岡大医短紀要，8：1～6，1997
Bull Sch Health Sci, Okayama Univ
（総　説）

2重可移群のモデル理論

田中克己

要　　約

2重可移群には，near-domainを解釈することができ（定理13），またnear-domainから2重可移群を構成することができる。つまり，2重可移群の研究はnear-domainの研究と同値になる。ここで，有限のnear-domainがnear-fieldになることは知られているが，無限のnear-domainがnear-fieldになるかどうかは知られていない。これに関連して，無限の2重可移群についても多くの未解決問題が残されている。このノートでは，これらの問題にたいするモデル論的なアプローチ（Morley rank有限の場合の構造解析，geometricな方法など）をいくつか紹介する。

キーワード：置換群，ω-安定，Morley rank，2重可移群

Gを群，Xを集合とする。GがXに**作用する**，または(G,X)が**置換群**であるとは，ある写像$G\times X\to X$が存在して次の性質をもつこととする：

1．$g(hx)=(gh)x$，$\forall g,h\in G,\forall x\in X$。
2．$1x=x$，$\forall x\in X$。

定義1　置換群(G,X)がつぎの性質をもつとき，GはX上n**重可移**（n**-transitive**）という：相異なるXの元$x_1,x_2,\cdots,x_n$と$y_1,y_2,\cdots,y_n$にたいして，Gの元gが存在して

$$gx_i=y_i,\quad 1\leq{}^{\forall}i\leq n$$

が成り立つ。*1-transitive*のことを単に*transitive*という。また，Xが無限で，任意の正の整数kについて，(G,X)がk重可移のとき，Gを**高可移的**という。

定義から，Gがn-transitiveでかつ$k\leq n$ならば，Gはk-transitiveである。

有限単純群の分類により，交代群を含まない有限置換群は高々5重可移群であることが分かる。交代群と対称群を除いて，4および5重可移な有限群はMathieu群，M_{11},M_{12},M_{13}とM_{14}だけである。歴史的には，1960年にWielandtがSchreier予想を仮定して，どんな有限多重可移群も高々7重可移であることを示した[1]。後に永尾と鈴木が上限を7から6へ落とせることを示した[2]。ここで，**Schreier予想**とは「任意の有限単純群の外部自己同形は可解である」というもので，この証明にも有限単純群の分類が使われる。

これが無限置換群となると，様子が随分と変わる。例えば，群Homeo($\mathbf{Q}$)は高可移的であるし，各kについてk重可移だが$k+1$重可移でない群が存在する。

以下，置換群についての基本的事項については，Dixon-Mortimerの教科書[3]を参照されたい。

定義2　置換群(G,X)が**sharply** n**重可移**とは，それがn重可移でXの任意のn点の固定部分群が$\{1\}$であることとする。

例3　$|X|=n$ならば，$(Sym(X),X)$は*sharply* n重可移，かつ*sharply* $(n-1)$重可移である。

岡山大学医療技術短期大学部一般教育

補題 4　(G,X) を 2 重可移群とし，$B=G_x$ とする。このとき，

$$G=B\sqcup BgB,\quad \forall g\in G\setminus B$$

が成り立つ。とくに，B は G の極大部分群。

定義 5　置換群 (G,X) と (H,Y) が**同値である**とは，群の同形写像 $f:G\to H$ と 1 対 1 上への写像 $\varphi:X\to Y$ が存在して，任意の $g\in G$，$x\in X$ にたいして，

$$\varphi(gx)=f(g)\varphi(x)$$

が成り立つこととし，このとき $(G,X)\simeq(H,Y)$ と表す。

事実 6　(G,X) を可移的とし，$x\in X$ にたいし

$$B=G_x=\{g\in G|gx=x\}$$

とする。このとき (G,X) は左剰余類表現 $(G,G/B)$ と同値となる。すなわち，$g,h\in G$ にたいし，

$$g(hB)=ghB$$

が成り立つ。

事実 7　$N_G(B)=B$ ならば，G の G/B への左剰余類作用は，G の集合 $\{B^g|g\in G\}$ への共役作用と同値となる。

事実 8　**(M.Hall, Tits)** $n\geq 4$ にたいして，*sharply* n 重可移群は完全に分類されており，すべて有限群である[4]。

事実 9　$n=2,3$ については，有限 *sharply* n 重可移群の分類は完成している。

問題10　無限の *sharply* 2 および 3 重可移群の分類を完成せよ。

例11　群 $PSL_2(K)$ は $K\cup\{\infty\}$ に *sharply* 3 重可移的に作用する，ここで K は代数閉体。作用は次のように定義する：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}: x\longrightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$$

特に，$\dfrac{a\infty+b}{c\infty+d}=\dfrac{a}{c}$ かつ $\dfrac{a(-\frac{d}{c})+b}{c(-\frac{d}{c})+d}=\infty$ と定める。

