

多重比較における下降手順に対応する 同時信頼区間の非妥当性 についての考察

永 田 靖
松 田 眞 一*

1. はじめに

1元配置モデル

$$『y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad j = 1, 2, \dots, n_i』$$

μ_i : 未知母数

ε_{ij} は互いに独立に $N(0, \sigma^2)$ に従う』

における μ_i の対に対する多重比較を考える。

このモデルの下での多重比較の問題は基本的であり、様々な手法が提案されているが（詳しくは Hochberg and Tamhane [2] または松田, 永田 [3] を参照), 本稿では Tukey の手法（以後“T法”とよぶ）とQ統計量（Studentized range statistic）を用いた下降手順（step-down method）（以後“SD法”とよぶ）のみを取り扱う。

本論に入る前に、まず具体例を述べることにする。

$k = 3, \sigma^2/n = 1$ （既知）とし、 $\bar{y}_1 = 4.5, \bar{y}_2 = 1.5, \bar{y}_3 = 1.0$ が得られたとする。ここで考える仮説の族は $H_{(1,2)} : \mu_1 = \mu_2, H_{(1,3)} : \mu_1 = \mu_3, H_{(2,3)} : \mu_2 = \mu_3$ である。

* 南山大学経営学部情報管理学科

T法では $|\bar{y}_i - \bar{y}_j| / \sqrt{\sigma^2/n} \geq Q(k, \nu; \alpha)$ ($Q(k, \nu; \alpha)$ は学生化された範囲の両側 $100\alpha\%$ 点) のとき $H_{(i, j)}$ を棄却することになるから、 $\sigma^2/n = 1$ 、 $Q(3, \infty; 0.05) = 3.314$ を代入すれば、

『 $|\bar{y}_1 - \bar{y}_2| = 3.0 < 3.314$ より $H_{(1, 2)}$ は棄却されない、

$|\bar{y}_1 - \bar{y}_3| = 3.5 \geq 3.314$ より $H_{(1, 3)}$ は棄却される、

$|\bar{y}_2 - \bar{y}_3| = 0.5 < 3.314$ より $H_{(2, 3)}$ は棄却されない』

となる。 $\mu_1 - \mu_j$ の95%同時信頼区間は

$$\begin{aligned} \left[\mu_1 - \mu_2 \in (\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - Q(3, \infty; 0.05)\sqrt{\sigma^2/n}, \right. \\ \left. \bar{y}_1 - \bar{y}_2 + Q(3, \infty; 0.05)\sqrt{\sigma^2/n}) \right] \\ = (3.0 - 3.314, 3.0 + 3.314) \\ = (-0.314, 6.314) \end{aligned}$$

$$\mu_1 - \mu_3 \in (0.186, 6.814)$$

$$\mu_2 - \mu_3 \in (-2.814, 3.814)』$$

となり、 $\mu_1 - \mu_3$ の信頼区間だけが0を含まない。このことは検定結果と対応している。

次に、SD法ではまず第1段階として、一番大きな差を示す \bar{y}_1 と \bar{y}_3 を用いて $|\bar{y}_1 - \bar{y}_3| / \sqrt{\sigma^2/n}$ を $Q(3, \infty; \alpha_k)$ と比べる。有意でないなら全ての仮説を棄却せずに検定作業を終了し、有意なら次に $|\bar{y}_1 - \bar{y}_2| / \sqrt{\sigma^2/n}$ 、 $|\bar{y}_2 - \bar{y}_3| / \sqrt{\sigma^2/n}$ を $Q(2, \infty; \alpha_{k-1})$ と比べるという方式をとる。(この例題では $k = 3$ だからここまでとなるが、 $k \geq 4$ の場合も上のように有意となった場合だけそれより小さな差を段階的に調べていく。この際、 $\alpha_k = \alpha_{k-1} = 0.05$ 、 $\alpha_p = 1 - (1 - 0.05)^{p/k}$ (または $\alpha_p = (p/k)0.05$) ($2 \leq p \leq k - 2$) を用いれば type-I FWE (familywise error rate) を $\alpha = 0.05$ 以下におさえることができる。) この手順を上のデータにあてはめると、

『 $|\bar{y}_1 - \bar{y}_3| / \sqrt{\sigma^2/n} = 3.5 \geq Q(3, \infty; 0.05) = 3.314$ より $H_{(1, 3)}$ は棄却される、次に、

$|\bar{y}_1 - \bar{y}_2| / \sqrt{\sigma^2/n} = 3.0 \geq Q(2, \infty; 0.05) = 2.772$ より $H_{(1, 2)}$ は棄

却される,

$$|\bar{y}_2 - \bar{y}_3| / \sqrt{\sigma^2/n} = 0.5 < Q(2, \infty; 0.05) \text{ より } H_{(2,3)} \text{ は棄却されない}』$$

となる。H_(1,2) についての結論がT法の場合と異なっていることに注意する。

T法とSD法の手順を見ればすぐに分かるように、SD法を用いるとT法では棄却できなかった仮説を棄却することが起こり得て、その逆のケースは起こらない。つまり、SD法の方がT法より常に“検出力”が高くなる。しかし、ここで“検出力”といっても、多重比較の場合その意味は簡単ではない。いろいろな検出力を定義することができる。そこで、松田、永田 [3] では次のような“検出力A~F”を考えて、上の手法はもとよりPeritzの手法(k=3の時のみSD法と同じ)、F統計量を用いた対応するSD法やPeritzの手法、Holland & Copenhaverの手法などの比較を行った。

