岡山大学算数・数学教育学会誌
『パピルス』第3号（1996年）89頁〜92頁

フラクタル幾何学への誘い
ー　複素力学系とその一般化　ー

旦代　晃一

岡山大学教育学部数学教室

高橋教授から、今年のメイン・テーマを数学教育におけるコンピュータの利用にしたいので，パピルスに関連する論文をなにか書くようにとのお話しがあった。突然のことであったので，そのときはしりごみしたのだったが，考えた末に，わたしが最近関心を持っている複素力学系の拡張についてご紹介しようと決心した。

1．はじめに

複素力学系というと難しそうだが、簡単な計算で定まる複素数列が収束するか，しないかを問題にするだけのことである。複素数列の収束はその実部と虚部からなる2つの数列の収束と同一だから，実数列の収束を知っていれば理解できる。それだけの材料で驚くべき多様な図形がコンピュータのCRT上に現れる。生徒たちには何も説明の必要はあるまい。只その図形を見せるだけで十分だろう。数学は社会生活の中で直接にはあまり役立っていないと思っている生徒も数学の可能性に眼を見張るに違いない。コンピュータに関心のある生徒なら自分でも色々なフラクタル図形を画面に書かせてみたいと思うに違いない。

2．複素力学系とは何だろう

まず複素数γを決めておく。つぎに複素数列の初項z_0を勝手に選んでおく。そのとき複素数列$\{z_n\}$をつぎの漸化式によって定義することができる。

$$z_{n+1} = z_n{}^2 + \gamma \qquad (1)$$

この漸化式の最初の数項は高校生なら容易に計算できる筈である。

おおまかに言うと，この数列はγやz_0の絶対値が大きいと大抵発散する。いいかえると，それらが原点0の近くにあるときのみ収束の可能性がある。

(1)のように複素正則関数で表される漸化式のことを複素力学系という。

複素力学系の特徴をみるには，つぎのような集合を図示して眺めてみるとよい。

（ア） z_0を0に固定して $|z_n|$ が∞に発散しないようなγの集合をMとする。この集合をマンデルブロ集合という。

イ）つぎにγを固定して $|z_n|$ が∞に発散しないような初項 z_0 の集合を K_γ と書き，充填ジュリア集合という。

これらの集合を眺めると，どのような複素力学系であるのか大体わかるのである。

これらの集合の概形はパソコンで簡単に描くことができる。たとえば，［１］にはＢＡＳＩＣによるプログラムが掲載されている。短いプログラムなので，興味のある方はぜひγの値をいろいろ変えて多様な充填ジュリア集合の形態を味わって欲しい。

プログラムを入力しておけば，γの値を生徒でもいろいろ変えられるので，簡単に手作りの充填ジュリア集合が得られる点が興味を呼ぶと思う。生徒たちの充填ジュリア集合のコンクールなども楽しいのではないだろうか。

なおカラー・プリンターを用いて，多色の画像を描くのも審美的見地から興味が増ξものと思われる。美しい充填ジュリア集合の画像が掲載されている宇敷重広氏の本［２］も参考になるだろう。

以下に述べる複素力学系の拡張についても同様なのだが，プログラムは非常に簡単なのだが計算量は非常に多く，美しい充填ジュリア集合を探索しようとすれば相当な計算時間を必要とする。なるべくペンチアムなどの高速な CPU を搭載しているパソコンを使用し，プログラミング言語についても BASIC や，実行ファイルが中間言語を使用する BASIC COMPILER の使用はなるべく避け，機械語の実行ファイルを生成するコンパイラの使用が勧められる。

どうしても BASIC がよいという方には，UBASIC（日本評論社）の使用をお勧めしておく。

３．４次元への拡張

－４次元図形を平面で切る－

まず４元数を定義することから始めよう。実数体の上の $\{\mathbf{1}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ を基底とする４次元線型空間Hを考えよう。すなわち，Hはつぎのような４元数とよばれる数の全体である。

$$\zeta = x\mathbf{1} + y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k} + w\boldsymbol{k} \qquad (2)$$

ここにx, y, z, wは実数である。これらを数と考えるために，$\mathbf{1}$ を単位元と考え，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$の間につぎのような乗法を定義する。

