岡山大学経済学会雑誌22(2),1990, 81～ 96

分散比の改良信頼区間とその性能について

永　田　　　靖

1 はじめに

大きさm，nの2組の標本 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ と $y_1, y_2, \cdots, y_n$ がそれぞれ独立に $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ と $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ とに従っているとする。ここで4つのパラメータ $\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2$ は全て未知とする。本稿では分散比 $\theta=\sigma_1^2/\sigma_2^2$ の区間推定を考える。θ に関する検定・推定の手法は極めてよく知られている。例えば，σ_1^2 と σ_2^2 との推定量として，$V_1=\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})^2/(m-1)$ と $V_2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2/(n-1)$ とをそれぞれ構成し，$F=(V_1/\sigma_1^2)/(V_2/\sigma_2^2)$ とおくと，これが自由度（m－1，n－1）のF分布に従うから，θ の信頼率 $1-\alpha$ の信頼限界として

(1)　$$[(V_1/V_2)/F(m-1,\ n-1;\ \alpha/2),\quad (V_1/V_2)/F(m-1,\ n-1;\ 1-\alpha/2)]$$

が得られる。ここで，$F(\phi_1, \phi_2; \tau)$ は自由度 (ϕ_1, ϕ_2) のF分布の上側 100τ %点を表す。

この手法は簡便でよく用いられているが，実はもっと性能のよいものが存在する。その1つの考え方として，F分布は左右対称な分布形になっていないから，(1)のように分布の左右の裾に同じだけの確率 $\alpha/2$ を設定することが妥当ではないということがある。そこで，(1)を

(2)　$$[(V_1/V_2)/c_2,\ (V_1/V_2)/c_1] \qquad (c_1<c_2)$$

とおいて，信頼率 $1-\alpha$ を保証する下で(2)の区間幅を最小にする c_1, c_2 を用

いるもの，または(2)の上限と下限の比を最小にする c_1，c_2を用いるものが考えられる。前者のようにして得られた信頼区間を“最短信頼区間 I_{ML}”とよび，後者のようにして得られた信頼区間を“最小比信頼区間 I_{MR}”とよぼう。更に，(1)の信頼区間を“等確率信頼区間 I_E”とよぼう。

I_{ML} を構成する c_1，c_2は簡単な計算より，自由度(ϕ_1，ϕ_2)のF分布の確率密度関数を $f(x;\phi_1,\phi_2)$とするとき，

$$(3)\quad \begin{aligned} &\int_{c_1}^{c_2} f(x;m-1,n-1)\,dx=1-\alpha, \\ &c_1^2 f(c_1;m-1,n-1)=c_2^2 f(c_2;m-1,n-1) \end{aligned}$$

を満たす値として求められる。また I_{MR} を構成する c_1，c_2は

$$(4)\quad \begin{aligned} &\int_{c_1}^{c_2} f(x;m-1,n-1)\,dx=1-\alpha, \\ &c_1 f(c_1;m-1,n-1)=c_2 f(c_2;m-1,n-1) \end{aligned}$$

を満たす値として求められる。しかし，(3)を満たす c_1，c_2の値を数表として与えられているものは見あたらない。(4)を満たす c_1，c_2の値は，(4)がたまたま H_0：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，H_1：$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ の不偏検定の条件から導かれるものと同一となるので，その目的で構成された数表を利用することができる。(例えば，柴田［9］を参照せよ。)

では次に I_{ML}や I_{MR}がそれぞれの規準の下で最良なのだろうか。上の構成では，V_1と V_2とにのみ基づく手法となっているが，これらと独立な統計量として $\bar{x}$や $\bar{y}$があり，その中に含まれる σ_1^2や σ_2^2の情報を利用できないかということが考えられる。Nagata［7］は $\bar{x}$の情報を利用して先に述べてきたような信頼区間を改良する手法を提案した。本稿では，その改良手法の性能を数値計算により明らかにする。

ところで，この種の問題はそもそも1標本での分散の推定問題から始まった。この問題についての歴史的経緯については最近出版された Maatta and Casella［6］に興味深くかつ明解に述べられている。Nagata［7］も1標本の分散の区間推定についての改良手法について詳しく論じ，その1つのパラレルな結果として分散比の改良信頼区間について触れている。そこで，分散