A : all-pairs power (Ramsey [4] の定義による)

B : 母平均の差が“ある値”より大きい全ての対を検出する確率

C : 最小差に対する per-pair power (per-pair power は Einot and Gabriel [1] の定義による)

D : 最大差に対する per-pair power

E : 母平均間に差のあるすべての対のうち検出された対の割合

F : Eにおいて母平均間の差で重みづけをした割合

これらA~Fのどの“検出力”を用いてもSD法がT法を下回ることはない。さて、Einot and Gabriel [1] 以来の論点は「T法のもつ様々な利点を見捨てられるほどSD法の検出力は本質的に大きくなるか」ということであり、その様々な利点とは次の4つにまとめられる：

- 1) 検定に対応する同時信頼区間を利用できる,
- 2) 計算が簡単である,
- 3) 全ての対比への拡張が容易である,

4) 集合Pについての決定がPの要素以外の母数の配置に左右されない。(本稿の例でいえば、 $P = \{1, 2\}$ とすると $H_{(1, 2)}$ についての判定が μ_3 の値に依存しない。)

松田、永田 [3] では、“SD法のT法に対する検出力の増分は用いられる検出力により違いはあるが、2)～4)の利点は問題にするほどのことではなく、SD法を用いた方がよい”と結論づけた。そして、1)の利点(または、立場)については議論の余地があるとして残している。この1)がT法の利点となるのは、本稿で考えているモデルに対してはSD法に対応する $\mu_1 - \mu_3$ の同時信頼区間が知られていないからである。では、なぜそのような信頼区間は得られないのであろう。ここで次のような同時信頼区間を考えてみる。

『先の具体例において、SD法を用いると $H_{(1, 2)}$ も棄却されたから、T法で作った同時信頼区間のうち $\mu_1 - \mu_2$ に関する $(-0.314, 6.314)$ を $(0, 6.314)$ と修正する。つまり、SD法に対応する同時信頼区間として

$$\mu_1 - \mu_2 \in (0, 6.314)$$

$$\mu_1 - \mu_3 \in (0.186, 6.814)$$

$$\mu_2 - \mu_3 \in (-2.814, 3.814)$$

を考える。一般的にいうと、“T法で信頼区間を一旦作っておいて、T法とSD法において検定結果が食い違う仮説 $H_{(i, j)}$ があれば、 $\mu_i - \mu_j$ についてT法で作った信頼区間の0に近い方の限界値を0と置き換える”となる』

このような手法は一見妥当そうに見えるが、実は正しくない。なぜ正しくなくて、どのくらいまずいのか評価しようというのが本稿の目的である。

2. T法とSD法の違い

同時信頼区間の内容に入る前に、T法とSD法の違いを図によって明らかにしておく。

2.1 T法とSD法の棄却域

以下では、1節の具体例におけるように、 $k=3$ 、 $\sigma^2/n=1$ （既知）とし、

$$\bar{y}_i \sim N(\mu_i, 1) \quad (i=1, 2, 3) \quad (\bar{y}_i \text{は互いに独立})$$

とする。多重比較の対象となる仮説の族は $H_{(1,2)}: \mu_1 = \mu_2$ 、 $H_{(1,3)}: \mu_1 = \mu_3$ 、 $H_{(2,3)}: \mu_2 = \mu_3$ であることを再度述べておく。ここで、

$$x_1 = (\bar{y}_1 - \bar{y}_2) / \sqrt{2}, \quad x_2 = (\bar{y}_1 + \bar{y}_2 - 2\bar{y}_3) / \sqrt{6}$$

と変換すると

$$x_1 \sim N(\theta_1, 1)$$

$$x_2 \sim N(\theta_2, 1)$$

$$\theta_1 = (\mu_1 - \mu_2) / \sqrt{2}, \quad \theta_2 = (\mu_1 + \mu_2 - 2\mu_3) / \sqrt{6}$$

で、 x_1 と x_2 は独立となる。

この x_1 、 x_2 を用いてT法における棄却域を図示すると図1が得られる。図1の中央の正六角形の内部にデータが落ちた時はどの仮説も棄却されない。外部に落ちた時は $H_{(i,j)}$ の少なくとも1つの仮説が棄却されることになるが、具体的にどの仮説が棄却されるかを各直線（ x_1 軸、 x_2 軸は除く）で囲まれる領域ごとに示した。ちなみに1節の具体例では $x_1 = (4.5 - 1.5) / \sqrt{2} = 2.121$ 、 $x_2 = (4.5 + 1.5 - 2.0) / \sqrt{6} = 1.633$ だから図1の・印の点となり、 $H_{(1,3)}$ のみが棄却されることになる。

一方、SD法における棄却域は図2となる。図2中央の正六角形（これは図1のものと同一）の内部ではどの仮説も棄却されず、外部が棄却域となる。図2の外部の点線が図1の直線より内側にずれていることに注意しよう。こ

