

ある社会的選好関数の計測法について

藤 本 利 躬

[1] 序⁽¹⁾

社会は個人から成るが、この社会と個人との間の関係を次のような最も基本的かつ本質的な問題形式において取り扱う理論を社会的選択論 (theory of social choice) ということは周知のことであろう。すなわち、社会構成メンバーである各個人の利害ないし価値判断をどのように集計すれば社会的厚生ないし選好 (social welfare or preference) とか社会的価値 (social value) と呼ばれる社会全体のそれになるのか、という問題がこれである。

そのルーツを尋ねると、「正邪の判断基準は最大多数の最大幸福にある」とした2世紀前のベンサム²⁾の功利主義までは難なくたどり着くことができるし、下って今世紀初頭にはこうしたベンサム型基準に基づくピグー (文献 [7]) の旧厚生経済学の体系に、そしてその18年後にはバークソン (文献 [2]) の社会的厚生関数に、各々、遭遇するはずである。

しかし、今日流の、いわゆる「社会的選択論」のフォーマットの元祖となったのはバークソンに遅れること13年のアロー (文献 [1]) であり、これに関連してその後に生み出された研究は星の数ほどとはいわぬまでも、とに

(1) 本稿の底意は、旧拙著 (文献 [6]) の執筆に当り文献 [3] の代わりにアクセスし易い文献 [9] を用いたが、その際おかした推論ミスに起因する誤りを訂正することにある。

かく枚挙に暇がないほどの蓄積があることは確かである。これらの系統的な分類と類型間の比較論議は、例えばセン（文献〔8〕）の手際よい優れたサーベイに委ねることとし、ここでは30年以上も前に公表されたボガード & ヴァースリュース（文献〔3〕）—今後は簡単にBV関数と略記する—を取り上げて⁽²⁾、計算例は除き、そのロジックの検討だけを行うこととする。

そうする理由は、アロー関数は、本来、存在否定型の消極的論理構成を取っているのに対してBV関数は存立可能となるように極めてプラグマチックに仕組まれているために積極的実践型アプローチと見えること、その結果、アロー関数を初めとして多くの研究の分析手法がいわゆる公理主義的であるのに対してBV関数は計量経済学的であること、以上である。

〔2〕政策策定委員会モデル：相互主義基準

ここに想定する政策策定委員会はN人の委員から成り、各委員 i は固有の個人的選好関数 $w_i(x)$ を持ち、いわゆる単峰型としてすでに計測ないし推定済みであり⁽³⁾、その1次変換 $a_i + b_i w_i(x)$ も同じ働きをする関数となりうるようなものであるとする。ここに、 x は国民の幸福を規定する n 個の目標変数から成る n 次元列ベクトル、 a_i と b_i (> 0) は定数である。

ちなみに、これは $w_i(x)$ を基数的効用関数 (cardinal utility function) として構想していることを意味する（文献〔5〕p.42）。したがってBV関数の戦略は、基数型効用に基づく点では旧厚生経済学に先祖帰りした観がある

(2) これを文献〔6〕で「タイルの委員会モデル」として論じたのは正確ではない。もっとも、BV関数の展開においてタイルが大きくコミットしていたことについては、著者のタイルへの謝辞もあり、またタイルの分析癖が随所に散見されることから疑問の余地がない。

(3) たとえば、フリッシュ（文献〔4〕）の方法によって2次関数型(1)で計測が終わっていると想定するのである。

が、効用の個人間比較可能性についてはこれを否定し、むしろこれを逆手に取って、個人間比較が不可能だからこそ、昨今貿易交渉関連で有名になった相互主義 (reciprocity principle) タイプの倫理基準に依拠した政治的介入のための余地をそこに求めて先ずアロー問題を解決し、次に最新の社会的厚生関数型厚生経済学の土俵に登ろうというものであることがやがて分かるだろう。

こうした単峰型の個人関数としてしばしば利用されるのは

$$w_i(x) = k_i'x + (1/2)x'K_ix, (i=1, \dots, N) \quad (1)$$

という2次選好関数である。ただし、 k_i は1次項の定数係数を要素とする n 次列ベクトル、 K_i は2次形式の負定値で対称な n 次定数係数行列である。なお、 x' は行列 x の転置行列を表し、以後同様とする。