比の区間推定の性能を検討する際には，1標本の分散の推定の場合も対比してみることにする。

2節では問題を少し一般的にして定義し直し，改良信頼区間の性能についての検討を行う。3節では総括的な議論を与える。

2 改良信頼区間とその性能

2．1 改良信頼区間の定義

3つの確率変数 S_0, S_1, T_0があり，それぞれ自由度 m_0のカイ2乗分布のσ_1^2倍，自由度 m_1で非心パラメータλの非心カイ2乗分布のσ_1^2倍，自由度 n_0のカイ2乗分布のσ_2^2倍に独立に従うとする。1節で最初に述べたものに対応させると，$S_0=\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})^2$, $S_1=m\bar{x}^2$, $T_0=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$, $m_0=m-1$, $m_1=1$, $n_0=n-1$, $\lambda=m\mu_1^2/\sigma_1^2$となる。ここで，少し一般的に書いたのは，この種の問題が一般線形模型での分散成分と誤差分散との比についての問題としても現れるからであり，その場合は m_1が1より大きくなるからである。そして m_1の大きさが改良度と大きく関わってくる。

さて，このような状況で$\theta=\sigma_1^2/\sigma_2^2$の区間推定は通常

(5) $I_0=[\{(S_0/m_0)/(T_0/n_0)\}/c_2,\ \{(S_0/m_0)/(T_0/n_0)\}/c_1]$

の形で行われる。c_1, c_2は1節で述べたようにして決められる定数である。I_0は S_1を含んでいないから，S_1を含んだ次の形の信頼区間を考える。

(6) $I_1=[\{(\min(S_0,\ (S_0+S_1)/b)/m_0)/(T_0/n_0)\}/c_2,$

$\{(\min(S_0,\ (S_0+S_1)/b)/m_0)/(T_0/n_0)\}/c_1]$

ただし，

(7) $b=n_0\ (c_0^k-1)/\{m_0c_1(c_0-c_0^k)\}$

(8) $k=\ (m_0+m_1)/(m_0+m_1+n_0)$, $c_0=c_2/c_1$

である。このとき，Nagata［7］により次の定理が示されている。

定理１

(i)　$|I_0| \geqq |I_1|$　　（$|I_i|$ は I_i の区間幅を表わす。）

(ii)　$b > 1$ であるなら $\Pr(\theta \in I_0) < \Pr(\theta \in I_1)$

（注）Nagata［７］での b^* に対し，ここでは $b = b^*/m_0$ の関係がある。

定理１は，I_1 を用いることによって I_0 より区間幅が短くなり，カバレッジ確率（coverage probability）が大きくなることを意味する。

また信頼上限と下限の比を $\|\cdot\|$ という記号で表わすことにすれば，(5)，(6)より $\|I_0\| = \|I_1\| = c_2/c_1$ であるから，I_1 は I_0 と上限・下限の比を同じにしておいてカバレッジ確率を大きくするものであるともいえる。

次に(5)の I_0 を I_E，I_{MR} と設定して，I_1 を用いることによりどのくらいの改良が得られるかを検討する。I_{ML} に対しては，その数表が得られていないようなので具体的な検討を行っておらず，若干のコメントを述べるにとどめる。

２．２　等確率信頼区間 I_E に対する改良

(5)の I_0 において，$c_1 = F(m_0, n_0; 1-\alpha/2)$，$c_2 = F(m_0, n_0; \alpha/2)$ とする。$\alpha = 0.05$ と 0.10 の場合に対して検討したが，ほぼ同様の結果であったので，以下では $\alpha = 0.05$ の場合についてのみ述べることにする。（与える数値結果は検討したうちの一部である。）つまり，信頼率95％の信頼区間 I_0（$= I_E$）を I_1 でどのくらい改良できるかである。