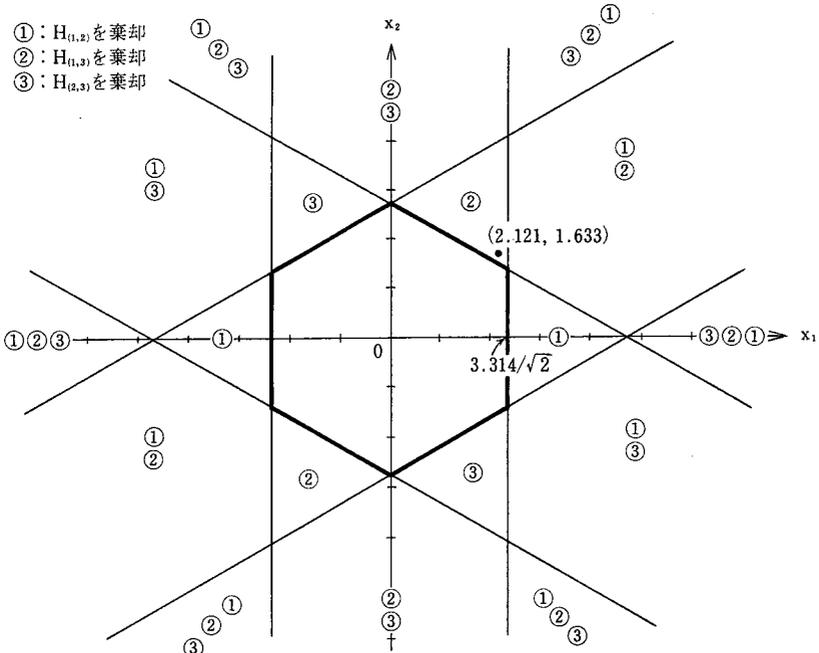


図1 T法による棄却域

これはT法ではいつも $Q(3, \infty; 0.05) = 3.314$ を用いていたが、SD法では少なくとも1対の差が $Q(3, \infty; 0.05)$ 以上あるなら、次の対は $Q(2, \infty; 0.05) = 2.772$ と比べることに対応している。I節の具体例の値 $(x_1, x_2) = (2.121, 1.633)$ をプロットすると、この点の位置は図1とももちろん同じであるが、今度は“ $H_{(1,2)}, H_{(1,3)}$ を棄却する領域”に属していることが分かる。

T法とSD法との判定結果の食い違いを図3に示す。実線と点線の間の帯状の領域にデータ (x_1, x_2) が落ちた時、SD法を用いるとそこに印されている(T法では棄却できなかった)仮説が更に棄却できることになる。具体例の値 $(x_1, x_2) = (2.121, 1.633)$ の位置についても図3で再確認され

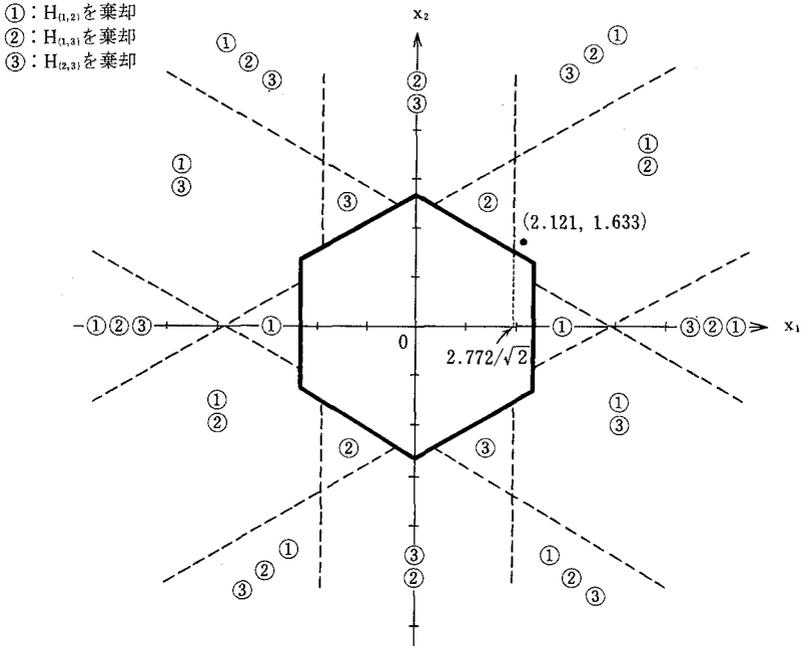


図2 SD法による棄却域

たい。この領域に①と印されてあるのは、T法では $H_{(1,2)}$ が棄却されなかったが、SD法を用いることにより棄却されたという意味である。

2.2 Type I error について

図1～3で実線による棄却域と点線による棄却域の意味するところを考えよう。 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ が成り立っている時は、 $\theta_1 = \theta_2 = 0$ より (x_1, x_2) の同時分布は原点を中心に分布し、図1～3の正六角形の内部の確率が丁度0.950となる。そしてこの状況では3つの仮説 $H_{(i,j)}$ のどれを棄却してもtype I error となるので図1と図2の正六角形は同じものでないといけない。(用いる統計量を変えればこの六角形の形を変えることはできるが、本稿で