かくて、各委員の最適化の方向は $w_i(x)$ の最大化である。単峰型を仮定したため、この最大問題の解は単一である。2次関数による例説を続けることにすれば、 $w_i(x)$ の無制約最大化は目標値を

$$x = x^i = -K_i^{-1}k_i, (i=1, \dots, N) \quad (2)$$

にセットすることによって達成される。解 x^i は第 i 委員の個人的最適 (individual optimum) という。そのとき、当該委員にとっての最高選好水準が

$$w_i(x^i) = -(1/2)k_i'K_i^{-1}k_i, (i=1, \dots, N)$$

となることは明かである。

x が x^i に等しくない一般の場合には、第 i 委員に個人的ロス (individual loss) が発生する。これを $L_i(x)$ と表すことにしよう。すなわち、

$$L_i(x) = w_i(x^i) - w_i(x) \geq 0, (i=1, \dots, N) \quad (3)$$

であり、第 i 委員が個人的最適を達成できない度合をあらわす。2次関数例では次のようになる、

$$L_i(x) = -(1/2)(x - x^i)'K_i(x - x^i), (i=1, \dots, N)$$

$w_i(x)$ と $L_i(x)$ は第 i 委員の個人的選好を表す機能において同一モデルの表裏の関係にある⁽⁴⁾。明記した通り、 $L_i(x)$ は定義によって非負で

ある。すなわち、ただ1点 $x = x^i$ において下限0になるほかはすべて正値をとるが、一方の $w_i(x)$ は $x = x^i$ だけで最大値 $w_i(x^i)$ を達成し、それを外すとより低くなる、といった具合である。したがって、以下では、選好関数としてはロス関数を用いて個人的選好の社会化が論じられることになる。そうした方が関数の値域が非負象限に明確に限定されて議論がわかり易くなるからである。

さて、こうしたN人の委員から成る委員会の選好関数の構成としては

$$L_s(d, x) = \sum_{i=1 \sim N} d_i L_i(x) \quad (4)$$

と設定するのが単純明解、かつ自然である。これを社会的ロス関数 (social loss function) という。ここに d_i ($i = 1, \dots, N$) は個人的ロス関数の1次結合の係数である。数学的にはそうであるが、社会的には策定委員会における各委員の相対的重要度を評価した結果と見なさざるをえない。したがって

$$d_i > 0, (i = 1, \dots, N) \quad (5)$$

としなければならないことは自明であろう。 $d_i = 0$ は第 i 委員を社会的に無視することであり、いわんや $d_i < 0$ は第 i 委員を害虫視することを意味するからである。

(4) において社会関数 L_s は d と x との関数である。 L_s を d の関数と見なしたものがアロー関数であり⁽⁵⁾、 d の妥当な決定如何を問うのがアローの問題であり、これに解がないというのがアローの不可能性定理 (impossibility theorem) である。一方、 L_s を x の関数と見立てたのがバークソン関数であり、これを最適 (ここでは最小) にする x を求める通常の数理計画問

(4) このように最大化を最小化に切り替えて分析するのがタイルの癖である。

(5) L_s はN個の L_i を經由して x へ依存するが、この L_i がどのように L_s に結び付くかを決めるのが d であるから、結局は L_s が x の汎関数になっていることがわかる。

題が中心となる理論、これがいわゆる厚生経済学の社会厚生関数型アプローチと格付けることができよう。明らかに、アロー問題の解決が先立たなければならぬ。

ところで、 $w_i(x)$ が第 i 委員の選好関数なら、 a_i と $b_i (> 0)$ を任意定数とする $a_i + b_i w_i(x)$ もそうであると仮定したこと想起しよう。そうであるなら、 $L_i(x)$ と $b_i L_i(x)$ とは、これまた同値となるはずである。この b_i は正值であれば任意に選んでよいのだから、その選択を個人の社会的評価係数 d_i の決定に委ねることにしても一向に差し支えがないのは明かである。

かくして、究極の問題は N 個の d_i をどのように決定するのが合理的ないし最適か、ということとなる。その意味は、社会（委員会）は個人（委員）の集合であるのだから、社会（委員会）の選好関数も個々の社会構成員（委員）の個人的選好関数を集計することによって形成されなければならないが、どのように集計するのが妥当か、ということに尽きる。

この問題を考えるに当たってのポイントは、任意の委員が自分の個人的最適を利己的に押し通すなら、他のすべての委員に、多少の差はあれ、個人的ロスが発生する形で迷惑が及ぶのは必定という当然の帰結を認識することである。たとえば、第 j 委員の個人的最適 x^j が委員会の最適として選択されたとき第 i 委員が被るロス $L^i(x^j)$ であり、逆に第 i 委員の最適 x^i が選ばれたことによる第 j 委員の被害は $L_j(x^i)$ となる。このようなロスは、さしあたり $N(N-1)$ 種類も定義でき、これらを行列表示すれば、現存する N 人の個人相互間の社会経済的利害関係のあり方を定性的・定量的に明示することができて重宝至極である。

