*Mathematical Journal of Okayama University*

*Volume* 31, *Issue* 1 1989 *Article* 13

JANUARY 1989

# Zur Struktur Nichtkommutativer Ringe

Walter Streb*

*Universität-GHS-Essen

Math. J. Okayama Univ. 31 (1989), 135−140

# ZUR STRUKTUR NICHTKOMMUTATIVER RINGE

WALTER STREB

**Einleitung.** Sei $\boldsymbol{K}_x$ eine Klasse von Ringen, $K_x$ die Teilklasse der nichtkommutativen Ringe aus $\boldsymbol{K}_x$ und $T, R \in K_x$. $T$ heißt $R$-reduzierend genau dann, wenn $R_i \in K_x$, $0 \leq i \leq n$ existieren, so daß $R_0 = R$, $R_n = T$ und $R_{i+1}$ Unterring oder (homomorphes) Bild von $R_i$, $0 \leq i < n$. (Hierbei ist nicht vorausgesetzt, daß $\boldsymbol{K}_x$ oder $K_x$ selbst abgeschlossen ist bezüglich Bildung von Unterringen oder Bildern.) $K_x^*$ heißt $K_x$-reduzierend genau dann, wenn $K_x^* \subset K_x$ und zu jedem $R \in K_x$ ein $T \in K_x^*$ existiert, so daß $TR$-reduzierend.

Dieser methodische Ansatz ist hilfreich, insbesondere beim Beweis von Kommutativitätssätzen:

Sei $E$ eine für Ringe aus $\boldsymbol{K}_x$ erklärte Eigenschaft, welche sich innerhalb $\boldsymbol{K}_x$ auf Unterringe und Bilder vererbt und $K_x^*$ $K_x$-reduzierend. Ist $E$ für keinen Ring aus $K_x^*$ erfüllt, so ist jeder Ring aus $\boldsymbol{K}_x$, welcher $E$ erfüllt, kommutativ.

In dieser Note werden $K_x^*$ angegeben, insbesondere zu folgenden Klassen $\boldsymbol{K}_x$ von Ringen $R$:

$\boldsymbol{K}_r : R$ beliebig; $\boldsymbol{K}_{lu} : R$ links-$s$-unitär; $\boldsymbol{K}_{ru} : R$ rechts-$s$-unitär; $\boldsymbol{K}_u : R$ $s$-unitär; $\boldsymbol{K}_{PI} : R$ PI-Ring; $\boldsymbol{K}_n : R$ mit $R'$ (Kommutatorideal von R) $n$-torsionsfrei.

Für $\boldsymbol{K}_x$ sei $\boldsymbol{K}_{x,1}$ die Klasse aller $R \in \boldsymbol{K}_x$ mit $1 \in R$.

**Notationen.** Seien $\boldsymbol{Z}$ bzw. $N$ die Menge der ganzen bzw. positiven ganzen Zahlen, $P$ die Menge aller Primzahlen, $F_p$ der Primkörper der Charakteristik $p$, $M_n(R)$ der Ring der $n$-$n$-Matrizen über dem Ring $R$, $e_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$ die zugehörigen Matrizeneinheiten und $R_{nil}$ die Menge aller nilpotenten Elemente von $R$. Für $A, B \subset R$ sei $l_A(B) = \{a \in A : aB = 0\}$ bzw. $r_A(B) = \{a \in A : Ba = 0\}$. Für $a, b \in R$ bzw. $A, B \subset R$ sei $[a, b] = ab - ba$ bzw. $[A, B] = \{[a, b] : a \in A, b \in B\}$.

Wir bilden folgende Mengen von nichtkommutativen Unterringen $T$ von $M_2(F_p)$:

$$M_e = \{T = e_{11}F_p + e_{12}F_p + e_{22}F_p : p \in P\};$$
$$M_l = \{T = e_{11}F_p + e_{12}F_p : p \in P\};$$
$$M_r = \{T = e_{12}F_p + e_{22}F_p : p \in P\};$$

$M_G =$ Menge aller $T = T_{p,q,k,\sigma} = \{ae_{11} + a^\sigma e_{22} + be_{12} : a, b \in F\}$, wobei $p, q \in P$, $k \in N$, $F$ endlicher Körper mit $p^{q^k}$ Elementen, $L$ größter Unter-