まず，定理１の条件“$b > 1$”が成り立つかどうかをチェックしなければならない。１つの母分散（例えば本稿での σ_1^2 について）の区間推定に対しては Nagata［７］において(7)の b に対応するものとして $a^* = (m_0 + m_1)\log(d_2/d_1)/(d_2 - d_1)$ が得られている。この場合には $d_1 = \chi^2(m_0; 1-\alpha/2)$，$d_2 = \chi^2(m_0; \alpha/2)$ であり（ここで $\chi^2(\phi; \tau)$ は自由度 ϕ のカイ２乗分布の上側 100τ ％点），$m_0 \geqq 1$，$m_1 \geqq 1$ に対して $a^* > 1$ であることが調べられ

ている。ところが，２標本問題においては m_0 と n_0 との値の関係により $b>1$ となるための m_1 の下限の値が異なってくる。（b は m_0，n_0を固定させたとき m_1 についての単調増加関数である。）そこで，表１としてこの m_1 の下限の値を示す。表１より m_0に比べて n_0がかなり小さいときは $m_1 \gg 1$ でないと I_1 により I_0 を改良できないことが分かる。$n_0 \to \infty$ のときは $m_0 c_i \to d_i$ となることを用いて $b \to a^*$ であることに注意する。これより，$n_0=\infty$ として考えていたのが１標本の場合であり，このときは $m_1 \geqq 1$ に対して I_1 により I_0を改良できたが，２標本問題においては n_0 の m_0 に対する相対的な大きさが定理の条件に関わってくることが特徴である。

表１　$b>1$ となるための m_1 の下限（$1-\alpha=.95$）

n_0＼m_0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30
1			2	2	3	3	4	5	6	6	8	10	13	17	20
2						2	2	2	3	3	4	6	7	9	10
3								2	2	2	3	3	5	6	7
4											2	2	3	4	5
5												2	3	3	4
6												2	2	3	3
7							1						2	2	3
8													2	2	2
9														2	2
10														2	2
11															2
12															2
13															

それでは，I_1 のカバレッジ確率 $\Pr(\theta \in I_1)$ についての数値結果を検討しよう。数値計算は Patnaik [８] の方法を用いて非心カイ２乗分布を中心カイ２乗分布に近似させて行った。$(m_0,\ n_0)=(6,\ 10)$，$(10,\ 6)$，$(10,\ 10)$，$(10,\ 20)$，$(10,\ \infty)$，$(20,\ 10)$ の場合に $\Pr(\theta \in I_E)=0.95$ について I_1 を用

いたときのカバレッジ確率についての数値結果を表2～7に与える。それぞれの表において，m_1を1，3，5，7，10，λを0(4)20と変化させて求めている。これらの表より次のようなことが考察できる：

①非心パラメータλについて単調減少である。

②m_0について単調減少である。

③m_1について単調増加である。

④n_0について単調増加である。

これらのうち①，②，③については1標本の場合と同様であるが，④については2標本の場合の特徴であり，これは表1の結果にも対応している。n_0がm_0より小さくなると，小さなm_1に対してはほとんど改良されていないことが考察できる。

表2　カバレッジ確率 $Pr(\theta \in I_1)$　$I_0=I_E$　$(m_0,n_0)=(6,10)$

m_1 ＼ λ	0	4	8	12	16	20
1	.954	.952	.951	.950	.950	.950
3	.960	.957	.954	.952	.951	.950
5	.963	.961	.957	.954	.952	.951
7	.966	.964	.960	.957	.954	.953
10	.968	.966	.963	.960	.957	.955

表3　カバレッジ確率 $Pr(\theta \in I_1)$　$I_0=I_E$　$(m_0,n_0)=(10,6)$

m_1 ＼ λ	0	4	8	12	16	20
1	.950	.950	.950	.950	.950	.950
3	.952	.951	.950	.950	.950	.950
5	.953	.953	.951	.951	.950	.950
7	.955	.954	.952	.951	.951	.950
10	.956	.955	.954	.952	.951	.951

表 4　カバレッジ確率 Pr（$\theta \in I_1$）　$I_0 = I_E$　$(m_0, n_0) = (10, 10)$

m_1 ＼ λ	0	4	8	12	16	20
1	.951	.951	.950	.950	.950	.950
3	.954	.953	.951	.950	.950	.950
5	.957	.955	.953	.951	.950	.950
7	.959	.957	.954	.952	.951	.951
10	.961	.959	.956	.954	.952	.951