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{i}^2 = -1,$$
$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}, \qquad \boldsymbol{j}^2 = -1,$$
$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{k}^2 = -1.$$

これらの式によってHに自然に結合法則をみたす積が定まることが容易に確かめられる。さらにHは零因子を持たない。すなわち，Hの零でない元は逆元をもつ。このことはつぎのようにして確かめられる。上のように表されたξにたいして４元数$\bar{\zeta}$をつぎの式で定義し，ξの共役４元数という。

$$\bar{\zeta} = x\mathbf{1} - y\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} - w\boldsymbol{k}.$$

このとき，

$$\zeta\bar{\zeta} = (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)\mathbf{1},$$

となるから，この式の平方根を $|\zeta|$ と定めると，零でないξにたいしてξの逆元 ζ^{-1} は $\bar{\zeta}/|\zeta|$ で与えられることがわかる。なお，ξ，ηを４元数とするとき，$|\zeta\eta| = |\zeta||\eta|$ が成立することを注意しておこう。

さて，複素力学系と同様に４元数力学系を定義することができる。すなわち，４元数の定数γを決めたとき，漸化式

$$\zeta_{n+1} = \zeta_n{}^2 + \gamma \qquad (3)$$

によって定まる４元数列$\{\zeta_n\}$を４元数力学系とよぶ。４元数力学系と複素力学系の大きい相違のひとつはつぎに述べる対称性の存在である。αを零でない４元数とするとき，HからHへの写像 $\zeta \longmapsto \alpha\zeta\alpha^{-1}$ は和，積および絶対値を保存する。したがって，(3)における$\{\zeta_n\}$と、(3) に

おけるγを$\alpha\gamma\alpha^{-1}$で置き換えたときの$\{\alpha\zeta_n\alpha^{-1}\}$とは，上に述べたことから収束に関してはまったく同じ挙動をすることがわかる。(2)の右辺の第2項以下をζの虚部というが，［5］の命題108によると，上に述べた対応$\zeta \longmapsto \alpha\zeta\alpha^{-1}$　4元数の虚部の上に3次元の回転のなす群として作用しているという。したがって，γを上に述べた対称性を用いて$\gamma = a\mathbf{1} + b\mathbf{i}$　$(b \geqq 0)$の形と思ってよいことがわかる。マンデルブロ集合の定義を思い出せば，4元数力学系のマンデルブロ集合は事実上複素力学系のマンデルブロ集合を知れば，判ったも同然で，あまり独自の興味を引く存在ではないことがわかる。

したがって，以下の話は充填ジュリア集合に限ることにしよう。

4元数力学系の充填ジュリア集合は4次元空間$\mathbf{H}$の部分集合なので，パソコンのCRT上で観察するには2次元平面で切った切り口を眺めるのが常識的な考え方だろう。つぎの節でサンプル・プログラムを示しておくので興味をお持ちの方はそれを土台に色々な方向へと発展させて欲しいと思う。

4．サンプル・プログラム

以下に4元数力学系の充填ジュリア集合を2次元平面で切った切り口の画像を描くプログラムの実例を1つ示しておく。前にも述べたようにプログラムは非常に短く単純なのでBASICをご存じの方なら，容易に内容を解読できると思う。また，2節，3節をお読みになっていない方でもこのプログラムをコンピュータに入力されれば，充填ジュリア集合とはどのようなものかを視覚的に捉えることができるだろう。

また，ここに与えるプログラムは切る2次元平面を簡単なものにしてプログラムを見やすくなるように書いてあり，画像の美しさを狙ったものではない。

```
10 REM *** Filled Julia set ***
20 CLS 3:CONSOLE 0,25,0,1:screen 3,0
30 GAMMAX=0.43:GAMMAY=0.36
40 D=0.005
50 FOR U=-2 TO 2 STEP D
60 FOR V=-2 TO 2 STEP D
70 X=(U-V)/2:Y=(U+V)/2:Z=X:W=Y
80 N=0
90 X1=X*X-Y*Y-Z*Z-W*W+GAMMAX
100 Y1=X*Y*2+GAMMAY
110 Z1=X*Z*2:W1=X*W*2
120 NORM=X1*X1+Y1*Y1+Z1*Z1+W1*W1
130 IF NORM>4 GOTO 170
140 X=X1:Y=Y1:Z=Z1:W=W1:N=N+1
150 IF N<31 GOTO 90
160 PSET (150*U+300,-150*V+200)
170 NEXT V
180 NEXT U
190 END
```