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 31 [1989], Iss. 1, Art. 13



körper von $F$ und $1 \neq \sigma \in \mathrm{Gal}\,(F:L)$ (Galoisgruppe von $F$ über $L$);

$$M = M_G \cup M_l \cup M_r;\ M_1 = M_G \cup M_e.$$

Weiterhin bilden wir folgende Klassen von nichtkommutativen Ringen $T$:

$E' =$ Klasse aller einfachen, radikalen und regulären $T$;

$E'_1 =$ Klasse aller regulären $T$ mit $1 \in T$, $T = \mathbf{Z}1 + T_1$ und $T_1 \in E'$;

$E$ bzw. $E_1 =$ Klasse aller $T$, wobei $T$ Schiefkörper oder $T \in E'$ bzw. $E'_1$;

$E_e =$ Klasse aller Schiefkörper von endlichem Grad;

$C =$ Klasse aller $T = T_{p,k}$ mit $p \in P$, $k \in N$, $T'T = 0 = TT'$, $pT' = 0 = p^kT$, $T$ endlich und nilpotent oder $T_{nil}$ kommutatives nilpotentes Ideal von $T$;

$C_1 =$ Klasse aller $T$ mit $1 \in T$, $T = \mathbf{Z}1 + T_{p,k}$ mit $T_{p,k} \in C$ und $p^k1 = 0$.

Wir zeigen zunächst

**Satz.** $K_r^* = M \cup E \cup C$; $K_{r,1}^* = M_1 \cup E_1 \cup C_1$.

*Beweis.* Sei $T \in K_r$ bzw. $K_{r,1}$ und $Z = Z(T) =$ Zentrum von $T$. Der Beweis stützt sich auf folgende Leitidee:

(*) Der jeweils aktuelle Ring $T$ wird sukzessive durch einen $T$-reduzierenden Ring ersetzt. Führen Falldiskussionen auf $T \in K_r^*$ bzw. $K_{r,1}^*$, so ist der Beweis beendet. Anderenfalls realisieren wir der Reihe nach die folgenden Bedingungen (a—f) und beenden dann den Beweis.

Für $u, v \in T$ bezeichnet $\langle u, v\rangle$ den von $u$ und $v$ erzeugten Unterring von $T$ ohne bzw. mit 1. Mittels (*) erhält man:

(a) $T'$ ist kleinstes Ideal von $T = \langle a, b\rangle$ und $T$ erfüllt ACC für Ideale.

*Beweis.* Seien $u, v \in T$ mit $[u, v] \neq 0$.

(A) Wähle ein Ideal $I$ von $S = \langle u, v\rangle$ maximal unter der Eigenschaft $[u, v] \notin I$. Setze $T = \langle u, v\rangle/I$, $a = u + I$, $b = v + I$ und betrachte $T/T'$ mit Hilbert's Basissatz.

Unsere weiteren Betrachtungen beziehen sich zunächst auf reguläre $T$. Ist $\mathrm{J}(T)$ (Jacobsonradikal von $T$) $= 0$, so erhält man über primitive Bilder einen $T$-reduzierenden Schiefkörper oder Matrizenring über einem Körper und dann ein Element aus $K_r^*$ bzw. $K_{r,1}^*$. Sei andererseits $\mathrm{J}(T) \neq 0$, also $T' \subset \mathrm{J}(T)$. Da $T$ regulär ist, gilt $[T', T'] \neq 0$, also $T' \in E$ bzw. $\mathbf{Z}1 + T' \in E_1$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit (O.E.) sei $T$ nicht regulär. Mittels (*) erhält man

(b) $T'^2 = 0$

*Beweis.* O.E. sei $T'^2 \neq 0$, also $T$ prim. Da $T$ nicht regulär ist, existieren $u, v \in T$ mit $uv \neq 0$ und $vu = 0$. Wiederholt man nun Schritt (A), so erhält man (a—b). Mittels (*) erhält man

(c) $T' \not\subset Z$

*Beweis.* Anderenfalls ist $T' \subset Z$. Sei $V = l_T(T') = r_T(T')$. Wir führen zunächst die Annahme $[V, V] = 0$ zum Widerspruch: Sei $\bar{T} = T/V$. Zu $r$, $s \in T \backslash V$ existiert $t \in T'$, so daß $rt \neq 0$. Nach (a) gilt $Trt = T'$. Also existiert $u \in T$, so daß $urt = t$, somit $(sur - s)t = 0$, demnach $\bar{s}\bar{u}\bar{r} = \bar{s}$. Also ist $\bar{T}$ Körper. Nach [4 : Corollary 1, p. 255] ist $\bar{T}$ endlicher Körper mit char $(\bar{T}) = p \in P$ und $p^r$ Elementen.