表 5　カバレッジ確率 Pr（$\theta \in I_1$）　$I_0 = I_E$　$(m_0, n_0) = (10, 20)$

m_1 ＼ λ	0	4	8	12	16	20
1	.953	.952	.950	.950	.950	.950
3	.957	.955	.952	.951	.950	.950
5	.961	.958	.955	.952	.951	.950
7	.963	.961	.957	.954	.952	.951
10	.966	.964	.960	.957	.954	.953

表 6　カバレッジ確率 Pr（$\theta \in I_1$）　$I_0 = I_E$　$(m_0, n_0) = (10, \infty)$

m_1 ＼ λ	0	4	8	12	16	20
1	.957	.954	.951	.950	.950	.950
3	.963	.960	.955	.952	.951	.950
5	.968	.964	.959	.954	.952	.951
7	.970	.967	.962	.957	.954	.952
10	.973	.971	.966	.962	.958	.954

表 7　カバレッジ確率 Pr（$\theta \in I_1$）　$I_0 = I_E$　$(m_0, n_0) = (20, 10)$

m_1 ＼ λ	0	4	8	12	16	20
1	.950	.950	.950	.950	.950	.950
3	.951	.950	.950	.950	.950	.950
5	.952	.951	.950	.950	.950	.950
7	.952	.952	.951	.950	.950	.950
10	.953	.953	.952	.951	.950	.950

次に，平均区間幅について考える。I_E と I_1 との平均区間幅の相対効率Rを

(9)　$R=E(|I_1|)/E(|I_E|)=E(\min[S_0,(S_0+S_1)/b])/m_0$

とおく。($E(|I_1|)$，$E(|I_E|)$ が存在するためには $n_0>2$ が必要であることに注意する。) 定理1より $R\leqq 1$ となることが分かるが，Rがどのくらい1を下まわるかに興味がある。先ほどと同じ (m_0，n_0) の組合せに対してRを求めた結果を表8～13に与える。これらより次のことが考察できる：

①非心パラメータλについて単調増加である。

②m_0 について単調増加である。

③m_1 について単調減少である。

④m_0に比べて m_1がかなり小さいときは n_0について単調減少であるようであるが，m_1が増加すると n_0のある値で最小値をとり，そのあと増加していく傾向を示している。

表8　平均区間幅の相対効率R　$I_0=I_E$　$(m_0,n_0)=(6,10)$

m_1 \ λ	0	4	8	12	16	20
1	.873	.974	.995	.999	1.000	1.000
3	.803	.922	.972	.990	.997	.999
5	.763	.878	.940	.972	.987	.994
7	.735	.842	.909	.949	.972	.985
10	.705	.800	.867	.913	.944	.965

表9　平均区間幅の相対効率R　$I_0=I_E$　$(m_0,n_0)=(10,6)$

m_1 \ λ	0	4	8	12	16	20
1	.975	.998	1.000	1.000	1.000	1.000
3	.922	.978	.995	.999	1.000	1.000
5	.891	.957	.985	.995	.998	1.000
7	.870	.938	.972	.988	.995	.998
10	.846	.914	.953	.976	.988	.994

表10　平均区間幅の相対効率R　$I_0=I_E$　$(m_0, n_0)=(10,10)$

m_1 ＼ λ	0	4	8	12	16	20
1	.945	.992	.999	1.000	1.000	1.000
3	.898	.968	.991	.998	1.000	1.000
5	.870	.945	.979	.992	.997	.999
7	.850	.925	.965	.984	.993	.997
10	.828	.900	.944	.970	.984	.992

表11　平均区間幅の相対効率R　$I_0=I_E$　$(m_0, n_0)=(10,20)$

m_1 ＼ λ	0	4	8	12	16	20
1	.923	.986	.998	1.000	1.000	1.000
3	.883	.961	.988	.997	.999	1.000
5	.859	.938	.975	.991	.997	.999
7	.841	.919	.961	.982	.992	.997
10	.821	.895	.940	.967	.983	.991

表12　平均区間幅の相対効率R　$I_0=I_E$　$(m_0, n_0)=(10,\infty)$

m_1 ＼ λ	0	4	8	12	16	20
1	.908	.981	.997	1.000	1.000	1.000
3	.880	.959	.988	.997	.999	1.000
5	.864	.942	.977	.991	.997	.999
7	.854	.928	.966	.985	.994	.997
10	.843	.911	.952	.975	.987	.994

