岡山大学算数・数学教育学会誌
『パピルス』第3号（1996年）25頁～36頁

動的に図形をとらえる教材の開発
－対話型図形学習ソフトを用いて－

岡山大学教育学部附属中学校　　川上　公一

コンピュータをはじめ，様々なテクノロジーを数学教育の中に取り入れようとする研究がなされ，多くの成果をあげている。特に図形の領域では作図ツールの開発が進み，理論的・実験的な研究がなされている。

このような様々なテクノロジーを幾何教育の中に取り入れようとする活動と，従来の学習活動との最も大きな違いは，図形を一つの固定したものとしてとらえるのではなく，変化するものとして「動的に図形をとらえる」見方である。

理論的・実験的な研究をもとに，実際の授業において「動的に図形をとらえる」ことの意義や方法を探り，それにふさわしい教材を開発するのが本稿のねらいである。

1　図形学習の困難の克服のために

中学校数学科における図形の指導では，図形に対する直観的な見方や考えを伸ばすとともに，図形の性質を数学的な推論の方法によって考察する過程を通して，論理的に思考する力を伸ばすことが求められている。しかしながら，図形に対して苦手意識を持つ生徒は他の領域に比べてかなり目立つ。そのため，図形の学習に対して興味・関心を持つことができず，論理的な思考まで高めていくことが困難であるのが現状である。その一つの原因として，図形領域においては与えられた命題を証明することに重点が置かれ過ぎていることがあげられる。

そこで，筆者は，単に与えられた命題を証明するのではなく，仮定や結論を示さず，図をかき，それを動かしたり，さまざまな検討をくわえることを通して，図形の中にある今まで気づかなかった条件や性質を見つけ出す活動に重点を置くことが重要であると考えた。

このことにより，生徒は「あれ，ふしぎだな。」「いつでも言えるかな。」「どうしてそうなるのだろう。」というように意識を高めていくことができ，それが論理的な推論への意欲につながっていくと考えたのである。

2　作図ツールソフトの活用

「動的に図形をとらえる」学習において，学ぶ道具として「作図ツール」といわれるコンピュータソフト（以下　作図ツールソフトという）を使用・活用することが効果的である。

従来，作図はコンパスと定規によってノートの上に行ってきた。作図ツールソフトでは，

図形はノートの上にかくのと同じような感覚でコマンドを選択することによりディスプレイ上に表示できる。作図ツールソフトの最大の特徴は，最初に定めた条件のもとで自由に点や線を動かしたり，形を変形したりできることである。また，図形の角の大きさや線分の長さを測定したり，軌跡を表示したりすることも可能である。これらの操作はアイコンやマウスの使用だけで行われる。

ノートの上の作図では，いったんかいた図形は形や条件を変化させることは不可能である。また，何通りもの図形をかくことにも困難がともなう。一方，作図ツールソフトでは自由に点や線を動かしたり，形を変形したりできるので，図は動くものであるという見方が前提となり動的に図形をとらえることができるようになる。したがって，生徒の直観的な見方や考え方を援助するとともに，生徒一人一人のもつイメージを簡単にディスプレイ上に表示し，図形の持つ性質や特徴を見つけやすくすることが可能である。このような作図ソフトのうち，本研究ではグルノーブル大学と筑波大学の共同開発によるＣａｂｒｉ－Ｇｅｏｍｅｔｒｙ（以下　カブリという）を使用する。

以下に具体的な授業実践の例を示し，考察を加える。

3　実践例１　２つの正三角形

(1) 授業の流れ

３時間で授業を計画した。第１時と第３時は教室で行い，第２時はパソコン教室で学習する。

第１時

次の学習課題を口頭で示し，ノートに図をかかせた。

> 正三角形ＡＢＣをかき，辺ＢＣ上に点Ｄをとる。また，辺ＡＤを１辺とする正三角形ＡＤＥをＣ側につくってみよう。

基本的な作図であるので，図は簡単にかけた。ところがノートにかいただけでは，なかなかいろいろな性質を発見することは難しい。そこでカブリを用いて作図し，点Ｄを辺ＢＣで動かしてみた。点Ｅは，直線上を動いていくことがわかる。