Für $V \not\subset Z$ bzw. $V \subset Z$ wähle $c \in T$ und $d \in V$ bzw. $d \in T$ mit $[c, d] \neq 0$. Für $f = x^{p^r} - x$ erhält man $0 = [f(c)c^2, d] = f(c)2c[c, d] + f'(c)c^2[c, d] = f'(c)c^2[c, d]$, also $\bar{c} = 0$, Widerspruch.

Also gilt $[V, V] \neq 0$. Man wählt nun $u, v \in V$ mit $[u, v] \neq 0$ und wiederholt Schritt (A). Es gilt $T' = \boldsymbol{Z} \cdot [a, b]$ und $p[a, b] = 0$ mit $p \in P$. Sei $T_i = \{c \in T : p^i c = 0\}$ für $i \in N$. Dann gilt $T_k = T_{k+1}$ mit $k \in N$. Wir zeigen $p^k T = 0$. Anderenfalls existiert $c \in T$ mit $p^k c = [a, b]$. Dann gilt $0 = p[a, b] = p^{k+1}c$, also $c \in T_{k+1} = T_k$, somit $0 = p^k c = [a, b]$, Widerspruch. $T_{nil}$ ist nilpotentes Ideal von $T$ wegen (a). Ist $T_{nil}$ nicht kommutativ, so wählt man $u, v \in T_{nil}$ mit $[u, v] \neq 0$ und wiederholt Schritt (A). Schließlich gilt $T \in C$ bzw. $C_1$. Mittels (*) erhält man

(d) $T' = I_b$ (von $b$ erzeugtes Ideal von $T$)

*Beweis.* Nach (c) existieren $u \in T$ und $v \in T'$, so daß $[u, v] \neq 0$. Nun wiederholt man Schritt (A), realisiert (c) und hat zusätzlich $I_b^2 = 0$. Für $u = a$ und $v = [a, b]$ gilt $[u, v] \neq 0$ nach (c). Für $S = \langle u, v \rangle$ ist $S'$ Ideal von $T$, also $v \in T' = S'$. Nun wiederholt man Schritt (A).

(e) $I = l_T(b) \cap r_T(b) = T'$ und $T = \langle a \rangle \oplus T'$

*Beweis.* Es ist $I \cap \langle a \rangle$ Ideal von $T$, also $I \cap \langle a \rangle = 0$ nach (a). Wegen $T' \subset I$ gilt (e). Mittels (*) erhält man

(f) $l_T(b) = r_T(b) = T'$

*Beweis.* Anderenfalls existiert $u \in T$, so daß $ub \neq 0 = bu$ oder $ub = 0 \neq bu$. Man wiederholt für $v = b$ zunächst Schritt (A), realisiert (c—d) und erhält $T'a = 0$ oder $aT' = 0$. Sei exemplarisch $T'a = 0$ und $A = \langle a \rangle$. Wegen (e) ist $T'$ einfacher und treuer $A$-Linksmodul, also $A$ Körper. Nach [4 : Corollary 1, p. 255] ist $A$ endlicher Körper mit char $(A) = p$. Mit $pT' = pAb = 0$ ist $pb = 0$. Für $1 \in T$ ist $p\boldsymbol{Z}1$ Ideal von $T$, also $p1 = 0$ wegen (a—e). Insgesamt gilt $pT=0$. $T$ besitzt in diesem Fall einen Unterring aus $M_l$ bzw. $M_e$. Für $aT'=0$ verfährt man analog.

Wir beenden nun den Beweis des Satzes: Sei $F=\langle a\rangle$, $C=C_F(T')$ (Zentralisator von $T'$ in $F$) und $S=F\otimes_C F$. $T'$ ist einfacher $F$-Bimodul, also einfacher und treuer $S/l_S(T')$-Linksmodul, also $S/l_S(T')$ Körper. Nach [4: Corollary 1, p.255] ist $S/l_S(T')$ endlicher Körper, also wegen (f) auch $F$. Nun ist $S$ halbeinfach und $T'$ einfacher Links-$S$-Modul. Demnach existiert $1\neq\sigma\in\mathrm{Gal}(F:C)$, so daß $(u\otimes v)b=uv^\sigma b$ für alle $u, v\in F$. Also besitzt $T$ einen Unterring aus $M_G$.