表13　平均区間幅の相対効率R　$I_0=I_E$　$(m_0, n_0)=(20,10)$

m_1 ＼ λ	0	4	8	12	16	20
1	.995	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3	.970	.993	.999	1.000	1.000	1.000
5	.954	.985	.996	.999	1.000	1.000
7	.943	.978	.992	.997	.999	1.000
10	.930	.967	.985	.994	.998	.999

改良度という観点ではRについての①～③の性質はカバレッジ確率についての①～③の性質と全く対応する。しかし，④については平均区間幅の方が若干複雑な様子を示している。

2．3　最小比信頼区間 I_{MR} に対する改良

I_{MR} で用いる c_1，c_2 は(4)で $m-1$，$n-1$ をそれぞれ m_0，n_0 でおきかえたものである。この場合は，(4)の2つ目の条件式より

(10)　$n_0(c_0^t-1)/\{m_0c_1(c_0-c_0^t)\}=1$

ただし，

(11)　$t=m_0/(m_0+n_0)$

が得られ，これらと(7)，(8)を比べることにより，$k>t$ であるから $b>1$ が得られる。つまり，m_1 の値に関わらず定理1の条件が満たされる。

$m_0=n_0$ のときは I_{MR} で用いられる c_1，c_2 が I_E で用いられる c_1，c_2 と同じ値となるので，2．2節で表にした（m_0，n_0）の組合せのうち（10，10）以外のものについてのカバレッジ確率の数値結果を表14～18に示す。

これらの表より2．2節で述べたカバレッジ確率についての①～③の性質がそのまま読み取れる。④については，ほとんどの場合2．2節でのカバレッジ確率と同様のふるまいであるが，検討した中で一部においてのみ（$m_0=6$，$m_1=10$，$R=0$，4）ある n_0 で最大値をとりそのあと減少していくことが観察された。

表14　カバレッジ確率 $Pr(\theta\in I_1)$　$I_0=I_{MR}$　$(m_0,n_0)=(6,10)$

m_1 \ λ	0	4	8	12	16	20
1	.952	.951	.950	.950	.950	.950
3	.957	.955	.952	.951	.950	.950
5	.960	.958	.955	.953	.951	.951
7	.963	.961	.958	.955	.953	.952
10	.965	.963	.961	.958	.956	.954

表15　カバレッジ確率 Pr（$\theta \in I_1$）　$I_0 = I_{MR}$　$(m_0, n_0) = (10, 6)$

m_1 \ λ	0	4	8	12	16	20
1	.951	.951	.950	.950	.950	.950
3	.953	.952	.951	.950	.950	.950
5	.955	.954	.952	.951	.950	.950
7	.957	.955	.953	.952	.951	.950
10	.958	.957	.955	.953	.952	.951

表16　カバレッジ確率 Pr（$\theta \in I_1$）　$I_0 = I_{MR}$　$(m_0, n_0) = (10, 20)$

m_1 \ λ	0	4	8	12	16	20
1	.951	.951	.950	.950	.950	.950
3	.955	.954	.951	.950	.950	.950
5	.958	.956	.953	.951	.951	.950
7	.960	.958	.955	.953	.951	.951
10	.963	.961	.958	.955	.953	.952

表17　カバレッジ確率 Pr（$\theta \in I_1$）　$I_0 = I_{MR}$　$(m_0, n_0) = (10, \infty)$

m_1 \ λ	0	4	8	12	16	20
1	.952	.951	.950	.950	.950	.950
3	.957	.955	.952	.951	.950	.950
5	.960	.958	.954	.952	.951	.950
7	.962	.960	.957	.954	.952	.951
10	.964	.963	.960	.957	.954	.952

表18　カバレッジ確率 Pr（$\theta \in I_1$）　$I_0 = I_{MR}$　$(m_0, n_0) = (20, 10)$

m_1 \ λ	0	4	8	12	16	20
1	.950	.950	.950	.950	.950	.950
3	.952	.951	.950	.950	.950	.950
5	.953	.952	.951	.950	.950	.950
7	.954	.953	.952	.951	.950	.950
10	.955	.954	.953	.951	.951	.950