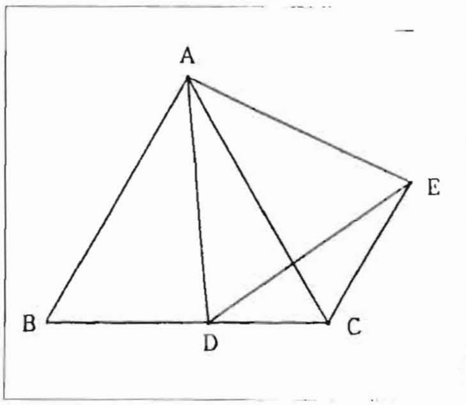

図１　２つの正三角形

自分たちが予想していなかった点Ｅの動きに，生徒たちは，「あれ，どうしてだろう」という気持ちをいだいた。∠ＡＣＥが６０度ということは，直観や測定を通して推測できる。これらの活動を行っているうちに「あれ，どうしてだろう」という気持ちが「理由を考えてみよう。」というように変容していった。「証明せよ」という指示をださなくても，生徒は自分たちから証明してみようという気持

ちになったのである。

第2時

以下の学習指導案に基づき，パソコン室で授業をおこなった。

学習活動	指導上の留意点	備考
1　本時の学習課題を確認する。	1　興味関心を持って意欲的に取り組ませる。	追求プリント 関　意欲的に追求できているか。
学習課題 正三角形ABCの辺BC上に点Dをとり，ADを1辺とする正三角形ADEをかきます。このとき∠ACEは □ 度でした。 このように，2つの同じ形の図形の一部をくっつけて図形をかくと，点を動かしても変化しない関係が出てきます。 問題の一部を変更して新しい関係を見つけましょう。		
2　学習課題を図で表現する。 (1) コンピュータで作図する。 (2) ∠ACEが60度であることを確認する。	2　記号等を工夫させ，分かりやすく表現させる。 (2) △ABDと△ACEに色をつけ，合同であることを確認させる。	パソコン 作図ソフト 表　パソコンが操作できるか。
3　問題の一部を変更して新しい関係を見つける。	3　変更内容を自由に発表させる。 例　・直線BC上にしたらどうなるか。 ・正三角形を正方形にしたらどうか。	
4　点Dが辺BC上でない場合を考える。	4　［関係取消］で点Dが辺BC上から切りはなす。	
点Dが辺BC上になかったらどうなるか考えてみよう。		
(1) 図を自由に変化させ，発見したことを発表する。 (2) BD＝CEがいつでも成り立つことを調べる。 (3) 図を追求プリントに写す。	(1) 内容を自由に発表させる。 (2) 図形を動かしたり，測定機能を使ったりするなど工夫させる。 (3) いろいろな位置にあることに気づかせ，そのうちの2種類を追求プリントにかかせる。	見　不変の性質を見つけられたか。
5　追求している時の気持を中心に学習を振り返って，追求プリントに記入する。	5　「どうしてそうなるだろう」という気持ちを大切にする。 ○　十分に時間を取り記述させる。 ○　数名を指名し，発表させる。	関　効力感や成就感を味わうことができたか。

第3時

第2時の証明を行った。△ABD≡△ACEを用いた証明を個人でしたのち，小集団にし，お互いの証明を比較させた。そのことによって，どのような位置にあっても同様の証明が成り立つことが理解できた。小集団で練り上げた内容を学級全体に発表させた。

さらにこの課題を発展させる。「この問題をもっと変えることはできないだろうか。」と発問し，他の見方ができないか考察させた。生徒は二等辺三角形や正方形ではどうだろうかと考えた。