- ①: $H_{(1,2)}$ を棄却
- ②: $H_{(1,3)}$ を棄却
- ③: $H_{(2,3)}$ を棄却

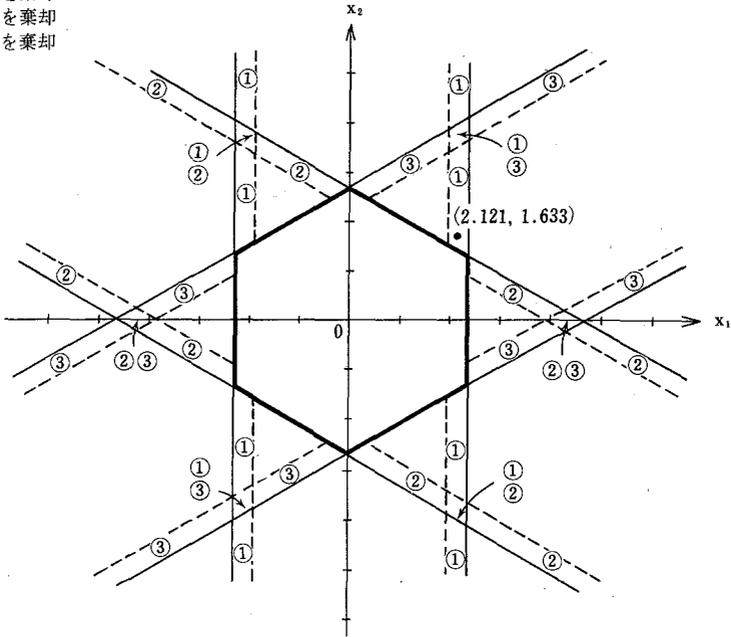


図3 T法とSD法による判定の食い違い

はQ統計量に固定して話を進める。)しかし、多重比較において type I error は $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ の状況だけで考えるものではない。 $\mu_1 = \mu_2 \neq \mu_3$ の場合を考えよう。このときは $\theta_1 = 0, \theta_2 \neq 0$ となるから、 (x_1, x_2) の同時分布は x_2 軸上で $x_2 \neq 0$ となる点を中心に分布する。この状況では $H_{(1,2)}: \mu_1 = \mu_2$ を棄却することのみが type I error となるから、棄却域としては $H_0: \theta_1 = 0$ の検定についてだけ考えればよく、 x_1 軸方向だけを考慮すればよいことになる。図1においては、棄却域として $|x_1| \geq 3.314/\sqrt{2} = 2.343$ を用いていることになり、この有意確率は $0.0096 \times 2 = 0.0192$ となる。しかし、有意水準としてはあらかじめ0.05を覚悟しているのだから、このような名目の値より低いところで検定するのはもったいないと

考えられる。そこで、いつものように $|x_1| \geq 2.772/\sqrt{2} = 1.960$ を用いれば有意確率は0.05と名目の値になる。これが $x_1 = \pm 2.772/\sqrt{2}$ の点線の正体である。ただし、 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ の状況での type I error を抑制するため、この点線は正六角形の中までは踏み込めない。

以上より、SD法では $H_{(1,2)}$ の検定については $\theta_1 = 0$ で $|\theta_2|$ が十分大きいとき有意確率が0.05となり、 $\theta_1 = 0$ で $|\theta_2|$ が0に近づくにつれ有意確率は減少していくことが分かる。(最小値は数値計算より0.0234である。)

他の点線は $\mu_1 = \mu_3 \neq \mu_2$ 、 $\mu_2 = \mu_3 \neq \mu_1$ の場合と同様に対応している。

3. 同時信頼区間

3.1 T法による同時信頼区間

T法による $\mu_1 - \mu_2$ 、 $\mu_1 - \mu_3$ 、 $\mu_2 - \mu_3$ の信頼率95%の同時信頼区間は

$$\begin{aligned} \mu_i - \mu_j \in & (\bar{y}_i - \bar{y}_j - Q(3, \infty; 0.05)\sqrt{\sigma^2/n}, \\ & \bar{y}_i - \bar{y}_j + Q(3, \infty; 0.05)\sqrt{\sigma^2/n}) \\ = & (\bar{y}_i - \bar{y}_j - 3.314, \bar{y}_i - \bar{y}_j + 3.314) \end{aligned}$$

より構成される。2節のように (x_1, x_2) 、 (θ_1, θ_2) に変換し、 (θ_1, θ_2) が図4の位置にあるものとする。この点を中心に図1～3と同じ正六角形を描くと、この内部の確率は丁度0.950となる。

もしデータが図4の(a)の位置に落ちたなら、上で述べたT法による同時信頼区間はこの(a)を中心とする3本の両向き矢印に対応する。一方、真の $\mu_1 - \mu_2$ 、 $\mu_1 - \mu_3$ 、 $\mu_2 - \mu_3$ の値は図4に示した点線上にある。3本の矢印はそれぞれ対応する点線と“直角印”のところで交わっていることに注意しよう。つまり、この同時信頼区間は3本とも真の $\mu_i - \mu_j$ を含んでいることになる。では、データが(b)の位置に落ちたとしよう。同様にこの点を中心に3本の両向き矢印を描いた。ここでは3本のうち2本が対応する点線と“直角印”で交わっており、真の $\mu_i - \mu_j$ を含むことを示しているが、残り

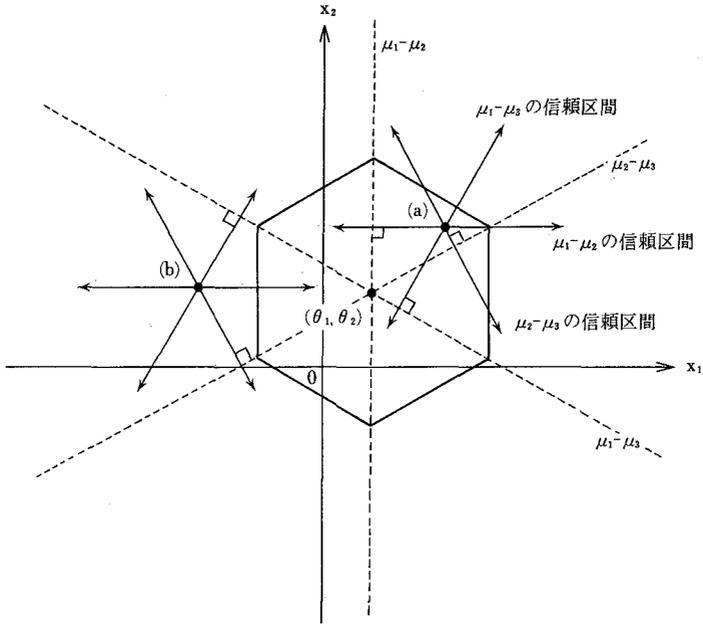


図4 T法による同時信頼区間

の1本は対応する点線と交わっていない。つまり、 $\mu_1 - \mu_2$ を区間の中に入れていない。したがって(b)において構成された同時信頼区間は真の母数の差を“同時には”含んでいない。