Für das folgende Corollar benötigen wir weitere Klassen von nichtkommutativen Ringen $T$ und $R$:

$$C_g = \text{Klasse aller } T\in C \text{ mit } T \text{ endlich und nilpotent};$$
$$C_{g,1} = \text{Klasse aller } T=Z1+T_{p,k}\in C_1 \text{ mit } T_{p,k}\in C_g;$$
$$C_0 = \text{Klasse aller torsionsfreien } T;$$
$$C_{0,1} = C_0\cap K_{r,1};$$

$K_f$ = Klasse aller $R$ für die gilt: Zu jedem $a, b\in R$ existiert $f_{a,b}\in Z\{x, y\}$, so daß $f_{a,b}\to 0$ beim kanonischen Ringmorphismus $Z\{x, y\}\to Z[x, y]$, jedes Monom von $f_{a,b}$ eine Länge $\geq 3$ hat und $[a, b]=f_{a,b}(a, b)$ gilt; (In der Tat ist $[a, b]=f_{a,b}(a, b)$ für $f_{a,b}=[x, y]$ bedeutungslos).

$K_g$ = Klasse aller $R$ für die gilt: Zu $a\in R$ existiert stets $f_a=x^k\sum_{1\leq i\leq m}n_i x^i\in Z[x]$, $0\leq k$, $0\neq n_i\in Z$, so daß $\{n_i: 1\leq i\leq m\}$ teilerfremd und $f_a(a)\in R_{nil}$. (Man sieht unmittelbar, daß stets o.E. $k=0$ gewählt werden kann). Wir zeigen nun

**Corollar.**

(1) $K_u^*=K_{r,1}^*$; *zu jedem* $R\in K_{lu}$ *existiert* $T\in M_G\cup M_l\cup E_l\cup C_l$ $(i\in\{l, r\})$, *so daß $T$ homomorphes Bild eines Unterringes von $R$ ist*;

(2) $K_{Pl}^*=M\cup C\cup E_e$; $K_{Pl,1}^*=M_1\cup C_1\cup E_e$;

(3) $K_n^*=(K_r^*\cap K_n)\cup C_0$; $K_{n,1}^*=(K_{r,1}^*\cap K_n)\cup C_{0,1}$;

(4) $K_f^*=M\cup E$; $K_{f,1}^*=M_1\cup E_1$;

(5) $K_g^*=M\cup E\cup C_g$; $K_{g,1}^*=M_1\cup E_1\cup C_{g,1}$.

*Beweis.* (1) Wir betrachten $R\in K_{lu}$. (in den anderen Fällen schließt man analog). O.E. existiere kein $T\in K_{r,1}$, welches $R$-reduzierend ist. Nach [3: Lemma 1, pp.109, 110] gilt dann $R'R=0$. Sei $0\neq v\in R'$ und $u\in R$ mit $uv=v$. Der Ring $\langle u, v\rangle$ ist nicht notwendig Element von $K_{lu}$. Wiederholt man jedoch Schritt (A), so erhält man $T=\langle a\rangle+bZ$, $ab=b$, $ba=0=b^2$

und $pb = 0$ mit $p \in P$. Nun ist $J = l_{\langle a \rangle}(b)$ Ideal von $T$ mit $b \notin J$. Also gilt $J = 0$, somit $pa$, $a^2 - a \in J = 0$, demnach $T \in M_l$.

(2) O.E. betrachtet man $R \in E$. Nun schließt man mit [2 : 1.4.2, p. 39].

(3) Sei $R \in K_n$, $Q$ die Menge aller Primzahlteiler von $n$,

$\mathrm{t}(R) = \{a \in R$ : es existiert $k \in N$, so daß $ka = 0\}$ und für $p \in P$

$\mathrm{t}_p(R) = \{a \in R$ : es existiert $k \in N$, so daß $p^k a = 0\}$.