いくつかの図形をカブリで表示し，いろいろな図形で同様の性質があることに気づかせる。カブリによる図形の表示や操作は生徒の手によって行わせる。

最後に評価テストを行い，3時間の学習のまとめをし，「追求プリント」の「気持ち」の欄を記入する。

(2) 追求プリントの記入例

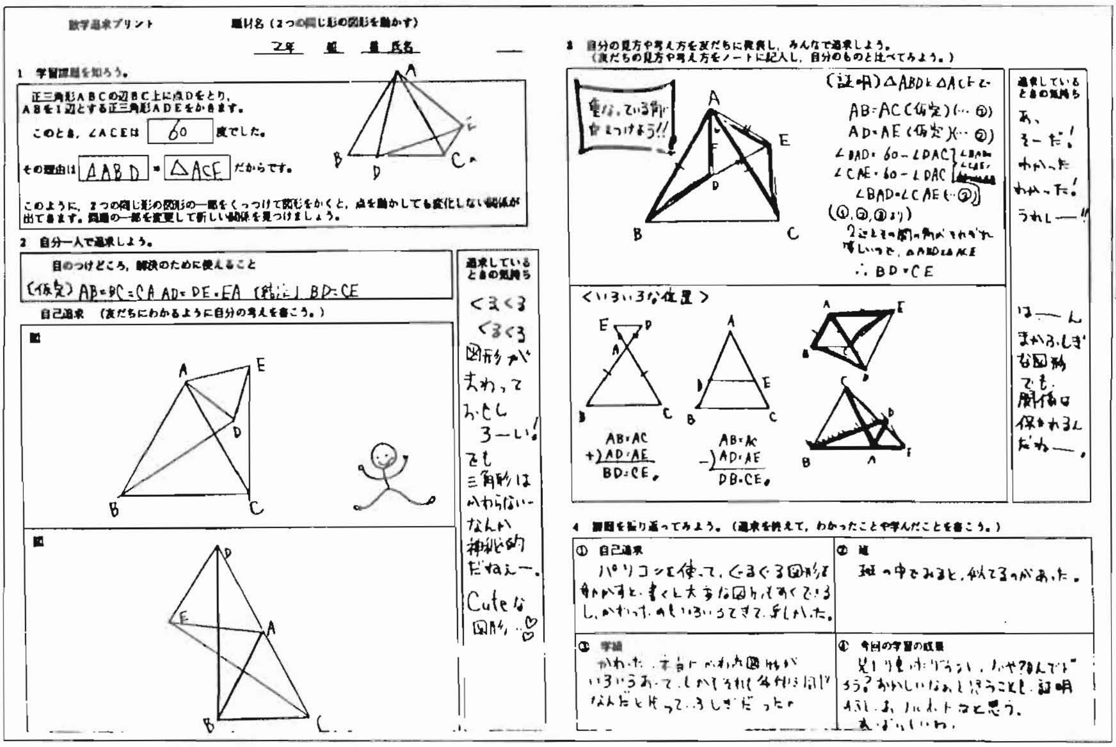

図2 追求プリント

(3) 考察

① カブリによる作図に関して

与えられた条件にしたがって，カブリで作図するのははじめての体験である。リテラシーで学習しなかった「色づけ」「名前」「関係の取消し」「関係つけ」「拡大・縮小」「測定」等の操作も抵抗なく自由に駆使することができた。

第1時に教室で実際に動かして ∠ACEが60度であることを確認し，証明もしていた

が，自分の手で作図し実際にマウスをドラッグして動かしてみると，本当に角度が変化しないことを実感して新鮮な驚きがでてきた。論証の初期の段階において生徒たちは自分が行った推論が，正しいか否かを確かめる手立てを生徒たちは持ちえていない。実際に図形を動かし，角度や長さを測定することを通して自分たちの推論の正しさを確かめているのである。

② 図形を動的にとらえることに関して

追求プリントには，学級全体で１５通りの２つの正三角形の位置関係が表れていた。小集団での追求を通して，２つの一般的な位置と，２つの特殊な位置に分類でき，同様の証明ができることに生徒たちは気づいた。追求プリントの「気持ち」記入例にも「いろいろな形を探すのも楽しかった。」「同じ設定の図形は同じ証明ができる。」等，動的に図形をとらえることのよさを感じている記述がみられる。