図4において(a), (b)以外の点についても調べてみると、結局 (θ_1, θ_2) を中心とした正六角形の内部にデータが落ちた時はその点を中心として構成された3つの信頼区間は $\mu_i - \mu_j$ をそれぞれ含むが、正六角形の外部にデータが落ちた時は少なくとも1つの $\mu_i - \mu_j$ が信頼区間に含まれなくなることが分かる。そして前者の起こる(データが正六角形の内部に落ちる)確率は先に述べたように丁度0.950となるので、T法による同時信頼区間の妥当性が成り立つ。

3. 2 SD 法に対応する同時信頼区間の非妥当性

ここでは、1節で述べた SD 法に対応すると思われる $\mu_i - \mu_j$ の同時信頼区間について考察する。この手法では T 法によるものより個々の信頼区間が長くなることはないので、T 法によるもので少なくとも 1 つの $\mu_i - \mu_j$ を含まない場合は SD 法によるものでも含まないから、 (θ_1, θ_2) を中心とした正六角形の外部は考えないでよい。この正六角形の内部では T 法によるものはいつもすべての $\mu_i - \mu_j$ を含み、その領域の確率は 0.950 だったのだが、それが SD 法によるとどうなるかを見てやればよい。SD 法により T 法を修正するのは SD 法と T 法の検定結果が食い違った時だから、図 3 上に (θ_1, θ_2) を中心とした正六角形を書き込んだ図として代表的な 4 パターンを図 5-1~4 に示す。

図 5-1 では (θ_1, θ_2) 中心の正六角形の内部で SD 法と T 法の検定結果が食い違う領域は 5 カ所あり、データがこの領域に落ちた時 T 法による対応する信頼区間が 0 を含むならその 0 に近い方の限界値を 0 に修正するという手順をとった。まず、データが (c) の位置に落ちた時を考えてみよう。この点において T 法により構成された 3 本の両向き矢印の信頼区間はそれぞれの真の母数 $\mu_i - \mu_j$ を表す点線と“直角印”において交わっている。一方、点 (c) は“①の領域”に属するから、T 法と SD 法の $H_{(1,2)}$ の検定結果に関して食い違いが生じている。そこで、 $\mu_1 - \mu_2$ の T 法による信頼区間が 0 を含むかどうか見てみると ($\mu_i - \mu_j = 0$ というのは図の $(0, 0)$ を中心とした (太字の) 正六角形の (太字の) 対角線にそれぞれ対応する。例えば $\mu_1 - \mu_2 = 0$ は x_2 軸と重なる対角線である)、0 を含んでいる ($\mu_1 - \mu_2 = 0$ を表す対角線と“2重直角印”で交わっている)。したがって、SD 法の検定結果に対応するようにこの場合は上限 (0 に近い方) を 0 と修正する。この修正した信頼区間を一点破線で示しているが、これはもはや $\mu_1 - \mu_2$ に対応する点線と交わらない。したがって、(c) の位置において構成された SD 法に対応する信頼区間は同時に 3 つの母数の差を含むことができなくなる。このよ

- ① : $H_{(1,2)}$ を棄却
- ② : $H_{(1,3)}$ を棄却
- ③ : $H_{(2,3)}$ を棄却

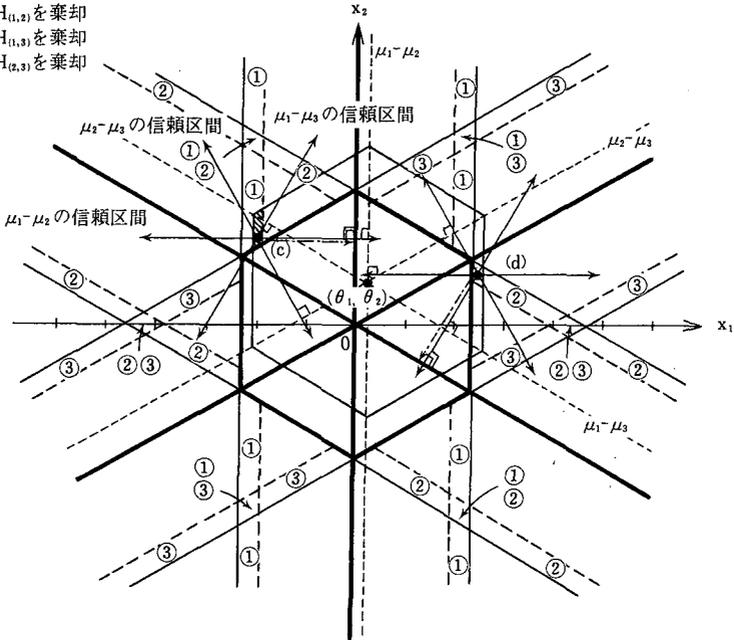


図5-1 SD法による信頼区間について(その1)

