

文字式の初期指導の□や△の指導についての実践研究

－ 変数の考えを重視して －

圓 井 大 介*

研究の要約

自然科学だけでなく、社会科学や人文科学など様々な分野にまで算数・数学が応用されており、我々に求められているのは単なる記憶や知識ではなく、それらを活用して、一般的・普遍的な法則を発見し、利用していく力である。これはまさに関数的な見方・考え方であり、関数概念を育成していくことが急務である。そこで、本研究では、「文字式」の理解を確かなものにするために文字式の初期指導である□や△の指導についての実践を述べる。

1 はじめに

平成20年3月に新学習指導要領が告示され、前回と同様、「生きる力」を育むという理念は共有され、これからの教育の方向性が示された。

この変化の激しい時代にあって、物事と物事を関係づけて見たり、それらの間に規則性があるのかないのかを探ったりする力は、この変化の激しい時代を主体的に生きるために不可欠な力である。こうした物事を関係づける見方は、まさに、関数的な見方・考え方であり、これを育成することが「生きる力」を育てることにつながる。特に、今回の改訂により新設された「文字式」につながる関数的な見方・考え方をどのように育成すればよいかは喫緊の課題である。

2 関数関係を「式」で表すことについて

関数関係は、全て式で表すことができるとは限らない。式で表せない場合もあるし、式で表すことができるが、式ではなく表やグラフで表す方がよい場合もある。しかし、式で表すことによって、変化や対応の関係が調べやすくなる。また、科学的に分析を進め、数学的な考察を行ったり、精確な数値を求めたりするには式で表されている方が都合がよい。2つの数量の間にある関数関係を式で表していくことは関数的な見方・考え方を育成していく上で重要な視点の一つである。

3 文字指導の意義

数学における式とは、外界における様々な事象を、数学の世界に乗せて表現し、説明するものである。このような式には、数だけの式、言葉の式、公式、□や△を用いた式、文字式などがあるが、その中でも文字式が最も優れている。それは、文字式に次のような有用性があるからである。

- ①数量の関係を簡潔に表現できること
- ②数値計算などが能率的に行えること
- ③具体から離れて、抽象化した世界で解決が行えること
- ④一般化が容易であること
- ⑤形式的操作が可能であること
- ⑥式の形に着目することで異同の統合が可能であること
- ⑦今後の数学学習の基礎であること

このような多くの有用性をもつ文字式と他の式とを比較してみると、特筆すべきことは他のどの式よりも「抽象化された式」ということである。事象を科学的に考察し、正確に表していくには、具体的ではなく抽象的にならざるをえない。そのため、文字の使用や文字の計算が、算数から数学へ、数量から形式へと具体化から抽象化への大切なステップであり、文字の指導の上に立ってこれらが展開されていくのである。

* 岡山市立鹿田小学校

4 文字の用いられ方とその意味

x や y は次のような場合に用い、その用い方によって意味が違ってくる。

(1)「未知数」を表す記号としての意味

例えば、 $x+7=15$ や $4 \times x=36$ のような場合の用い方である。この時の x は、一般的な数を表しているのではなく、式を満たすある特定の数を表している。しかし、この特定の数が分かるのは式を解いた後であり、式を作る段階ではまだ、未知の数である。このように、 x には未知数(数が決まってはいるが、分からない数)としての意味がある。方程式などに用いる文字はこの「未知数」を意味する。

(2)「変数」を表す記号としての意味

例えば、 $y=x \times 4$ などのように、一方の数量を決めれば、他方の数量も決まる関係を表す場合の用い方である。このとき、 x や y は、いろいろに変わっていく値であり、すなわち、変数(変量)としての意味がある。関数式を表す文字はこの「変数」を意味する。

(3)「任意定数」を表す記号としての意味

例えば、 $a \times b=b \times a$ などの法則・性質を表す場合や三角形の面積を $S=\frac{1}{2}ah$ とするような公式を表す場合の用い方である。与えられた底辺や高さは一定で定数である。しかし、測定していないのでこの値を a や h の文字を使って表しているだけで、 a や h は決まっている任意定数としての意味がある。法則や性質、公式などの恒等式を表す文字はこの「任意定数」を意味する。