③ 証明に関して

追求プリントの「気持ち」記入例には，今回の学習の成果として証明に関して次の記述がみられた。「証明するのは，意外と難しいけど今回の授業で（特にコンピュータ）でわかりやすくなりました。」「今回学習した正三角形では同じ様に証明ができた。」「証明する時に重なっている角を意識すると証明しやすかった。」「証明が，分かるようになった。」「辺や角を見つけるとすぐ証明できることがわかった。」「こういう証明はこつをつかめば大丈夫だよね。」「全部違うような形をしているけど実際，証明する時には全部やり方は同じ。」「図形がもっと好きになった。証明のしかたが自分ののものにできた。柔軟になった。」

どうしていつも等しくなるのだろうかという生徒自身の中からわいてくる動機が，証明してみようという意識に結びついていると考えることができる。また，図形を動かしていくなかで等しい辺や角が明確になり，初期の段階で論証の推論の進め方を体験的に身につけていくことができてきた。特に下位の生徒にとっては，合同な三角形を色をつけて表示することが理解を助けている。

４ 実践例２ 宝さがし

(1) 授業のねらい

図形の学習においては，証明することだけでなく図形のいろいろな性質を発見し，そのふしぎさや美しさを感じることも重要である。図形を動かしても，変化しないものがあるというような意外性のある学習課題を取り入れた。

(2) 授業の流れ

以下の学習指導案に基つき，パソコン室で授業をおこなった。

学　習　活　動	指　導　上　の　留　意　点	備　考
1　本時の学習課題を確認する。	1　興味関心を持って意欲的に取り組ませる。	追求プリント 関　意欲的に追求できているか。
学習課題 次のような古文書があります。これをもとに宝探しをしよう。 ある島に，井戸と松の木と梅の木がある。井戸から松の木へ線分を引け。そこから右へ９０度曲がり，同じ長さだけ進み，そこに杭を打て。井戸から梅の木へ線分を引け。そこから左へ９０度曲がり，同じ長さだけ進み，そこに杭を打て。　２本の杭の中点に宝は隠されている。		
2　学習課題を図で表現する。 (1) 定規とコンパスで作図する。 (2) コンピュータで作図する。	2　記号等を工夫させ，分かりやすく表現させる。 (2) ソフトの使用方法の理解が不十分なグループは，机間指導で支援する。	表　作図ができるか。 表　パソコンが操作できるか。
3　井戸がないときの宝物の位置を考える。	3　条件を減らすことにより，学習課題を発展させる。	
ところが，実際に島へいってみると，あるのは松の木と梅の木だけ。井戸ももちろん杭もなかった。井戸は埋まってしまったらしい。さあ，君は宝物を発見できるか。		見　不変の性質を見つけられたか。
(1) コンピュータの図を変化させ宝物を発見する方法を考える。 (2) 松の木と梅の木から宝物の位置を決定する。	(1) 井戸の位置がどこにあっても，宝物の位置は変わらないことに気づかせる。 (2) 井戸の位置を特殊化すると宝物の位置が簡単な作図で求められることに気づかせる。 ○　作図例を，いくつか発表させる。	見　井戸を考えやすい場所に移すことができたか。
4　まとめをする。 (1) 教師の説明を聞く。 (2) 追求している時の気持を中心に学習を振り返って，追求プリントに記入する。	4　多様な見方や考え方ができることのよさを中心に説明する。 (2) 「どうしてそうなるだろう」という気持ちを大切にする。 ○　十分に時間を取り記述させる。	関　効力感や成就感を味わうことができたか。