ところで、この行列表示のために、個人的ロスの表記を

$$L^i(x^j) = L_{ij}, \quad (i, j = 1, \dots, N; i \neq j)$$

と簡単にすれば、個人的ロス行列は

$$[L_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & L_{12} & \cdots & L_{1N} \\ L_{21} & 0 & \cdots & L_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ L_{N1} & L_{N2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (6)$$

という特殊な非負行列となる。すべての対角要素 $L_{ii} = 0$ に対してすべての非対角要素 $L_{ij} > 0$ と整然たる符号の分離が見られるから特殊なのである。ここで、 $L_{ii} = 0$ は第 i 委員の個人的最適が社会的最適として採択されたために当該委員だけはロスがなくなっているという意味である。

個人的ロス行列の各行には N 個ある個人的最適が順番に社会的最適として採択されたときの個人的ロスが委員別に行儀良く並べられている。この各行、たとえば第 i 委員分である第 i 行の全要素に第 i 委員に対する社会的評価係数としての一定の任意正定数 d_i を掛け合わせて調整しても、そうすることによって第 i 委員の個人的選好順序が変わることはないのは既述した通りである。つまり、

$$[d_i L_{ij}] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & d_1 L_{12} \\ d_2 L_{21} & 0 \end{bmatrix} & \cdots & d_1 L_{1N} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ d_N L_{N1} & d_N L_{N2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (7)$$

としても、この各行の要素間の大小順序は $[L_{ij}]$ のそれと同一との意味で、個人的選好関係の内容に関する限り、不変である。

$[d_i L_{ij}]$ は、いわば「社会的調整後個人的ロス行列」である。 $[L_{ij}]$ は、そうすると「社会的調整前個人的ロス行列」とでもいうべきか。

問題のエッセンスは、社会的評価ベクトル $[d_1, \cdots, d_N]$ をいかに決定するのが妥当 (appropriate) か、ということに帰する。最も無難な妥当性のベースは「公平」(fair) であろう。

議論を見通しやすくするために、最も簡単な $N=2$ 、つまり2人委員会のケースから考察し始めることにしよう。その社会的調整後ロス行列は(7)の中の左上の2次小行列となる。この場合の公平な社会的評価とは

$$d_1 L_{12} = d_2 L_{21}, \therefore d_1/d_2 = L_{21}/L_{12} \quad (8)$$

が成立するように d_1 と d_2 の比を決定することである。すなわち、第1委員が自分の最適を第2委員に押し付けることによって第2委員に及ぼすロスが逆に第2委員の最適を受け入れることによって第1委員が被るロスに等しくなるように評価係数を動かすことで社会的に調整するのである。

これは相互主義的調整法とも呼ぶことができよう。

この方法に対応する社会的選好関数が

$$L_s(x) = L_{21}L_1(x) + L_{12}L_2(x) \quad (9)$$

となることは明かだろう。その意味は、2人社会の社会的選好関数は個人的関数をその個人の利得が原因でライバルに及ぶ損失でもって加重し、合計すればよいということである。

[3] アドホック基準

以上の相互主義的方法の形式的特徴はもともとは非対称なロス行列を評価係数で調整して対称化するというところにある。これが適用できるのは2人社会に限られることは、構成員数が $N(>2)$ 人の一般ケースに戻って考えれば直ちにわかる。すなわち、社会的調整後ロス行列 $[d_i L_{ij}]$ を一見して、これが対称ということは

$$d_i L_{ij} = d_j L_{ji}, \quad (i, j = 1, \dots, N; i \neq j) \quad (10)$$

が成立することである。これは $(N-1)$ 個の比率 d_i/d_j を未知数とする連立方程式であるが、方程式数は $N(N-1)/2$ もあるから、 $N \geq 3$ では完全な過剰決定系になってしまうことが明かである。

こうして、以上の対称行列方式は一般には通用しないことが判明した。そ

の対策としてボガード&バースリュースが提案するのは、完全な対称化が不可能なら不完全なそれだという極めてプラグマチックなものである。すなわち、 N 個の行の和と対応する列の和が等しくなるように d_i/d_j を決定するというアドホックなアプローチがそれである。具体的には、(10)の両辺を集計して

$$\sum_{j=1 \sim N} d_i L_{ij} = \sum_{j=1 \sim N} d_j L_{ji}, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (11)$$