うな状況は点(c)を含む図5-1に斜線で示した狭い平行四辺形の領域においても同様となる。

次にデータが点(d)の位置に落ちたとすると、この点においてT法により構成された信頼区間はそれぞれ対応する真の母数の差を表す点線と“直角印”で交わっている。一方、この点(d)は検定においてSD法を用いるとT法では棄却できなかった $H_{(1,3)}$ を棄却できる領域であるので、T法による $\mu_1 - \mu_3$ の信頼区間が $\mu_1 - \mu_3 = 0$ を表す(左上から右下への)太字の対角線と交わっているかどうか見てやると、“2重直角印”で交わっていることが分かる。そこで、0に近い方の限界値を0と修正すると一点破線となる。これはまだ $\mu_1 - \mu_3$ を表す点線と交わっているから、結局点(d)で構成されたSD

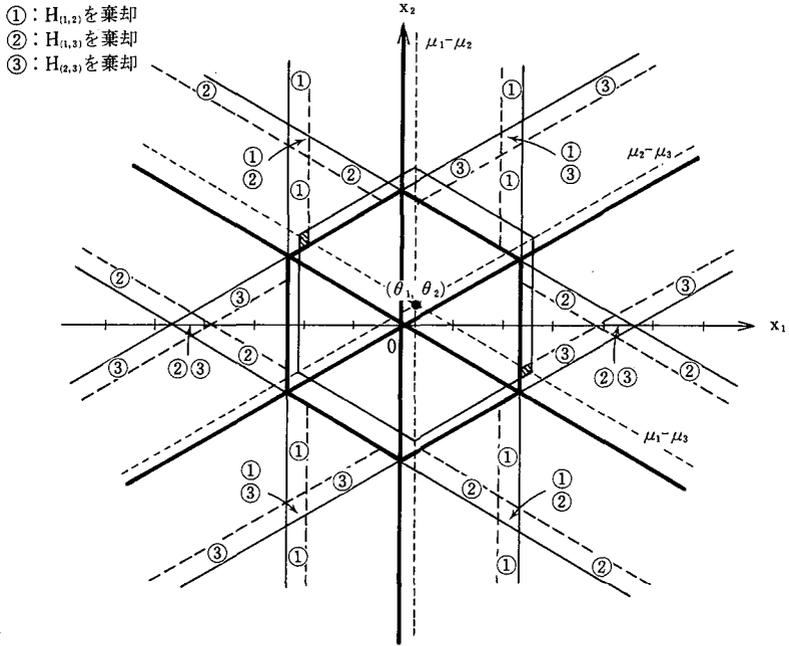


図5-2 SD法による信頼区間について(その2)

法に対応する同時信頼区間は“同時性”を失っていないことになる。 (θ_1, θ_2) を中心とする正六角形の内部でSD法とT法の検定結果の食い違う領域は上の他に3カ所あるが、これらはすべて点(d)と同様で問題はない。

図5-2のパターンを考える。 (θ_1, θ_2) の位置が図5-1より原点に近づいているが、この場合 (θ_1, θ_2) を中心とする(細字の)正六角形の内部には検定においてSD法とT法の結果の食い違う領域が6カ所ある。(右下の斜線部が図5-1より新たに加わった。)図5-1の場合と同様の考察を繰り返していくと、SD法に対応する信頼区間が“同時性”を失うのは斜線を描いた2つの領域(図5-1と同じものと、図5-2で新たに加わったもの)であることが分かる。

- ① : $H_{(1,3)}$ を棄却
- ② : $H_{(1,2)}$ を棄却
- ③ : $H_{(2,3)}$ を棄却

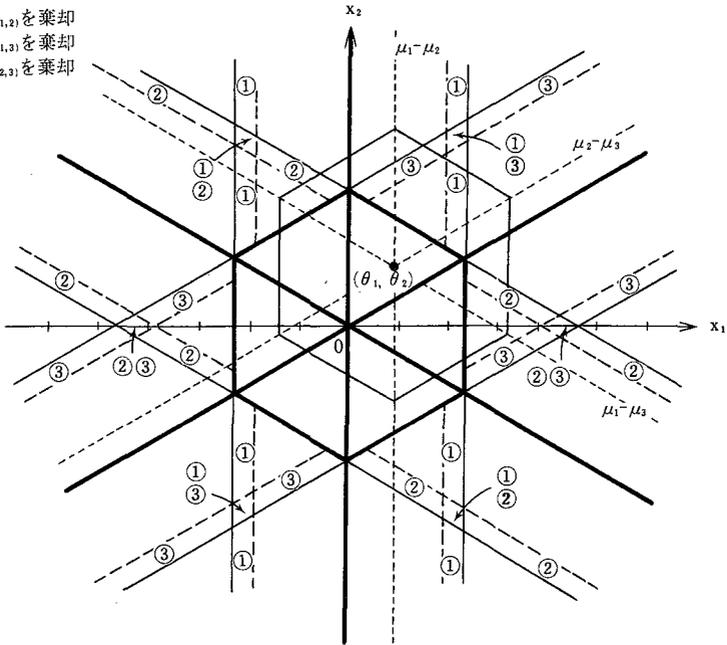


図5-3 SD法による信頼区間について(その3)

図5-3のパターンを考える。これは (θ_1, θ_2) が原点からも太字の対角線からもそれぞれ離れている状況である。ここでは (θ_1, θ_2) 中心の細字の正六角形の内部には検定結果がSD法とT法で食い違う領域が4カ所ある(図5-2で斜線を描いた部分はもはや無くなっている)。そこで上と同様の考察を行うと、この4つの領域のどれにデータが落ちてもSD法に対応する信頼区間の“同時性”に問題は生じないことが分かる。

