岡山大学算数・数学教育学会誌
『パピルス』第6号（1999年）81頁〜90頁

「例からの学習」とその数学教育への応用

小椋利恵
岡山県立津山商業高等学校

研究の要約

例からの学習(learning by examples) とは，帰納的推論（与えられた個々の具体例から，一般的な規則を推測する過程）の一種である．例からの学習では，個々の具体例に当たるものとして，学ぶべき概念に該当する例(正の例)，あるいは該当しない例（負の例）を受け取ることによって学習を進める．本研究では，この例からの学習のうち，**同定問題**(identification problem) と呼ばれる研究分野について取り上げ，同定問題の数学教育への応用として，「教師が生徒の理解状況を学習する」という観点から，評価活動の例を提案する．

1　同定問題の数学的定式化および目的について

同定問題とは，学習すべき概念を同定する手続きを設計するに当たって準備しておくべき条件の組を指す．同定問題は基本的に，次の3つの要素から成る．学ぶべき概念（目標）を含む集合 $\mathcal{D}$ は対象領域と呼ばれる．対象領域中のそれぞれの対象はそれぞれ少なくとも1つの表現と呼ばれるものを持っている．これは写像 h によって，それぞれの対象との対応づけがなされており，この表現の集合が $\mathcal{E}$ である．

同定問題の最終的目的は，次のような手続きを設計することである．その手続きとは，(対象領域中のどんな誤った例も除外できるほど）十分な例が手続きに与えられるとき，対象領域中のどの要素を目標としてもその目標（d_0）を同定でき，その結果を表すのに，写像 h で d_0に対応している表現（$e_0 \in \mathcal{E}$）を用いるというものである．

定義 1
同定問題(identification problem) とは4つの組 $\langle(\mathcal{D}, \geq), \mathcal{E}, h, GE?\rangle$ である．ここで，

- $\mathcal{D}$ は半順序関係$\geq$をもつ任意の集合
- $\mathcal{E}$ は帰納的枚挙可能な集合
- h は $h : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ の写像で全射
- $GE?$は半順序$\geq$に関するオラクル[1]と呼ばれる関数で，

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{E}\times\mathcal{E} & \to & \{yes, no\} \\ (e_1, e_2) & \mapsto & \begin{cases} yes & (h(e_1) \geq h(e_2) \text{ のとき}) \\ no & (h(e_1) \not\geq h(e_2) \text{ のとき}) \end{cases} \end{array}$$

で定められている．同定問題の**実例**(instance) とは，$\langle d_0, EX\rangle$ なる対である．ここで，

- $d_0 \in \mathcal{D}$ は同定される目標の要素 (対象)
- EX は d_0の訓練例 (traning example)（以下の定義2で説明する）を返すオラクル[2]

[1] oracle:神託
[2] 何か入力を必要とするものではなく，単に問い合わせに対して訓練例を返すというオラクル

$$EX : \{*\} \rightarrow S$$
$$\mapsto \langle s, e\rangle$$

同定問題の最終的な目的は，次のような手続きを設計することである．(対象領域中のどんな誤った対象も除外できるほど) 十分な例が与えられるとき，任意に与えられた目標 d_0 ($\in \mathcal{D}$) に対して，$h(e_0) = d_0$であるような表現e_0を出力する，というものである．

また，同定問題では，$\mathcal{E}$ 中の表現に符号を与えることにより，例として用いる．具体的には以下の定義により定める．

定義 2
$\mathcal{E}$ を表現の集合，$d_0 \in \mathcal{D}$ を同定問題の目標とする．**(訓練) 例**とは符号つき表現$\langle s, e\rangle$(ここで，$s \in \{+, -\}, e \in \mathcal{E}$) であり，以下を満たす．

- s が+のとき，$d_0 \geq h(e)$
- s が−のとき，$d_0 \not\geq h(e)$

対象に関する例は，ある規則に従い，その問題の世界に無償で提供される．(オラクル EX) また，オラクル GE?は背後にある半順序関係に関する情報を学習者に与えるものである．これらのオラクルを仮定することにより，これらの情報を計算するのに伴う複雑さの問題に立ち入らないですませることができる．(主に [1] を参照した.)