次に，I_Eに対する改良度（表２～７）とI_{MR}に対する改良度（表14～18）を比べてみると１つの興味深い事実が観察できる。それは $m_0<n_0$ であるときは I_E に対する I_1 の改良度の方が I_{MR} に対するものより大きく，$m_0>n_0$のときは逆となる。（$m_0=n_0$のときはもちろん同じである。）１つの分散に対する改良の場合は $n_0\to\infty$であったから，いつも I_Eに対しての方が改良度が大きかったが，２標本における分散比についてはやはり n_0の大きさが重要に関わってきている。

平均区間幅については，I_{MR}がその規準により導かれたものではないから数値結果を与えない。

２．４　最短信頼区間 I_{ML} に対する改良

I_{ML} で用いる c_1，c_2は(3)で$m-1$，$n-1$をそれぞれ m_0，n_0でおきかえたものである。この場合は(3)の２つ目の条件式より

(12)　$n_0(c_0^v-1)/\{m_0c_1(c_0-c_0^v)\}=1$

ただし，

(13)　$v=(m_0+2)/(m_0+n_0)$

が得られる。定理１の条件“$b>1$”が満たされるためには(8)と(13)で定義されたkとvについて$k>v$の成り立つことが必要であり，これは $m_1>2(m_0+n_0)/(n_0-2)$ であればよい。n_0が m_0に比べて十分大きいならこの条件は $m_1>2$ となることに注意しておこう。

２．５　系列型改良信頼区間

２．１節で述べた結果の１つの拡張を以下に与えておく。

S_0，T_0は２．１節と同様とし，S_i（$i=1,2,\ldots,p$）がそれぞれ互いに独立に自由度 m_i，非心パラメータ λ_iの非心カイ２乗分布のσ_1^2倍に従っているとする。そこで(5)の I_0 で用いられる c_1，c_2を用いて次のような定義を行う：

(14)　$b_0 = 1$

(15)　$b_j = n_0(c_0^{k(j)} - 1)/\{m_0 c_1(c_0 - c_0^{k(j)})\}$

(16)　$k(j) = \sum_{i=0}^{j} m_i / (\sum_{i=0}^{j} m_i + n_0)$

(17)　$Z_j = \sum_{i=0}^{j} S_i / b_j$

(18)　$\delta_j = \min(Z_0, Z_1, \ldots, Z_j)$　　$(j = 0, 1, \ldots, p)$

(19)　$I_j = [\{(\delta_j/m_0)/(T_0/n_0)\}/c_2, \{(\delta_j/m_0)/(T_0/n_0)\}/c_1]$

このとき，次の定理が成り立つ。

定理 2

(i)　$i < j$ なら $|I_i| \geqq |I_j|$

(ii)　$i < j$ で，$b_j > 1$ なら $\Pr(\theta \in I_i) < \Pr(\theta \in I_j)$

この定理の証明は定理 1 の証明を参考にして Gelfand and Dey [4] と同様に行えばよい。(15), (16) より b_j は j について単調増加であるから，$b_j >1$ の条件は j が大きくなれば満たされやすくなる。また，$\|I_j\| = c_2/c_1$ $(j = 0, 1, \ldots, p)$ であることにも注意しておこう。

一般線形模型においてある特定の分散成分と誤差分散の比を区間推定する場合，効果がないと見なされる要因平方和を順次誤差平方和にプールして，このプールされた誤差平方和を用いて推測するが，このときが定理 2 を適用できる状況となる。ただし，(17), (18) からも分かるようにプールする平方和の順序が前もって決っていないといけないので，階層的なモデルに限られることになる。