最後に、図5-4のパターンを考える。これは $\theta_1 = 0$ の場合である。このときは (θ_1, θ_2) を中心とする細字の正六角形の内部には検定結果がSD法とT法で食い違う領域が4カ所ある。そのうちで、斜線を描いた2つの領域にデータが落ちた時、信頼区間の“同時性”が失われることが分かる。た

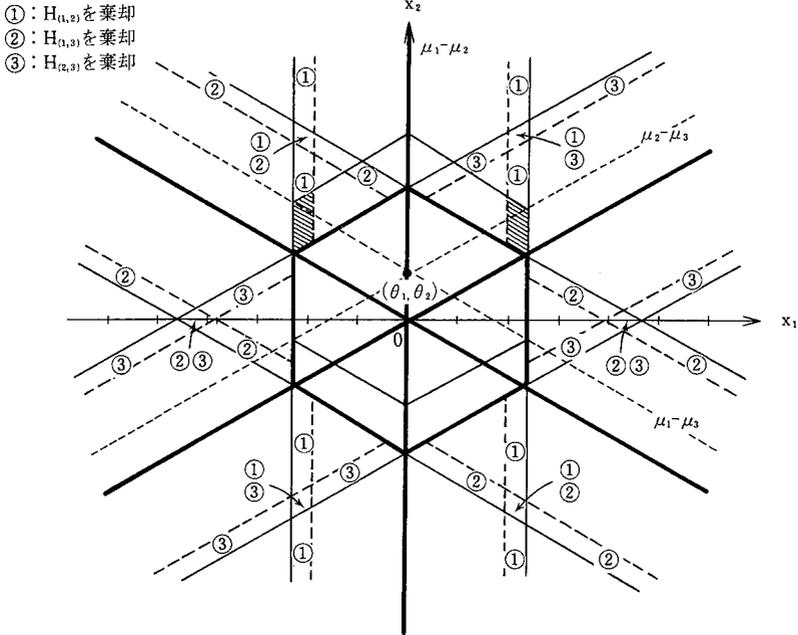


図5-4 SD法による信頼区間について(その4)

だし、この場合は図5-1や図5-2のパターンと少し状況が異なる。図5-4の斜線部にデータが落ちた時はT法による $\mu_1 - \mu_2$ の信頼区間の片方を0と修正することになる。一方、真の $\mu_1 - \mu_2$ の値は0(= θ_1)であり、信頼区間を開区間として定義していたから、SD法に対応する信頼区間は $\mu_1 - \mu_2 = 0$ を含まないことになっている。つまり、図5-1や図5-2の斜線部にデータが落ちた時は真の $\mu_1 - \mu_2$ の1つが信頼区間の外点になるという意味で“同時性”が崩れたのだが、図5-4の場合は信頼区間の境界になるという意味で“同時性”が崩れる。また、図5-1や図5-2で示された (θ_1, θ_2) の近傍で (θ_1, θ_2) を変化させると斜線部の確率は連続的に変化するが、 $\theta_1 = 0$ のところでは連続性が崩れることも注意しておく。

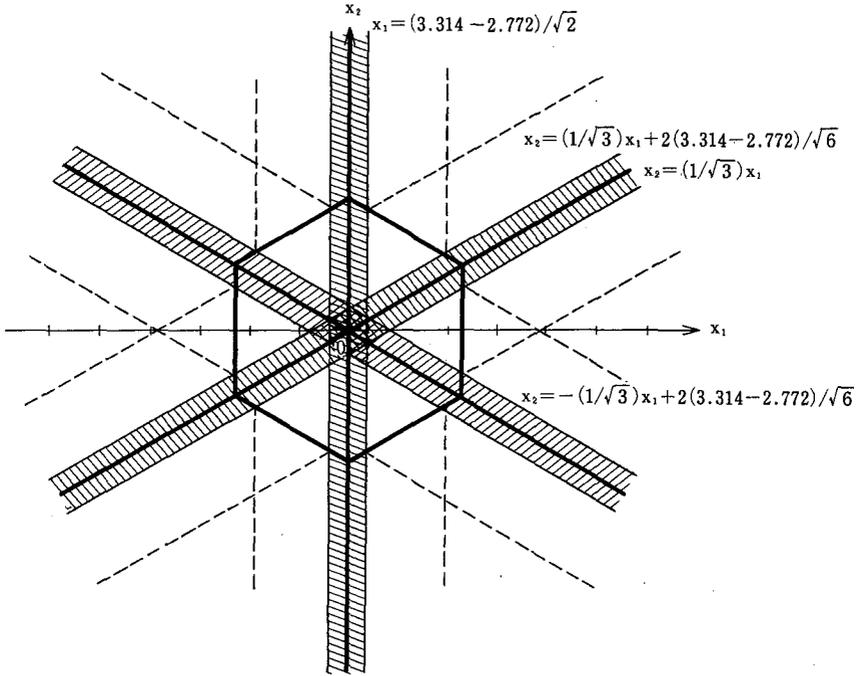


図6 SD法による信頼区間の同時性がくずれる (θ_1, θ_2) の領域

$\theta_1 \rightarrow 0$ とした時の斜線部の極限は図5-4の2つの斜線部のうちの左側部分だけであるのに対して、 $\theta_1 = 0$ の時は図5-4の右側の斜線部も考慮しなければならぬからである。したがって、図5-4の状況では、“同時性”の崩れる確率が他の状況より大きめとなる。