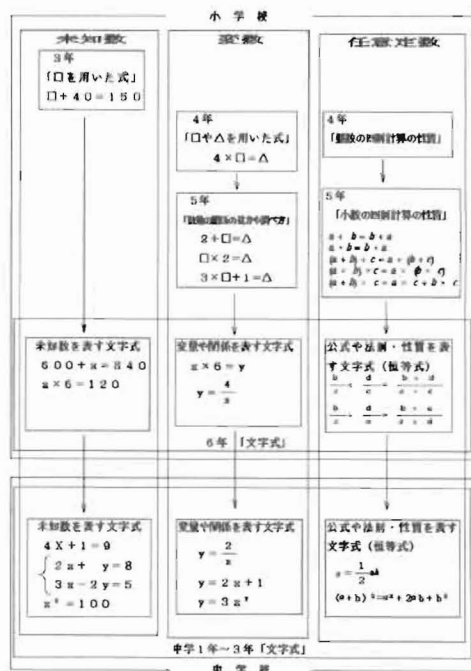
5 小・中の接続を意識した関数指導

関数関係を表すのに最も適し、今後の数学学習において重要な役割をもつ「文字式」を小学校から指導することで、関数的な見方・考え方の理解が一層深まっていく。関数式について指導する際、この時の文字の意味は、「変数」であることを理解しておく必要がある。しかし、前回の学習指導要領では、「□や△を用いた式」や「文字式」が削除されていたことや教師も「変数」についての意識が薄いこともあり、児童に「変数の考え」が育っていなかった。これが、小・中の学習の接続がうまくつながらなかった原因の一つ

である。つまり、小学校段階で、「変数の考え」を育てることが、中学校における「関数領域」との接続をなめらかにする。

6 小・中における文字の指導系統表

数字から離れて、文字の代用記号□や△などを表したりすることの指導は小学校3年次から始まる。文字の意味が小学校から中学校にかけてどのように指導されているかを指導内容の系統別にまとめた。



7 文字式の理解につながる効果的な初期指導

(1)文字式の理解が困難な理由

文字式は、関数式を表すのに最も適しているが抽象度が高く、2つの数量関係を理解しにくい。しかも、文字式の文字のもつ意味は「変数」であるが、「変数」ととらえにくい。

一方、児童にとって、数量関係が具体的にイメージしやすく、理解しやすい式として「言葉の式」が挙げられる。しかし、児童に理解しやすいからといって、いつまでも「言葉の式」にたよってはいけなく、「言葉の式」から「文字式」へと内面化を進めていかなければならない。「言葉の式」から「文字式」へと内面化

を進めていくにあたって、効果的な指導を探っていくため、「文字式」と「言葉の式」のメリット・デメリットを見直してみると、次の表のようにまとめられる。このようなメリット・デメリットが生じるのは、「言葉の式」が具体的であるのに対し、「文字式」が抽象的であることからである。この具体的である「言葉の式」と抽象的である「文字式」との間には、大きな溝がある。つまり、数量の関係が具体から離れて、抽象化へと移るにあたって、大きな溝があり、理解に困難を生じさせている。

	メリット	デメリット
内 面 化	・具体的な数量関係がイメージしやすく、理解しやすい。	・数量関係を簡潔に表現できない。 ・数量を「変数」と見にくい。 ・一般化しにくい。 ・式を形式的に処理できない。
	・数量関係を簡潔的に表現できる。 ・一般化が容易である。 ・式を形式的に処理できる。	・抽象度が高く、数量関係を理解しにくい。 ・文字を「変数」と見にくい。

(2) 言葉の式から文字式への橋渡し役

「言葉の式」と「文字式」との間にある関数式における文字の意味が「変数」であるという理解の溝を埋め、橋渡し役をするのが、「□や△を用いた式」である。「言葉の式」から「文字式」への内面化の指導を丁寧に指導しなければ、文字式の理解が確かなものにならず、中学校数学において文字式の理解に困難を生じさせる。文字式の文字のもつ意味が「変数」であるという理解を確かにするための効果的な役割を「□や△を用いた式」が果たすのである。

(3) □や△をプレスホルダーとして見る見方の重要性

関数式においての文字の意味は「変数」であるが、児童は、文字そのものを数だ取りやすく、文字をいろいろな数が入り得る場所(プレスホルダー)と見る見方はできにくい。そのため、文字では「変数」という意味が理解しに

くい。しかし、文字ではなく、文字の代用記号である□や△であれば、□や△は数が入り得る場所と受け取りやすく、「変数」の意味を理解しやすい。文字式より先に、□や△を用いた式を扱うのはこのような理由である。つまり、児童にとって、□や△は、文字よりも「変数」の意味を理解しやすく、□や△をプレスホルダーとして見る見方を育てておくことが、関数式を文字式で表した場合においても、文字の意味が「変数」であることの理解を助けるのである。