2 例からの学習の数学教育への応用

例からの学習を数学教育のうちの評価に応用しようと考えた動機は，2 つのヒントからである．1 つは学習者=生徒とは限らず，教師が学習するということも考えてよいのではないかということ，そしてもう 1 つは，学習構造チャートと呼ばれるものである．

2.1 学習構造チャートについて

学習構造チャートとは，学習内容の構造的関連を各学習要素を矢線で結ぶことによって表しチャート化したものである．例えば，図 1 は本研究過程において筆者が作成した，高等学校 数学 I 「図形と計量」分野の学習構造チャートである．学習構造チャートにおいては，$c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ とするとき，$c_1 \rightarrow c_2$ (矢線) でc_2がc_1の上位要素であることを表している．チャートの作成は ISM(Interpretive Structural Modeling) 教材構造化法 (文献 [4] 参照) の手順に従って行った．

学習内容を理解するということは各生徒が頭の中で，学習要素を構造的に組み立てることであるといえる．このことから，各生徒の理解構造は，おのおのこの学習構造チャートの一部分 (これを「**理解チャート**」と呼ぶことにする.) であると捉え，これを同定する手続きを設計することを目標に研究を進めた．

本研究では，具体例として，東京書籍『数学 I』(文献 [3]) の教科書を用いて，各章の学習構造チャートを作成し，この章の理解チャートを同定するための同定問題を定めた．すなわち目標 (d_0) が理解チャートである．

また，評価の方法としては，ペーパーテストを採用するものとし，テスト問題を対象の表現として用いることを考えた．

2.2 理解チャート同定問題の状況設定

具体的な対象領域 $\mathcal{D}$，対象の表現 $\mathcal{E}$，写像 h については以下の図のように定義していった．

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
j:\ \mathcal{P} \arrow[r] \arrow[ddd, "p"] & \mathcal{C} \arrow[d, "c"] \\
 & \mathcal{F} \arrow[d, "f"] \\
 & \\
h:\ \mathcal{E} \arrow[r] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{P}$	:	テスト問題全体の集合
$\mathcal{C}$	:	(学習構造チャートの) 学習要素全体の集合
j	:	$\mathcal{P} \to \mathcal{C}$ テスト問題からその問題によって代表される学習要素への写像
$\mathcal{F}$	:	お互いに矢線でつながらない $\mathcal{C}$ の元の集合の集合
$\mathcal{D}$	:	$f\ (\in \mathcal{F})$ をすべて含み, 矢線をさかのぼって通るすべての学習要素の集合のうち最小のもの
f	:	$\mathcal{F} \to \mathcal{D}$ $f(\in \mathcal{F})$ から f を含む最小の $d(\subset \mathcal{C})$ への写像
$\mathcal{E}$	:	$\mathcal{P}$ の部分集合全体の集合
h	:	$\mathcal{E} \to \mathcal{D}$ $e \in \mathcal{E}$ から $j(e) \in \mathcal{C}$ を含む最小の $\mathcal{D}$ の元 d へ写す写像

$\mathcal{D}$ 上の半順序$\geq$については集合の包含関係$\supseteq$を入れる.

また, 同定問題では, 表現に符号を与えて例として用いる. ここでは, ある表現 $e \in \mathcal{E}$ 中のすべての問題に生徒が正解したことを正の例, それ以外を負の例と定める.

以上のことを定義しておけば, 生徒の理解チャートの同定を行うことが可能である. 実際には, テスト問題のうち, 生徒が正解したすべての問題の集合がその生徒の理解チャートに対応する表現になっている.