(3) 生徒の発表例

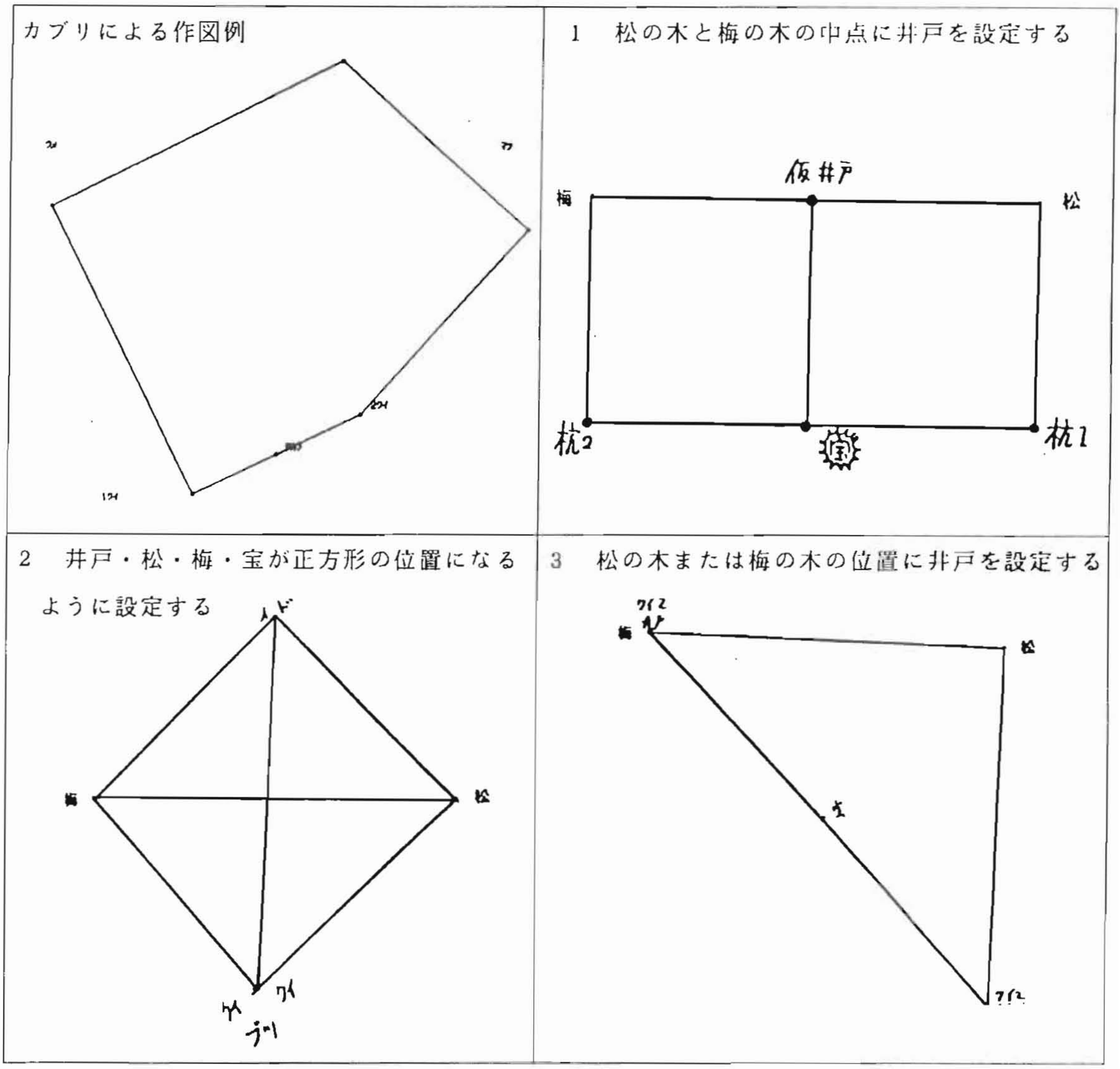

図4　宝探しの作図例

(4) 追求プリントの「気持ち」記入例

○　どうしてだ。証明を考えてみよう。
○　証明がすぐできなくて残念。
○　おもしろかった。上の図の梅とクイ2の間にひいた線分の長さと梅と松の間にひいた線分が等しいことがわかれば証明できるかな？

○　宝の中身は何だろう。
○　パソコンを使うとおもしろい。でもすこし問題も。中点や線分などでも簡単にかけ動かすことによって場所がかわらないなどいろいろなことがわかった。