8. 一般的な指導の問題点

一般的な指導として、「言葉の式」を作り、これを単に□や△をあてはめることで、□や△を用いた式を導く指導が多い。単に「言葉の式」に□や△をあてはめる指導では、□や△使って数量関係を表す意味やよさは分かりにくく、□や△をプレスホルダーとして見ているのかと言うと、私は見ていないと考えている。

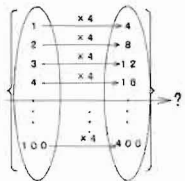
9. 「□や△をプレスホルダーとして見る見方」を育てるための私の提言

言葉の式が□や△をプレスホルダーとして見ることを妨げている。□や△をプレスホルダーとして見るためには、□や△を用いた式を導くまでの過程が重要で、その過程で、□や△がいろいろな数を表すということを意識させなければいけない。これが十分でないと、式は導くことができません。そこで、□や△をプレスホルダーとして見る見方を育てるために、次のことを提言したい。

□や△がいろいろと変わる数を表すプレスホルダーであることを意識させる算数的活動

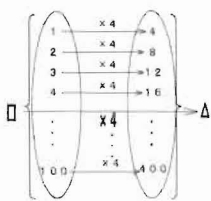
具体的な数で表された多くの式を一つの式で表すことを考える過程で、いろいろと変わっていく従属変数をどう表せばよいかを考え、話し合う算数的活動を行う。一般的な指導では、独立変数を□、従属変数を△と表すことを両方とも教えるが、ここでは、独立変数を□で表すことだけ知

らせ、従属変数の表し方については、児童が考えていく。□がいろいろ変わる数を表すことを根拠にして、従属変数も独立変数と同じようにいろいろと変わる数であることから、△などの記号で表せばよいことを話し合っていくことで、□や△がいろいろと変わる数を表すプレスホルダーであることを強く意識することができる。



「言葉の式」にたよらずに、□や△を用いた式を導く工夫

「言葉の式」にたよらず、「対応関係の図」を使うことで式を導く。式に表すためには、対応の関係に着目することが必要であるが、対応関係の図は表よりも対応の関係をとらえやすい。また、具体的な数値の関係を視覚的にとらえることができ、□や△の関係を帰納的に導くことができる。



10. 研究事例 「変わり方」(第4学年)

(1) 目標

- 伴って変わる二つの数量について、日常生活の中から見いだしたり、それらの変化や対応のきまりを進んで調べたりしようとする。
- 伴って変わる二つの数量の関係を、□や△といった記号を使って、表すよさに気づくことができる。
- 伴って変わる二つの数量の関係を□や△を用いた式に表したり、□や△に数をあてはめて調べたりすることができる。
- □や△がプレスホルダーであることや伴って変わる二つの数量の関係は、□や△を用いると一般的な式にまとめられることを理解することができる。

(2) 単元計画(7時間扱い)

第1時 ある数量に着目し、その数量が変われば、変わるものをいろいろと見つける。

第2時 2つの数量の間における関係(商一定)を見つけ、□や△を用いた式で表す。
.....本時

第3時 2つの数量の間における関係(和一定)を見つけ、□や△を用いた式で表す。

第4時 □や△を用いた式から事象を読み取る。

第5時 2つの数量の間における関係をグラフに表す。

第6・7時 習熟と評価

(3) 単元について

小学校算数における関数学習の主要なねらいは、基礎的な知識を指導することではなく、「数学的な思考力・判断力・表現力を育てる」ということが、新学習指導要領から読み取ることができる。この単元で育てたい数学的な思考力・判断力・表現力は、関数的な見方・考え方の育成である。本単元で、初めて本格的な「関数の考え」や「変数の考え」に触れていく。伴って変わる二つの数量の依存関係に着目し、二つの数量の変化や対応のきまりを見だし、問題を解決していく「関数の考え」や、二つの数量の関係を□や△を用いた式に表し、この□や△が、考察している範囲の全ての数を取り得るものを表すプレスホルダーであるという「変数の考え」を理解することが重要である。このような「関数の考え」や「変数の考え」に触れていく中で、関数的な見方・考え方が育成されていく。ここで培った関数的な見方・考え方が、第5・6学年の関数学習や中学校数学における「関数領域」の基礎となっていく。