一般に目標を同定するための手続きは, ある規則 (オラクル EX) によって, 1つずつ例を受け取り, そのつどそれまでに受け取ったすべての例を説明する (半順序に関する情報を手続きに与えるオラクル $GE?$によって判断できる) ような表現を出力する, という動作をする. 本研究では理解チャートを同定するために, 例の提示法としてペーパーテストを採用したため, 1度にすべての例が与えられる. この意味では, 例からの学習理論をうまく応用したものであるとはいえないと思われる. しかしながら, 例からの学習の理論を適用することによって, 生徒の理解の状況を構造的に表すという, 新しい観点から学習構造チャートをみることができたという点で, 意味はあったと考えている.

具体的に「6章 図形と計量」について,

$$\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \cdots, c_{10}\}$$

$$\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \cdots, p_{18}\}$$

となる. また,

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{c} \phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\} \\ \{9\}, \{10\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{4,5\} \\ \{4,6\}, \{5,6\}, \{5,7\}, \{5,8\}, \{5,9\} \\ \{5,10\}, \{6,7\}, \{2,5,6\}, \{4,5,6\}, \{5,6,7\} \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{D} = \{f(\{\phi\}), f(\{1\}), f(\{2\}), \cdots, f(\{5,6,7\})\}$$

(図1, 図2, 図3, 図4 参照)

本来, 教材の構造化やテスト問題の作成は生徒の実態や, 指導方針に応じてなされるべきものである. 本研究では, 学習指導要領を踏まえ, 教科書に忠実なもの, を心がけて学習構造チャート, テスト問題を作成した. これらを客観的に意味のあるものとするために, 学習構造チャートについては, それぞれの矢線に理由付けを, テスト問題については評価の内容とその観点を明確にするようにした. これらを, (表1, 表2 参照)