となるように比率 d_i/d_j を決定するのである。

これを要するに、任意の2個人の相互に掛け合う迷惑(ロス)を、このように組合わされたペアごとに均等化するのでなく、任意の1個人が全ての他者に掛ける迷惑の合計が、逆に当該個人が全ての他者から被る迷惑の合計に均等化するように係数 d で調整するというわけである。

いま少し熟考してみれば、これは、 N 人もいる個人を任意の1人の「自己」と残余の「他人」とに区分し、他人を一括して1人と考えることによって前節[2]の相互主義的に対角化可能な2人ケースに近似させようとする考え方にはかならないことがわかる。

ともあれ、(11)を行列表示してみると、連立方程式の構造は次のようになる⁽⁶⁾、すなわち

$$\begin{bmatrix} -\sum L_{1j}, & L_{21} & \cdots & L_{N1} \\ L_{12}, & -\sum L_{2j} & \cdots & L_{N2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ L_{1N}, & L_{2N} & \cdots & -\sum L_{Nj} \end{bmatrix} d = 0 \quad (12)$$

ここで、 d は d_i を成分とする N 次列ベクトルである。

(6) 文献[6] p.186における誤りは式(12)をもって次節の(しかし制約条件がない)最小2乗問題 $\{\sum \Sigma_{i,j} (d_i L_{ij} - d_j L_{ji})^2 \rightarrow \text{最小}\}$ に対応する正規方程式と誤認したことである。

問題は(12)に d に関して正值解があるかどうかである。なければ、この方法は単なる画餅に帰すからである。ボガード&バースリュースの次の2定理がそのような解の存在を保証してくれる⁽⁷⁾。すなわち、

定理1 $[L_{ij}]$ がすべての対角要素 $=0$ 、すべての非対角要素 >0 なる N 次行列であるならば、(12)は正值解のみを持つ。

定理2 定理1の条件下では(12)の任意の2解 d と d^* とは1次従属である。

まず、定理1は、提案通りの手順を踏めば1つでも $d_i < 0$ となる解はあり得ないとの意味において当該手法が合理的であることを、また定理2は解が比率としては単一であるから、それが複数あって選択に迷うようなことがないとの意味でこの決定方式は有効に機能することを各々保証しているのである。

[4] 最小2乗基準

$L_{ij} > L_{ji}$ のとき、すなわち第 j 個人の最適の実現に起因する第 i 個人のロスが第 i 個人の最適化から派生する第 j 個人のロスより大きいときは、個人 i のベストを実現するのが社会的に得策であるように見える。無くなるロスの方が発生するロスより大きいので社会的にプラスと映るからである。しかし、これは、個人間の効用比較可能性を導入するにしても、2個人 i, j の効用を1:1で換算するという最もプリミティブなベンサム・ピグー型の社会的効用関数を持ち込むことを意味し、容認し難いことは無論である。ライバル関係にある2個人 i, j が相手に起因して自分に及んだロスを専ら主観的に評価して申告するのをそのまま社会が承認するようなら、 cm 単位で計っていたのを mm 単位に切り替えて数字を膨らます方式で効用関数をインフ

(7) ボガード&ヴァースリュースの証明論議(文献[3] pp. 277~8)の紹介は省く。

レートし、要するにオーバーに声高く申し立てる方が勝つに決まっているからである。

こうしたことを回避するためには個人的関数の社会的評価をもっと洗練する必要である。そのために先ずなさねばならないことは L_{ij} と L_{ji} の大小比較は無意味であること、両者は、一方が最適なら、それと裏腹に他方は最適でない状況を強要されているという意味で、どの個人的最適も相手の機会費用になっているのだから、トレード・オフの関係にあることを認識した上で、 L_{ij} と L_{ji} が社会的評価において無差別となるように2人の個人的効用の換算比率をきめる、換言すれば限界代替率が比率 L_{ij}/L_{ji} に等しくなるように社会的無差別曲線の傾きを決めること、つまり(10)が成り立つように d_i/d_j を決定することである。

こうした手順をあらゆる2人組に対して施して最終的に社会的選好関数(4)に到達するというのがこの方法の理想型であるが、それが論理的に不可能なために前節のような、いわばアドホックなアプローチが次善の策として工夫されたのであった。しかし、次善の策は何もこれだけに限ったわけではない。すなわち、要は、社会的調整後ロス行列の対称化が論理的に不可能なとき、直ちに(11)に逃避するのではなく、正確な対称化が不可能なら近似的にできればよしとする実用主義的アプローチである。