また、「何と何が関係しているのか」「何を変えると何が変わるのか」「それらの間にどのような関係があるのか」ということを考察していくことは、算数に限らず、現代の情報化社会において、ものごとを科学的にとらえ、判断していく上で非常に大切なことであり、これは、新学習指導要領の目指す「生きる力」そのものであると言ってよい。

(4) 児童の実態

今までに、□+△=5のとき、一方の数が1増えれば、他方の数は1減るとか、2×□=△のとき、乗数が1増えれば、その積は被乗数の数だ

け増えるというような見方を扱うことなどで、関数的な見方・考え方の素地的な指導を行っている。また、□や△の用い方は、主として、 $\square + 5 = 14$ や $\square \times 6 = 42$ のように未知数を表す記号としてであった。また、 $\square \times \triangle = 12$ のような場合には、□や△にあてはまる数は必ずしも一つではないことなどの経験をしているが、□や△の記号が、「変数」を表すプレホルダーとして理解しているとは思われない。

(5)授業の実際「□や△を用いた式」(第2時)

① 本時の目標

表から、2量の関係についてのきまりを見だし、それを対応関係の図で確かめる活動を通して、□や△がいろいろと変っていく数を表すということを理解し、2つの数量の関係を□や△を用いた式で表すよさに気づくことができる。

② 指導の工夫

ア □や△がいろいろと変わる数を表すプレホルダーであることを意識させる算数的活動の工夫

□や△をプレホルダーとして見る見方を育てるためには、□や△を用いた式を導く過程が非常に大切な役割をもっている。対応関係の図を用いて、具体的な数値で表されている多くの式を一つの式で表すことを考える過程で、いろいろと変わる数をどう表せばよいか考え、話し合う算数的活動を取り入れる。

いろいろ変わっていく多くの式を一つにするために、いろいろ変わっていく独立変数が□で表されることを知った児童は、いろいろと数が変わる独立変数が□で表されるということを根拠にし、従属変数も、数がいろいろと変わっていくことから、同じように記号(△など)で表せばよいことに気づき、話し合うことで、□や△をプレホルダーであることを意識することができる。

イ ことばの式にたよらずに□や△を用いた式を導く工夫

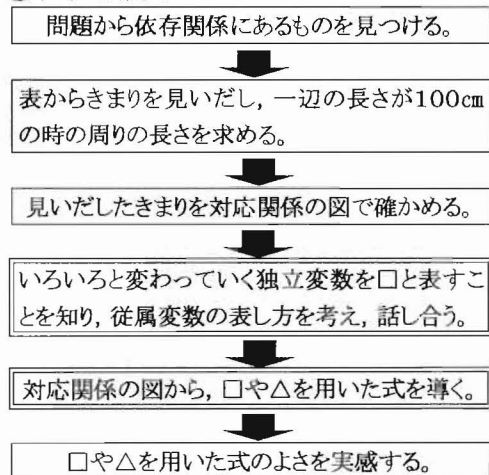
一般的な指導として多く見られる、「ことばの式」に□や△をあてはめ、□や△を用いた式を導くことは行わない。これは、「ことばの式」にあてはめることが、□や△をプレホルダーとして

見る見方を妨げていると考えているからである。そこで、「対応関係の図」を使うことで式を導く。式に表すには、対応の関係に着目することが必要であるが、この図は表よりも対応の関係をとらえやすい。また、具体的な数値の関係を視覚的にとらえることができるため、わざわざ、ことばの式を導かなくても、□や△の関係を帰納的に導くことができる。

ウ 取り上げる題材の工夫

取り上げる題材は、商が一定の対応関係をもつ正方形の一辺の長さとその周りの長さとの関係を取り上げる。この題材は、変化する様子がイメージしやすく、しかも、式に表すために不可欠な対応のきまりを見つけやすいという利点がある。

③本時の展開イメージ



(5)本時の主な授業記録

いろいろと変わっていく独立変数を□と表すことを知り、従属変数の表し方を考え、話し合う。

「対応関係の図」を使い、表に表した具体的な数の関係が、全て4倍であることを確認した後、これらの多くの式を一つの式にまとめることができないかと問いかけた。

T この図を見ると、 $1 \times 4 = 4$, $2 \times 4 = 8$, $3 \times 4 = 12$, ..., $100 \times 4 = 400$, ...とすぐたくさん式があるよね。このたくさんの式を一つの

式にまとめることができないかな？

C 一つの式？

T 今、一辺の長さが1, 2, 3, ..., 100といろいろと変わっていったけど、実は、このいろいろと変わっていったたくさんの数を一つのもので表すことができるんだよ。このいろいろ変わっていく、たくさんの数を「□」と表します。