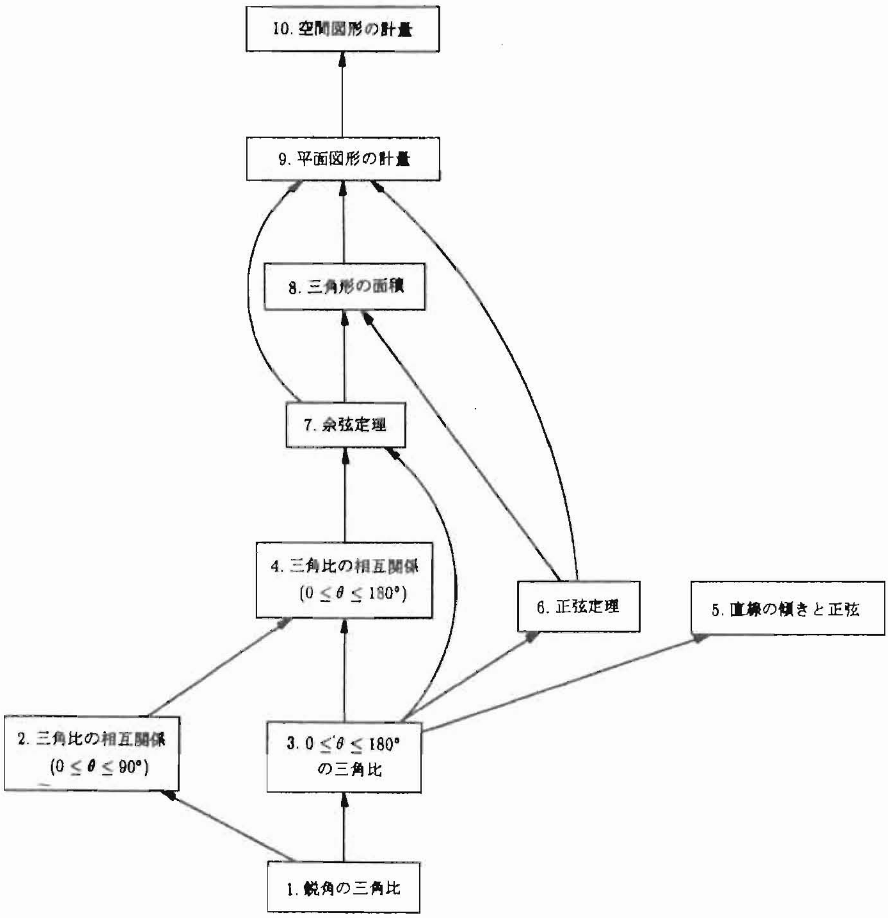


図 1: 「6 章 図形と計量」学習構造チャート

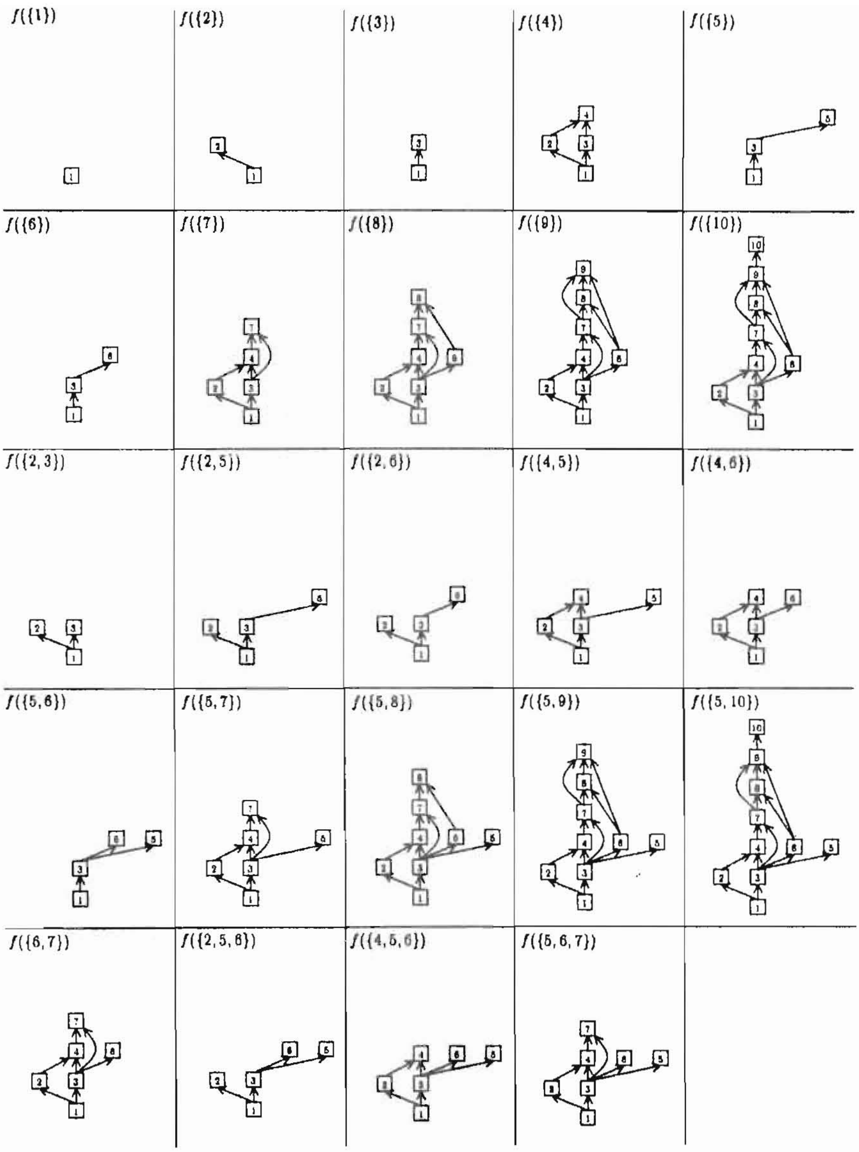
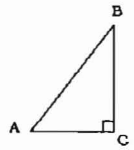