3．総括的な議論

Nagata [7] で示された分散比の改良区間推定手法の数値的性能を検討してきた。ここでミスリーディングが生じないようにいくつかの注意を述べて

おきたい。まず，そもそも分散比の区間推定については I_{ML} と I_{MR} のどちらが妥当なのであろうか？数理統計の理論家は I_{MR} の方だというであろう。それはいまの問題では尺度母数を取り扱っているから，“長さが短い”という概念はそぐわないという理由からである。そして，I_{MR} は不偏検定ともつながっていて合理性が更に補強されている。一方，データ解析者には I_{ML} の方がアピールするであろう。著者はやはり“論理的には”I_{MR} の方が妥当だと思っている。したがって，定理1や定理2でのそれぞれの命題(i)は付録的であるといってもよい。すると，ここで述べた改良信頼区間 I_1 は $\|I_1\| = \|I_{MR}\|$ であったから，カバレッジ確率が I_{MR} よりどれくらい大きくなるかだけを検討すればよいということになる。しかし，次に I_{MR} が実際によく使われているだろうかということを考えるととてもそのようには思えない。それは I_{MR} を用いるためには特別な数表が必要とされるからである。そこで，通常用いられている I_E を特別な数表なしにもっとよい手法でおきかえることができないかという観点が生じる。そしてその場合は“区間の長さ”についてもデータ解析者にアピールする要素として検討しておく価値があると考え，2．2節でそれを行った。I_{ML} については数表が存在しないようであるので，以上に述べた理由も含めて数値的な性能の検討をする必要性を見い出せなかった。

改良の程度は m_0，m_1，n_0，λ の値に依存し，m_0，m_1，λ についての依存の様子は1つの分散の対応する場合と同様であった。しかし，2標本問題として新たに考慮する必要となった n_0 と改良度との関わりについては新たな知見が得られた。特に，n_0 の大きさにより I_E と I_{MR} とに対する改良の程度が逆転しうることは興味をひく。

n_0 が m_0 に比べて小さいと，1標本の場合に対するよりも推測問題としての情報が少なく，小さな自由度 m_1 の S_1 による情報回復が困難になるものと思われる。それに対して，m_0 が小さく n_0 が大きいときは，$m_1 = 1$ 程度であっても数少ない情報を補うために S_1 が有効に使われるということを示唆している。

1節の最初に述べた内容に戻ると，なぜ $\bar{y}$ も情報として取り込まないのかという疑問が生じるであろう。$\bar{y}$ をうまく取り込んで更によい手法を見い出すことはまだ未解決である。点推定においてもすっきりした定理の形では得られていない。（このことについては Gelfand and Dey［5］を参照せよ。）

1標本での分散の区間推定については，Brown［2］や Brewster and Zidek［1］の点推定に基づく一般化ベイズ手法等も提案されている。（Cohen［3］, Shorrock［10］, Maatta and Casella［6］を参照せよ。）これらは数理的によい性質をもつことが予想でき，改良度もなかなかよいようであるが，構成が複雑であり実務的でない。データ解析の過程において通常用いられる形の中でうまく構成されているのが Nagata［7］の手法であり，これを2標本の場合に考えたのが2．1節の I_1 である。他の手法についても2標本問題へと拡張できると思われ，その性質を明らかにしていくことは数理的には興味がある。

参考文献

［1］Brewster, J. F. and Zidek, J. V. (1974). Improving on equivariant estimators. Ann. Statist. 2, 21-38.

［2］Brown, L. D. (1968). Inadmissibility of the usual estimators of scale parameters in problems with unknown location and scale parameters. Ann. Math. Statist. 39, 29-48.

［3］Cohen, A. (1972). Improved confidence intervals for the variance of a normal distribution. J. Amer. Statist. Assoc. 67, 382-387.

［4］Gelfand, A. E. and Dey, D. K. (1988). Improved estimation of the disturbance variance in a linear regression model. J. Econmetrics 39, 387-395.

［5］Gelfand, A. E. and Dey, D. K. (1988). On the estimation of variance ratio. J. Statist. Plan. Infer. 19, 121-131.

［6］Maatta, J. M. and Casella. G. (1990). Decision-theoretic variance estimation (with dicussions). Statistical Science 5 No. 1, 90-120.

［7］Nagata, Y. (1989). Improvements of interval estimations for the variance and the ratio of two variances. J. Japan Statist. Soc. 19, 151-161.

［8］Patnaik, P. B. (1949). The non-central χ^2 and F-distributions and their

applications. Biometrika 36, 202-232.
[9] 柴田義貞 (1981). 正規分布　東京大学出版会.
[10] Shorrock, G. (1990). Improved confidence intervals for a normal variance. To appear in Ann. Statist. 18.