O.E. sei $R/\mathrm{t}(R) \notin C_0$, also $R' \subset \mathrm{t}(R)$, somit $R' = \bigoplus_{p \in P \setminus Q} \mathrm{t}_p(R')$. Nun verfolgt man den Beweis des Satzes.

(4) Erhält man unmittelbar mit dem Satz.

(5) O.E. betrachtet man $T = T_{p,k} \in C$ mit $[T_{\mathrm{nil}}, T_{\mathrm{nil}}] = 0$. Zu $c \in T$ wähle $g_c(x) = \sum_{1 \le i \le m} n_i x^i \in Z[x]$. Wegen $pT \subset T_{\mathrm{nil}}$ sei o.E. $p \nmid n_i$, $1 \le i \le m$ und weiterhin $n_1 = 1$. Wegen $[T_{\mathrm{nil}}, T_{\mathrm{nil}}] = 0$ ist $T \in K_f$, Widerspruch.

Wir erläutern die offensichtlichen Anwendungen dieser Überlegungen an drei Beispielen

**Beispiel 1.** Sei $R$ ein Ring, so daß gilt: Für $a \in R$ existiert stets $f_a(x) \in Z[x]$, so daß $f_a(a)a^2 - a \in Z$. Nach [1] ist $R$ kommutativ. Nach Corollar (4) ist die Aussage nach Überprüfung für Schiefkörper trivial.

**Beispiel 2.** Sei $R$ Ring mit der Polynomidentität $f$, also $f(R) = 0$. Gilt $f(T) \neq 0$ für alle $T \in M \cup C$, so ist $R$ nach Corollar (2) und [5 : 1.5. 16, p. 36; 2.3.33, p. 131] kommutativ.

**Beispiel 3.** Sei $E$ eine für beliebige Ringe erklärte Eigenschaft, welche sich auf Unterringe und Bilder vererbt und für keinen Ring aus $M \cup C$ erfüllt ist. Dann gilt für jeden Ring $R$ mit der Eigenschaft $E$:

(1) Für alle $a, b \in R$ gilt: Mit $ab = 0$ ist $ba = 0$.

(2) $R_{\mathrm{nil}} = \mathrm{P}(R)$ (Primradikal von $R$) $\subset Z$.

(3) Ist $I$ kommutatives Rechtsideal von $R$, so gilt $I \subset Z$.

(4) $[R, R] \cap R_{\mathrm{nil}} = 0$. Speziell ist $R$ kommutativ, falls $[R, R] \subset R_{\mathrm{nil}}$.

*Beweis.* (1) Angenommen es existieren $a, b \in R$ mit $ab \neq 0 = ba$. Dann besitzt $T = \langle a, b \rangle$ die Eigenschaft $E$ und $T'$ ist nilpotent. Mit dem Satz erhält man einen Widerspruch zu den Voraussetzungen.

(2) Für $a \in R$ mit $a^2 = 0$ gilt $a^2 R = 0$, also $aRa = 0$ nach (1), somit

$I_a^2 = 0$. Mittels Induktion erhält man: Für $a \in R_{nil}$ ist $I_a$ nilpotent. Angenommen $a \notin Z$. Wähle $b \in R$ mit $[a, b] \neq 0$. Weiter schließt man wie bei (1).

(3) Es ist $0 = [IR, I] = I[R, I]$, also $[I, R]^2 = 0$. Angenommen es existieren $a \in I$ und $b \in R$ mit $[a, b] \neq 0$. Weiter schließt man wie bei (1).

(4) Seien $a, b \in R$ mit $[a, b] \in R_{nil} = \mathrm{P}(R)$. Weiter schließt man wie bei (1).

## Literatur


[1] I. N. Herstein: The structure of a certain class of rings, Amer. J. Math. **75** (1953), 864–871.

[2] I. N. Herstein: Rings with Involution, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1976.

[3] H. Komatsu: A commutativity theorem for rings, Math. J. Okayama Univ. **26** (1984), 109–111.

[4] S. Lang: Algebra, Addison-Wesley Publishing Company (1965), New York.

[5] L. H. Rowen: Polynomial Identities in Ring Theory, Academic Press, New York, 1980.



Fachbereich 6, Mathematik
Universität-GHS-Essen
Universitätsstraße 3, 4300 Essen 1
Bundesrepublik Deutschland


(*Received November 21, 1987*)