以上より、図5-1~4をまとめて、対称性を考慮すると (θ_1, θ_2) が図6の斜線の領域(原点は除く)にある時に図5-1, 図5-2, 図5-4の状況の生じることが分かる。図6において斜線の描かれていない領域に (θ_1, θ_2) があるときは、SD法に対応する信頼区間を用いても信頼率は0.950である。図6から x_2 軸と $x_1 = (3.314 - 2.772) / \sqrt{2}$ と $x_2 = (1/\sqrt{3})x_1$ で囲まれた斜線の領域を取り出して、この領域内の各点に $(\theta_1,$

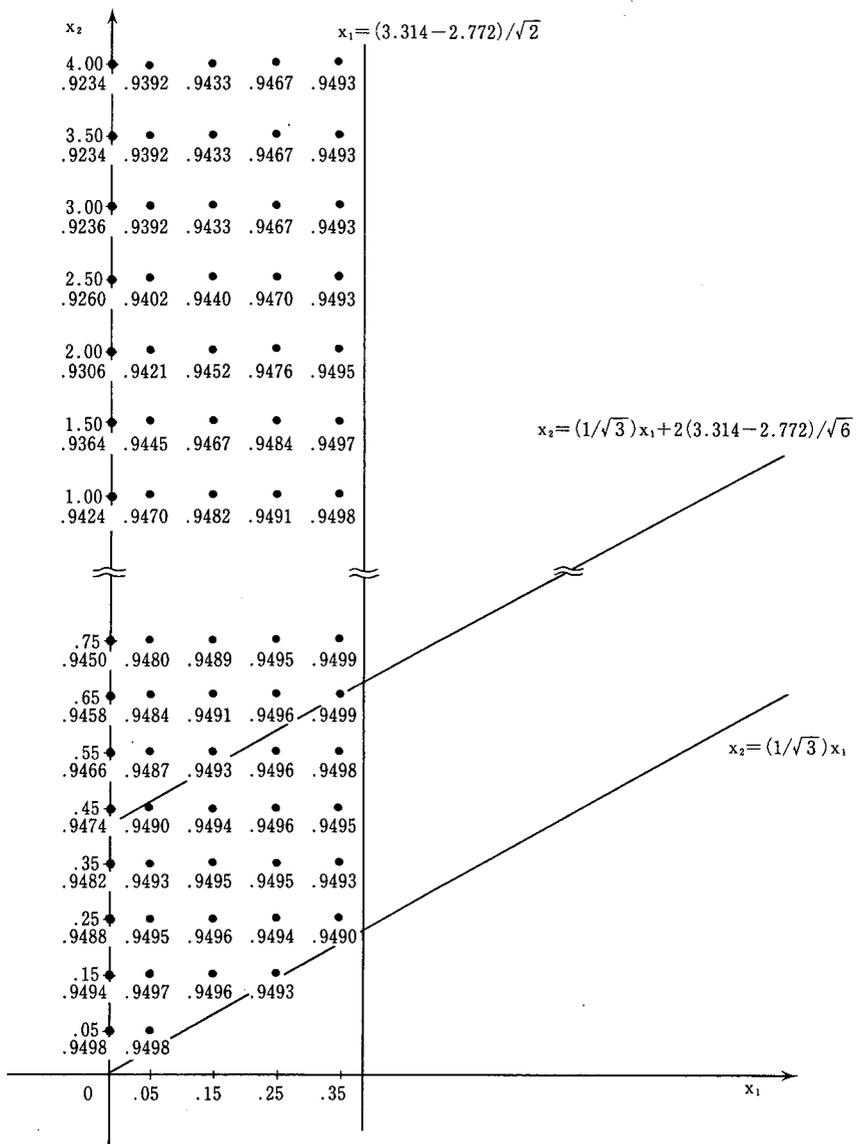


図7 SD法による信頼区間の真の信頼確率

θ_2) があった時 SD 法による同時信頼確率がどうなるかを数値計算してみた。これは図 5-1, 図 5-2, 図 5-4 で斜線が描かれた領域の確率を求めて 0.950 からひけばよい。(図 6 の他の斜線部に対しては対称性より同じ結果が得られる。) その結果を図 7 に示す。図 7 の見方は次の通りである。例えば一番左下に .9498 とあるが, その \cdot 印は $(\theta_1, \theta_2) = (0, .05)$ であることを表し, (θ_1, θ_2) がこの値の時 SD 法に対応する同時信頼区間を用いたときの信頼確率が 0.9498 であることを意味する。図 7 より全般的な数値の大きさは, $\theta_1 = 0, \theta_2$ が大の場合を除くと, 名目の 0.950 の信頼率からわずかに下回る程度であることが分かる。また, 下限値は $\theta_2 = \infty, \theta_1 = 0$ のとき 0.9234 であり, $\theta_1 \neq 0$ の下では $\theta_2 \rightarrow \infty, \theta_1 \rightarrow 0$ のとき 0.9367 である。

参 考 文 献

- [1] Einot, I. and Gabriel, K.R. (1975): A study of the power of several method in multiple comparisons, J. Amer. Statist. Assoc., 70, 574-583.
- [2] Hochberg, Y. and Tamhane, A. C. (1987): Multiple Comparison Procedure, Wiley.
- [3] 松田眞一, 永田 靖 (1990): 多重比較における新たな検出力の提案と各手法の特徴比較, 応用統計学, 第19巻, 93-113.
- [4] Ramsey, P. H. (1978): Power differences between pairwise multiple comparisons, J. Amer. Statist. Assoc., 73, 479-485.