T じゃあ、こっちの4, 8, 12, ...を一つのもので表すには、どう表せばいいと思う？

C □だと思います。1, 2, 3といろいろ変わる数を□で表したんだから、こっちも、同じようにいろいろ変わっていくから□だと思います。

C ぼくは、△だと思います。

C 私も似ていて、「□でない記号の何か」で表せばいいと思います。

T 「△や□でない記号の何かだ」って言ったけど、こっちと同じように、□だといけないの？

C 1, 2, 3, ..., が□なら、こっちの4, 8, 12, ..., には、1や2や3とかないものがあるから、□と一緒にではないと思います。

C 1辺が1の時、周りの長さは1でないし、一辺の長さと周りの長さは同じ数ではないから、両方□と一緒にするとややこしくなるから、違うのにしないといけないと思います。

C 確かに、数が違うのに、同じ□にすると間違うかもしれないな。

C こっちを□としているのに、もし、4, 8, 12の方も□としたら、式がおかしくなります。

T どういうこと？

C 例えば、 $1 \times 4 = 1$ とか $2 \times 4 = 2$ とかになって変な式になります。

T 同じ□にするとその□には同じ数が入るから違うもので表した方がいいということだね。じゃあ、始めに出た△と表すことにしましょう。

対応関係の図から、□や△を用いた式を導く。

いろいろと変わっていく数を□や△で表せばよいことに気づいたところで、□や△を用いて、一つの式に表すことを考えていった。

T この□と△の間にはどんな関係がある？

C $\times 4$ です。(賛成多数)

T なんで？

C 1も2も3の時もずっと4倍になってます。

C $1 \times 4 = 4$, $2 \times 4 = 8$, $3 \times 4 = 12$ と全部4倍にしているし、□は1や2や3を表しているから同じ4倍になると思います。

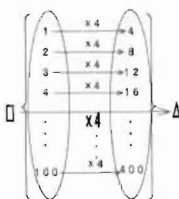
T 4倍はずっと変わっていないから□や△になっても4倍は変わらないと言うこと？

C そうです。

T さっき言ったこれらの多くの式を、一つの式に表すことはできる？ノートに書いてごらん。

T どんな式になった？

C $\square \times 4 = \triangle$ です。



この後、 $\square \times 4 = \triangle$ の□に1, 2, 3, ...と数をあてはめ、その時の△の数を調べることで、□や△が「変数」であることを実感していった。

11. 省 察

(1) 成 果

□や△を教師側が両方とも教えるのではなく、独立変数のみを□で表すことを知らせることで、児童は、いろいろ変わっていく独立変数が□で表されるということを根拠に、従属変数の表し方を考え、話し合い、□以外の記号で表せばよいと言うことに気がついていった。「対応関係の図」は、□以外の記号で表せばよいということに気がつく手助けとしても役立っていた。そして、いろいろ変わっていく独立変数や従属変数が□や△で表されることを理解した児童は、□と△の関係を考えていったが、「対応関係の図」は具体的な数の関係が視覚的に捉えることができるので、他の数と同様に□や△の関係も変わらないことを帰納的に導くことができていた。また、□や△を用いた式で表すと「対応関係の図」から視覚的に捉えられる多くの式が一つにまとまり、一般化できるというよさに気づくことができたことから

「対応関係の図」は、児童にとって有効であることが分かった。

□や△を用いた式を導くまでの過程を大切にすることで、□や△がプレスホルダーであることを強く意識でき、プレスホルダーとしての見方ができるようになっていったことから、いろいろ変わる数の表し方を考え、話し合う算数的活動は有効であることが分かった。

(2)課 題

単元を通して、□や△が変数であることを理解し、プレスホルダーとしての見方できるようになっていったが、この単元だけで「変数の考え」が直ちに形成されるものではないと考えている。今後の課題は、この□や△を用いた式から文字式への連動を実証的に研究していく必要がある。

また、中学校数学の「関数領域」とのなめらかな接続を意識して、「変数の考え」を形成していく実践に取り組んでいきたい。

12. 参考文献

- [1]文部科学省、『小学校学習指導要領解説算数編』, 東洋館出版社, 2008年
- [2]文部省、『小学校算数指導資料「関数の考えの指導」』, 東京書籍, 1973年
- [3]原 弘道,『関数の考えをとり入れた指導』, 明治図書, 1970年