図 2: 「6 章 図形と計量」の対象 $\mathcal{D}$

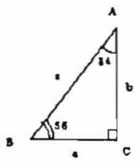
「6章 図形と計量」 テスト問題

1. 次の図で，$\sin A, \cos A, \tan A$ を求めよ．
(c_1に対応)



2. (1) の図を参考にして，次の三角比を 45° 以下の三角比で表せ．(c_2)

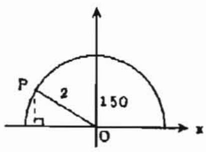
(1) $\sin 56°$



(2) $\cos 87°$

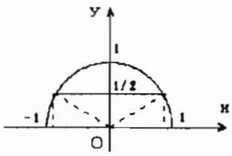
(3) $\tan 72°$

3. 次の図を用いて，150° の三角比を求めよ．(c_3)



4. (1) の図も参考にして，次の等式を満たす角θを求めよ．(c_3)

(1) $\sin\theta = \frac{1}{2}$



(2) $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\tan\theta = -\sqrt{3}$

5. $\sin\theta = \frac{3}{5}$であるとき，$\cos\theta, \tan\theta$の値を求めよ．ただし，$0° \leq \theta \leq 180°$とする．(c_4)

6. 図を参考にして，直線$\sqrt{3}x - y = 0$ が x 軸の正の向きとつくる角を求めよ．(c_5)

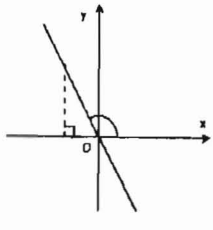


図 3: 「6章 図形と計量」のテスト問題 (1)

7. $\triangle ABC$ において，$a=12, A=45°, B=60°$ のとき，正弦定理を用いてこの三角形の外接円の半径 R を求めよ．また，b を求めよ．(c_6)

8. $\triangle ABC$ において，$a=3, b=7, c=5$ のとき，余弦定理を用いて $\cos B$ の値を求めよ．(c_7)

9. 次の $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ．(c_8)

10. 次の問に答えよ．(c_9)

(1) 「$\triangle ABC$ において $a=2, b=\sqrt{3}+1$, $C=30°$ のとき，c, A, B を求めよ.」この問題について，何を最初に求め，そのときどんな定理を使うか，正しい組合せを，以下のうちから選べ.

a　c　・余弦定理

b　A　・正弦定理

c　B　・正弦定理

d　わからない

(2) $\triangle ABC$ において，B, C, a がわかっているとき,b を求めたい．このとき，次のうちどちらの定理を使えばよいか選べ.

a 正弦定理

b 余弦定理

c わからない

11. 長さ 1000 m の基線 AB がある．A における山頂 C の仰角が 30°，A から B と C を見込む角 $\angle BAC$ が 75°，B から A と C を見込む角 $\angle ABC$ が 45° のとき，A を通る水平面からの山頂 C の高さを求めよ．(c_{10})

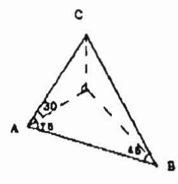


図 4: 「6 章 図形と計量」のテスト問題 (2)

矢線	矢線の理由
$1 \to 2$	直角三角形の辺と角の基本的な関係
$1 \to 3$	鋭角の三角比の拡張（三角比相互の基本的な関係）
$2 \to 4$	鋭角のときに成立した三角比の相互関係を $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ まで拡張
$3 \to 4$	三角比相互の基本的な関係
$3 \to 5$	直線 $y = mx + b$ が x 軸と作る角αについて $m = \tan\alpha$
$3 \to 6$	正弦に関する定理
$3 \to 6$	余弦に関する定理
$4 \to 7$	余弦定理の証明に $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ を用いる
$6 \to 8$	1 辺と 2 角を与えて面積を求める問題等で正弦定理を用いる
$6 \to 9$	三角形の決定等で正弦定理を用いる
$7 \to 8$	3 辺を与えて面積を求める問題で余弦定理を用いる
$7 \to 9$	三角形の決定等で余弦定理を用いる
$8 \to 9$	具体的な平面図形における面積を求める場合に面積の公式を用いる
$9 \to 10$	具体的な空間図形で平面に置き換えて計量する場合に必要