このプログラムは

$$\gamma = 0.431 + 0.36\mathbf{i}$$

についての充填ジュリア集合を$xyzw$空間の中の2次元平面$x = z, y = w$で切った図形を与えている。BASICは［1］に準じた文法で書いてあるので，必要に応じてカラフルな美しい画像が得られるように手直しして頂きたい。さらに，このプログラムはまったくのサンプルであって，美しい画像を目的とした数値を与えてある訳ではない。

他の平面での切り口を見たい人のために若干のプログラムについてのコメントを与えておこう。上のプログラムの70行における位置ベクトル(X, Y, Z, W)の(U, V)による1次式の表示の係数ベクトルは共に単位ベクトルであって互いに直交している。そのように，2つの互いに直交する単位ベクトルを選ぶごとに，1つの平面による切り口が得られる。もちろん，小さい定数項を加えてよい。ご研究を期待したい。

5．　おわりに

本稿の主題は「フラクタル幾何学への誘い」だった筈であるが，フラクタルの定義すら示さなかったのは羊頭狗肉の誹りを免れないかも知れない。しかし，フラクタルの入門は，たとえば［1］のような1冊の書物に委ねられるべきであろう。本稿ではより実戦的に，前節で与えたBASIC のプログラムを主軸に据え，それをパソコンへ打ちこんで頂くことによって，視覚的にフラクタルの理解を目指したのである。

上において狗肉に擬せられた4元数力学系は本誌上に世界初公開されたのではないかと思うので，γの値を変えたり，U, V の係数ベクトルとなる互いに直交する2つの単位ベクトルを変えたりして世界でおそらくは始めて描かれる充填ジュリア集合の描像を十分に楽しんで頂きたい。

最後に文献表について一言しよう。［1］は上記のようにフラクタルの入門書であり，できれば本稿と併読して頂きたいと思う。

［2］は複素力学系の入門書であり，図版が多く楽しめる本ではないかと思う。

［3］は力学系については触れていないが，フラクタルの数学的理論の入門書である。［1］を読んでさらに数学的な理論を学びたい人に手頃だと思う。

最近刊行された［4］は複素力学系についての本格的な数学書である。この本を読むには，複素解析の素養が必要である。本稿で導入した4元数力学系についても［4］と同様な数学的理論の建設が強く期待されるところである。そのことはともかく，2節では2次式についてのみ述べた複素力学系が，一般の解析関数に拡張され，深く論じられる様をみることができる。

私が1年前まで在職した数学教室では宇敷重広，畑政義，木上淳，上田哲生らのこの分野の俊英と席を同じくしていた。かえりみて，あまりにも彼らから学ぶことがが少なかったことに思いを致し，自分の怠惰を強く悔いているところである。

大自然の中には，少なくとも図形的にみれば，滑らかな関数よりも，フラクタルとみる方が受け入れやすい事象で満ち満ちている。そして不思議なことにその両者が地下の目に見えにくいところで手をつないでいるらしい。理論はともかくパソコンで図形をいろいろ描かせているうちにその秘密が見えてこないだろうかと，本稿の執筆を思い立ったのだが，はたしてどうだったろうか。読者諸氏のご感想を寄せて頂きたいと思う。

参考文献

［1］石村貞夫・石村園子『フラクタル数学』東京図書　1990.

［2］宇敷重広『フラクタルの世界　入門・複素力学系』日本評論社，1987.

［3］山口昌哉・畑政義・木上淳『フラクタルの数理』岩波講座　応用数学　1993.

［4］上田哲生・谷口雅彦・諸沢俊介『複素力学系序説　フラクタルと複素解析』培風館　1995.

［5］横田一郎『群と位相』掌華房　1971.

（平成8年3月1日受理）