○　なぜ，宝の位置が動かないのかどうやったら証明できるのか考えていきたい。 ○　なぜ宝物は動かないんだ？気になるなあ。必ず中点に宝があるというのがポイントかな ○　正三角形の時３点ＡＢＣは動かなかった。今回も梅・松は動いていなかった。 ○　９０度を使えばできそうである。コンピュータを使うとわかりやすい。 ○　すごくおもしろかった。お宝が動かんかったのが不思議なので証明したい。 ○　おもしろかった。イドをいくら動かしてもおたからはうごかなかった。そういうのでコンピュータをつかうとすごくわかりやすかった。	○　井戸を動かしても宝梅松は動いていない。だから，この３つの点を使って考えていけば証明できるかも知れない。 ○　すごくおもしろい自由に動かせるのがすばらしい。 ○　思いもしなかったことが発見できた。 ○　証明はやっててたのしい。でもできない。 ○　直角二等辺三角形がポイントみたいだ。 ○　すごく，なんか解けそうな感じなんだけど・・・後すこしって感じ。 ○　宝と井戸の関係は本当にないのだろうか。 ○　できかけていたかもしれないが時間切れ非常に残念。コンピュータを使うと紙にかいて考えたのでは気がつかない物を発見できる。

(5) 考察

① カブリによる作図に関して

カブリによる作図は３時間目である。生徒は，定規とコンパスでノートに作図するのと同じ程度の時間でカブリを操作することができた。「井戸がなかったら」という条件の提示に対して，「図形の削除」で井戸を消してしまう生徒がおり，その結果杭も宝もすべて消えてしまうこととなった。

井戸を動かしても宝の位置は変化しないということは試行錯誤を繰り返すうちに，偶然発見される。ノートにかいた図形からは想像もつかない事態に生徒たちは驚きを示す。

こういった驚きが「どうしてだろう。証明してみたい。」という意欲につながっていくのである。

② 図形を動的にとらえることに関して

筆者は，あるものが変化することにともなって他のものが変化していくような関係を"関数的な変化の関係"，あるものが変化するにもかかわらず一定の変化しないものがあるというような関係を"幾何的な変化の関係"ととらえている。この「学習課題」は幾何的な変化の関係の典型的な一例である。図形の学習においては，証明するということだけでなく，図形の持つふしぎな，また美しい性質を発見したり鑑賞したりすることも大切であると考えているが，この「学習課題」を動的にとらえることにより，「すごくおもしろい。自由に動かせるのがすばらしい。」「すごくおもしろかった。お宝が動かんかったのが不思議なので証明したい。」等，多くの生徒が

図形の持つふしぎさや美しさを体感することができた。

③　証明に関して

宝が動かないことの証明は，非常に難しい。しかしながら，生徒たちは証明したいという意欲を示す。与えられた命題によってでなく，自らの「どうしてだろう」という興味がそれを支えるのである。「正三角形の時3点ＡＢＣは動かなかった。今回も梅・松は動いていなかった。」「直角二等辺三角形がポイントみたいだ。」「９０度を使えばできそうである。」「井戸を動かしても宝梅松は動いていない。だから，この3つの点を使って考えていけば証明できるかも知れない。」など推論の見通しを持つことができた。

このような関係を見つけたり，推測を自由に行たりすることを通して洞察力が発達していくことが期待できる。常に正答のみが大切なのではなく，その過程にこそ価値があるのである。

5　教室でカブリをつかう

動的に図形をとらえるために，学習環境としてのコンピュータを日常的な授業の中にも積極的に活用していく。単元「図形と合同」において，実践例１，２以外に次のような場面でカブリを使用した。

(1)　合同条件を使って

正方形ＡＢＣＤの頂点Ａから直線をひきなさい。Ｂ，Ｄから垂線ＢＥ，ＤＦをひきなさい。どんな関係が見つかりますか。

２通りあるので好きな方で証明させる。カブリで動かしてみると，２通りの図の関連がはっきりしてくる。また，証明の理解が十分でない生徒には，動かすことによって等しい角がよりはっきりと見えてくるので理解を助けることにもなった。