表 1: 「6 章 図形と計量」の学習構造チャートの矢線理由

評価内容	評価の観点
鋭角の三角比	直角三角形の辺の比と角の関係としての正接，正弦，余弦の意味を理解し，定義に従って三角比値を求めることができるか．
三角比の相互関係　($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$)	直角三角形の辺と角の基本的な関係を使うことができるか．ただし，次のような基本的な関係を取り扱う． • $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ • $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ • $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ • $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ の三角比	三角比を，角が鈍角あるいは $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ の場合まで拡張し， • 座標平面を利用して，三角比の値を求めることができるか． • 座標平面を利用して，正弦や余弦の三角比の値から，その角を求めることができるか．
三角比の相互関係　($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$)	拡張した三角比相互の基本的な関係を応用できるか．ただし，次のような基本的関係を取り扱う． • $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ • $\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$ • $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ • $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
直線の傾きと正接	直線の傾きと，その直線が x 軸の正の向きと作る角 α の関係を理解し，その一方を他方を用いて求めることができるか．
正弦定理・余弦定理・三角形の面積	一般の三角形の辺と角との間に成立する正弦定理，余弦定理，三角形の面積の公式を理解し，それらを活用できるか．
平面・空間図形の計量	具体的な平面図形や空間図形における線分の長さ角の大きさ，面積，体積の計算に正弦定理や余弦定理などの三角比を活用できるか．

表 2: 「6 章 図形と計量」の評価内容と評価の観点

2.3 反省・問題点・今後の研究課題について

研究を終えて残された課題や，今後の研究目標について述べる.

1. 学習構造チャートの妥当性
2. テスト問題の妥当性
3. 訓練例にノイズが入った場合についての検討

1., 2. については，筆者自身に教育現場での経験がなく，また数学教育についての学習もまだまだ十分でないため，今回作成した学習構造チャート，テスト問題の客観的妥当性は測れなかった．今後より多くのことを学び，教材研究を進めていく必要があると強く感じている.

また，3. に挙げたノイズの問題は，筆者が最後まで解決したくて，かなわなかった問題である．研究では，例にノイズが入らないように，テスト問題を作成する際にいろいろな留意点を設けてはみたものの，やはりノイズが 0 となることは考えにくい．枚挙による同定アルゴリズムの場合，ノイズが入った時点で正しい仮説が捨てられてしまうという危険性があり，結果として，本研究で提案した評価活動が実用に耐えるとは言い難いものになってしまった．このことについては，実際には研究が進められており，本研究でまとめられなかったことが悔やまれる.

最後に，数学教育での評価活動においてより重要なのは，客観的な生徒の理解状況が得られた後にその結果をいかに以後の指導に反映させるかであるといえます．したがって，本研究で求めることができた，各生徒の理解チャートを，具体的にどのように指導に生かせるかの考察がこれからの研究目標となると考えている.

参考文献

[1] Philip D. Laird 著 横森 貴 訳『例からの学習 -計算論的学習理論-』(オーム社，1992 年)

[2] 文部省『高等学校指導要領解説 数学編・理数編』(ぎょうせい，1994 年)

[3] 藤田宏・前原昭二 [ほか] 著『数学 I』(東京書籍，1995 年)

[4] 佐藤隆博 著『授業設計と評価のデータ処理技法 -ISM 教材構造化法と S-P 表の活用法-』(明治図書，1980 年)

(平成１１年５月７日受理)