mathbb{Z}) = H_0(\partial M; H_{2k}(U^+;\mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z},$$
$$H_{2k+1}(\overline{\partial X},\overline{\partial A};\mathbb{Z}) = H_1(\partial M; H_{2k}(U^+;\mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}$$

である. また $2 \leq m \leq 2k-1$ となる m に対して,

$$H_{2k+1}(\overline{\partial X},\overline{\partial A};\mathbb{Z}) = O.$$

以上より, $0 \leq m \leq 2k-1$ となる m に対して, $H_m(N/\widehat{G},\partial N/\widehat{G};\mathbb{Z}) = O$ が容易に得られる. 可換図式

$$\begin{tikzcd}
H_0(\partial M; H_{2k}(U^+;\mathbb{Z})) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"'] & H_{2k}(\overline{\partial X},\overline{\partial A};\mathbb{Z}) \arrow[d] \\
H_0(M; H_{2k}(U^+;\mathbb{Z})) \arrow[r, "\cong"'] & H_{2k}(\overline{X},\overline{A};\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

より $H_{2k}(\overline{N},\overline{\partial N};\mathbb{Z}) = O$ が得られる. また

$$\begin{tikzcd}
H_{2k+1}(\overline{\partial X},\overline{\partial A};\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & H_1(\partial M; H_{2k}(U^+;\mathbb{Z})) \arrow[d] \\
H_{2k+1}(\overline{X},\overline{A};\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cong"'] & H_1(M; H_{2k}(U^+;\mathbb{Z}))
\end{tikzcd}$$

より　$H_{2k+1}(\overline{N},\overline{\partial N};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$ が得られる. これで定理 5.2 が証明できた. □

定理 5.2 および普遍係数定理を使うと, 次の結果を得る.

$$H^{m+1}(Z_{k+1}/G, \partial Z_{k+1}/G; \pi_m(\mathbf{U}(2^{k+1}))) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{Z}_2 & (m+1 = 2k+2) \\ O & (m+1 \neq 2k+2). \end{array} \right.$$

従って定理 1.2 の証明と同様に, 写像

$$A' : \partial Z_{k+1}/G \to \mathbf{U}(2^{k+1})$$

の障害類 $\sigma_{m+1}(A')$ が定義され, 全ての $0 \leq m \leq \dim M_{k+1} - 2$ を満たす m において, 自明である. また同様に写像

$${A'}^2 : \partial Z_{k+1}/G \to U(2^{(k+1)+1})$$

を

$${A'}^2([x]) = \left(\begin{array}{cc} A'([x]) & 0 \\ O & A'([x]) \end{array} \right) \quad ([x] \in \partial Z_{k+1}/G)$$

と定義すると, 全ての $\sigma_{m+1}({A'}^2) \in H^{m+1}(Z_{k+1}/G, \partial Z_{k+1}/G; \pi_m(\mathbf{U}(2^{(k+1)+1}))$ が定義され, $0 \leq m \leq \dim M_{k+1} - 1$ を満たす m に対して自明である. つまり, ${A'}^2$ は Z_{k+1}/G 上に拡張できる. 従って,

$$\gamma_{M_{k+1}}{}_{\mathbb{C}}^{\oplus 2^{(k+1)+1}} \cong_G \varepsilon_{M_{k+1}}(\mathbb{C}^{2^{(k+1)+1}}).$$

以上により定理 5.1 が証明された.

謝辞

岡山大学に入学して以来, ずっと森本雅治先生に大変お世話になりました. たくさん数学の知識を教えてください, セミナや, 卒業論文, 修士論文, 博士論文も熱心に指導し, 励んでくださいました. 生活の面においても, いろいろ教え, 支えてくださいました. 心より感謝しております. また私が日本に留学するために苦労しても支えてくれた両親といろいろ助けてくれた中国と日本の友人たちに感謝します.

参考論文

[1] 祁 艶 (Qi, Yan), 同変実射影空間上の同変実ベクトル束について, 数理解析研究所講究録 No. 1670 (2009), 117-125.

[2] 祁 艶 (Qi, Yan), 同変実射影空間上の標準直線束について, 数理解析研究所講究録 No. 1732 (2011), 28-31.

[3] 祁 艶 (Qi, Yan), 同変標準直線束のホイットニー和の自明性について, 数理解析研究所講究録 No. 1816 (2012), 10-12.

[4] Yan Qi, The tangent bundles over equivariant real projective spaces, Math. J. Okayama Univ. **54** (2012), 87-96.

[5] Yan Qi, The canonical line bundles over equivariant real projective spaces, accepted by Math. J. Okayama Univ.

引用文献

[6] S.-T. Hu, *Homotopy Theory*, Pure and Applied Mathematics VIII, Academic Press, New York and London, 1959.

[7] K. Kawakubo, *The Theory of Transformation Groups*, Oxford University Press, Oxford and New York and Tokyo, 1991.

[8] N. Mahammed, R. Piccinini and U. Suter , *Some Applications of Topological K-Theory*, North-Holland Mathematics Studies 45, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York and Oxford, 1980.

[9] J. W. Milnor and J. D. Stasheff, *Characteristic Classes*, Annals of Mathematics Studies No.76, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1974.

[10] M. Mimura and H. Toda, *Topology of Lie Groups, I and II* , American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1991.

[11] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, Mcgraw-Hill Book Company, New York, 1966.