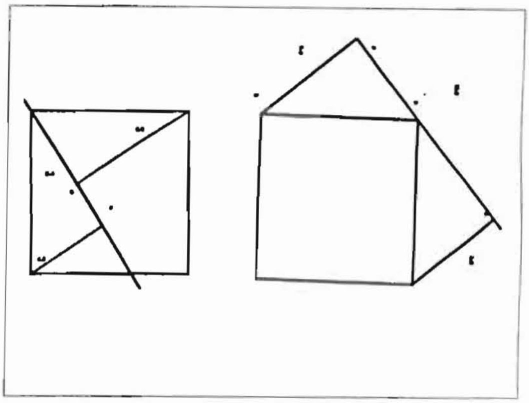

図４　正方形と直線

(2)　平行四辺形になる条件

ある条件さえみたしていれば，図形を動かしても常に成り立つ関係がある。動的にとらえることが求められる教材である。たとえば，「対角線が互いの中点で交わる四角形は平行四辺形である。」ということを単なる知識として理解させることが必要なのではなく，実際に条件にあうような図をかき，いつでも平行四辺形であることを確認してから「どうしてだろう」と考えていくことが重要である。

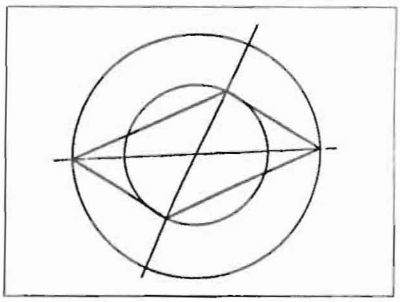

図５　２円でできる平行四辺形

(3) 長方形とひし形

四角形の4辺の中点を結ぶときにできる図形，4角の二等分線によって囲まれる図形は，次の関係がある。

	辺の中点	角の二等分
四角形	＊平行四辺形	円に内接
平行四辺形	平行四辺形	＊長方形
長方形	＊ひし形	＊正方形
ひし形	＊長方形	点
正方形	＊正方形	点

このうちの＊のつけた図形について，具体的に紙を折る活動とカブリによる確認作業を組合わせて授業を展開した。

6　動的に図形をとらえることの効果

(1) 事例から

「図形の調べ方」「図形と合同」の2つの単元について動的に図形をとらえることに重点を置き

指導したところ次のような反応が見られた。

事例1　他の場面でも図形を動的にとらえようとした例　（中位の生徒）

三角形の中に平行四辺形をつくる活動において，図6のような平行四辺形を考えた。辺ＢＣ上に点Ｐをとる。ＢＰの中点をＭ，ＣＰの中点をＮとするとき，ＢＣ上ならばどこであっても四角形ＲＭＮＱは平行四辺形となり，四角形ＲＰＣＱが平行四辺形となるのはその特殊な例であることを発見した。図形を動的にとらえることにより，一般化が図られた例である。

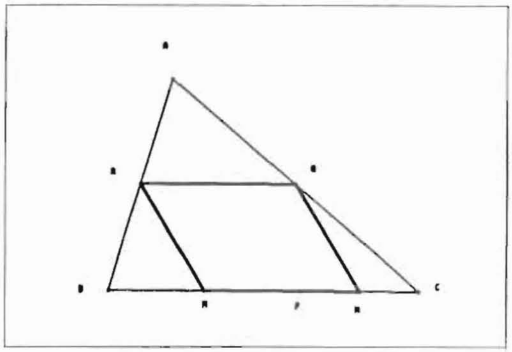

図6　三角形と平行四辺形

事例2　図形を動的にとらえることが証明の技能となった例　（上位の生徒）

宝が動かないことの証明において，(1)井戸を松梅の中点に置き，垂直二等分線上を動くときの杭の動きの様子と(2)垂直二等分線上の点からさらに松梅に平行に動くときの杭の動きの様子とに分けて宝の位置を検討していく考え方である。図形を動的にとらえることを発展させ，図形の証明に座標平面の見方や考え方を取り入れようとしている。

事例3　図形を動的にとらえることが証明への意欲となった例（下位の生徒）

長方形の角の二等分線によってできる図形が正方形になることの証明である。「図の上下の直角二等辺三角形が合同，左の三角形も直角二等辺三角形だから正方形になる。」と授業終了後，うれしそうに自信をもって告げにきた。証明としてきちんと数学的に表現することはできなくても，図を直観的にとらえ，論理的に思考することができた例である。テレビの正面に座っていて，じっと見ているうちに「自然に見えてきた。」と気持ちを表現している。証明という形にこだわらず