近似の手法は、無論、次のような条件付き最小2乗法である。すなわち、

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j (d_i L_{ij} - d_j L_{ji})^2 &\rightarrow \text{最小}, \\ \text{制約 } \sum_i d_i &= 1, \\ d_i &> 0, (i = 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (13)$$

という2次計画問題を解けばよい。この問題のラグランジュ関数は

$$\sum_i \sum_j (d_i L_{ij} - d_j L_{ji})^2 + \lambda (1 - \sum_i d_i),$$

である。ここに、 λ はラグランジュ乗数。これに対するクーン・タッカー条件は、 $i = \text{全成分が1の} N \text{次元列ベクトル}$ 、として次の通りになる、すなわち

$$\begin{bmatrix} \Sigma L_{1j}^2, & -L_{21}L_{12} & \cdots & -L_{N1}L_{1N} \\ -L_{12}L_{21}, & \Sigma L_{2j}^2 & \cdots & -L_{N2}L_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -L_{1N}L_{N1}, & -L_{2N}L_{N2} & \cdots & \Sigma L_{Nj}^2 \end{bmatrix} d = \lambda \cdot i \quad (14)$$

$$\Sigma_i d_i = 1, d > 0$$

この条件システムにおけるロス行列は完全対称になっている点に注意しよう。したがって、これを解くことにより個人間の相互主義的限界代替率に最も近似した社会的評価係数を決定することができる。

[5] 結 び

この最小2乗アプローチと[3]節のアドホック法を比較すれば、共に近似である点は同じであるが、1個人とペアを組む他の個人がマクロ的に一括されてしまうアドホック法に対して、ここではあくまで個人間の1対1対応が図られるから、いわばより肌理細かい近似に到達できると考えられる。

なお、この最小2乗アプローチは、ボガード&ヴァースリュースが[3]節のアドホック法を主要とし、これに代わり得る「社会的に最適な意思決定のための代替基準」の一つとして付録で副次的に、いわば継子扱いしているものである。その理由として挙げているのは、アドホック法が常に正值解 $d > 0$ を算出するのに対して最小2乗法は必ずしもそうではないとの意味で、実践的有効性においてアドホック法に劣るきらいがあるということのようである。しかし、注意しなければならないのは、その際、制限条件として $\Sigma_i d_i = 1$ ではなく、

$$\Sigma_i d_i^2 = 1^{(8)}$$

(8) この制約を用いる理由は、問題を固有値問題に還元して解こうとするからである。

を課していることである。これは、明らかに、 $d_1 < 0$ を許容するものであるから、そうなるのも当然である。

今日では 2 次計画法もソフト面で充実してきており、最小 2 乗アプローチが計算面においていまだにネックを抱えているとは思われない。したがって、先ずこの方法で解いてみて、解がないときにアドホック法で対応するのが順当というものだろう。

いずれにせよ、 d が確定すれば、社会的選好関数はバーグソン型関数となって確定するから、政策策定は実践段階に入ることができるのである。

文 献

- [1] K. J. Arrow, *Social Choice and Individual Values*, Wiley, 1951 & 2nd Edition, Wiley, 1963 (長名寛明訳「社会的選択と個人的評価 (第 2 版)」日本経済新聞社, 1977)
- [2] A. Bergson, "A Reformulation of Certain Aspects of Welfare Economics", *Quarterly Journal of Economics* 52(2), February 1938
- [3] P. J. M. van den Bogaard and J. Versluis, "The Design of Optimal Committee Decisions", *Statistica Neerlandica* 16-3, 1962
- [4] R. Frisch, "Numerical Determination of a Quadratic Preference Function for Use in Macroeconomic Programming", *Memorandum from Institute of Economics, University of Oslo*, 14 Feb. 1957
- [5] 福岡正夫「一般均衡理論」創文社, 1979
- [6] 藤本利躬「最適経済政策のモデル」大明堂, 1977
- [7] A. C. Pigou, *The Economics of Welfare*, Macmillan, 1920
- [8] A. K. Sen, "Social Choice Theory", in K. J. Arrow and M. Intriligator (eds), *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. 3, North-Holland, 1986
- [9] H. Theil, *Optimal Decision Rules for Government and Industry*, North-Holland, 1964