自分なりに推論を組み立てている。「計算するより図形の方がいい」と図形に対する苦手意識はない。

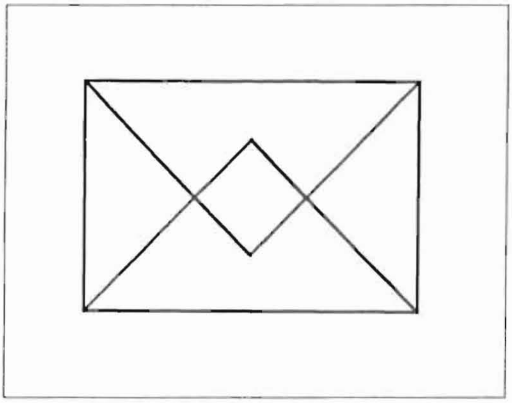

図７　長方形の角の二等分

(2) 動的に図形をとらえることの効果

① 図形を動かしていく過程で，今まで気づかなかった新たな発見ができること

身近にあるいろいろな図形には，あまり気づかないいろいろな性質がある。普段見ている図形の中にも「あれ，そんなことがいえるのか。」と思うような意外な側面がある。こういった性質のうちの多くは，与えられた図を見ているだけでは気づかないことが多い。動的に図形をとらえることによって初めて多くの性質を自分たちの手で発見できたのである。

② 試行錯誤を通して，数学的な見方や考え方ができるようになること

追求活動の過程を大切にするためには，様々な試行錯誤を通して必要な情報や条件を取捨選択していくことが重要である。図形を何通りもノートにかいていくことは困難がともなう。しかしカブリでは，幾通りでもしかも連続的にかくことができる。生徒たちは自由に線分の長さや角の大きさを測定する活動を積極的に行った。作図ソフトの出現により，命題を実験して予測し，試行錯誤を繰り返して学習することが可能となったわけである。

③ 直観的にとらえたものを論理的に再構築し，それを確かめることができるようになること

直観的にとらえたものを，論理的な図形の把握に発展させていくために，実際に測定したり，目的の図形に色をつけて動かしたりすることは論証の初期の段階において有効であることが明らかになった。また，この段階では自分が行った推論が正しいか否かを確かめる手立てを生徒たちは持ちえていない。実際に図形を動かし，角度や長さを測定することを通して自分たちの推論の正しさを確かめることも可能になった。

④ 証明したいという意欲を高めることができたこと

図をかき，それを動かしたりさまざまな検討を加えたりすることにより，「どうしてそうなるだろう」という気持ちを抱くようになった。このような図形に対する興味関心をもとに，証明に対する意欲をを引き出すことができた。

8　今後への発展と課題

(1) 思考実験の必要性

便利だからといっていきなりカブリをつかうというのではなく，まず予想する・予測するという活動を取り入れていかなければなら

ない。見通しをもってコンピュータを操作することによって，動的に図形をとらえることのよさがさらに明確になっていくであろう。

② 軌跡の見方考え方をとりいれていくこと

あるものが変化するにもかかわらず変化しない一定のものがあるというような関係に焦点をあてたが，動的に図形をとらえるとき，動いた後はどうなっているだろうかという視点も必要である。こういった軌跡の見方考え方を伸ばしていくためにもカブリの使用は有効であると思われる。

写真1　パソコン室でカブリを使う

参考文献

清水克彦，コンピュータの利用によって具体化される新しい幾何学習，1991，日本科学教育学会

垣花京子，幾何学習における図形ソフトCabri-Geometry’の効果に関する実験研究，1992

相馬一彦，「予想」を取り入れた数学授業の改善，1995，明治図書

飯島康之他，コンピュータで数学授業を変えよう，1995，明治図書

Meseve & Sobel，これからの数学，1967，培風館

＊　実践例1は，「予想」を取り入れた数学授業の改善P11に示されている問題を参考にした。

＊　実践例2は，Tommy Drefus, Theodore Eisenberg, On the Aesthetics of Mathmatical Thought,　For the Learning of Mathmatics 6,1　,1986 に示されている問題を参考にした。

＊　本研究にあたっては，平成7年度福武教育振興財団より，助成をいただきました。

（平成8年2月20日受理）