例12　群 $K^+\rtimes K^\times$ は K に *sharply* 2 重可移的に作用する，ここで K は代数閉体。作用は

$$(a,\ b)x=bx+a$$

定理13　(G,X) を *sharply* 2 重可移群とする。このとき，*near-domain* $\langle X,\cdot,+,0,1\rangle$ が次のように解釈される：

$$X=\{0,1,\cdots,x,y,b,m,\cdots\}$$

$$A=\{g\in G|g\text{ は }X\text{のすべての点を他の点に写す}\}$$

$$G_0=\{g\in G|g0=0\}$$

とするとき，

$$y=x+b\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\exists\begin{pmatrix} 0 & \cdots & x & \cdots \\ b & \cdots & y & \cdots \end{pmatrix}\in A$$

$$y=x\cdot m\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\exists\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & x & \cdots \\ 0 & m & \cdots & y & \cdots \end{pmatrix}\in G_0$$

ただし，

$$0\cdot x=x\cdot 0=0,\quad \forall x\in X$$

と定義する。

ここで，G は次の 2 種類に分類される。

Case 1. involution はすべての点を移動する。

Case 2. すべての involution はある点を固定する。

群 G に付随する near-domain の標数をもって，G の**標数**を定義する。Case 1 は標数 2 となる。ここで Near-Domain の公理を与える。

Near-Domain の公理

ND1. $\langle X,+,0\rangle$ は loop。

L1. $\forall x\quad 0+x=x+0=x$。

L2. $\forall a,b\,\exists!x\quad a+x=b$。

L3. $\forall a,b\,\exists!x\quad x+a=b$。

ND2. $\forall a,b\quad a+b=0\to b+a=0$。

ND3. $\langle X\setminus\{0\},\cdot,1\rangle$ は群。

ND4. $\forall a\quad 0\cdot a=a\cdot 0=0$。

ND5. $\forall a,b,c \quad (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$。
ND6. $\forall a,b \exists d_{a,b}\in X\setminus\{0\}\forall x$
$a+(b+x)=(a+b)+d_{a,b}\cdot x$。

上の定理とは逆に，任意のnear-domain$X$から sharply 2重可移群が次のように定義される。

$$G(X)=\{(a,m)|a\in X,m\in X\setminus\{0\}\}$$

として，Xへの作用を

$$(a,m)\cdot x=xm+a$$

とすると，$G(X)\leq Sym(X)$となる。

Near-Fieldの公理

NF1. $F^{+}=\langle F,+,0\rangle$は群。
NF2. $F^{\times}=\langle F\setminus\{0\},\cdot,1\rangle$は群。
NF3. $\forall x,y,z \quad (x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$。
NF4. $\forall x \quad x\cdot 0=0\cdot x=0$。

すべての体はnear-fieldである。ここで，Dickson[5)]により1905年に提出されたnear-fieldのクラスを与える。

$\langle D,\cdot,+\rangle$をdivision ringとし，$\phi: D^{*}\to Aut(D)$をDのunitのなす群からDの自己同形群への写像とする。いまϕが条件

$$\phi(x^{\phi(y)}\cdot y)=\phi(x)\phi(y),\quad \forall x,y\in D^{*}$$

をみたすとする。このときD^{*}の上に新しい積$\odot$が，

$$x\odot y=x^{\phi(y)}\cdot y,\quad \forall x,y\in D^{*}$$

で与えられる。この定義から$\phi(x\odot y)=\phi(x)\phi(y)$が成り立ち，$\langle D,\odot,+\rangle$はnear-fieldとなる。これらを，**Dickson near-field**とよぶ。

事実14 *Near-domain* Xにたいし，次の3つは同値となる。
1．Xは*near-field*。
2．$\langle X,+,0\rangle$は群。
3．$\forall a,b\in X \quad d_{a,b}=1$。

群Gが**分裂する**とは，ある点$x\in X$にたいし，$B=G_x$とおいたとき，ある$N\lhd G$が存在して，$G=N\rtimes B$となることとする。このとき，次のことが成り立つ。

事実15 群Gが分裂する$\Leftrightarrow X$が*near-field*。

問題16 *near-field*ではない*near-domain*は存在するか？

事実15より，上の問題は次のように言い換えることができる。

問題17 分裂しない*sharply* 2重可移群は存在するか？

有限の場合，次のことが知られているので，無限の場合が興味の対象となる。

事実18 有限の*near-domain*は*near-field*である[6)]。

1　射影平面

射影平面とは次の公理をみたす点の集合で，線とは特別な点の集合である。

P1. 任意の異なる2点を通る線は一本だけ存在する。
P2. 任意の2本の線はただ一点で交わる。
P3. そのどの3点も同一直線上にないような4点が存在する。

これより，任意の線は少なくとも3点を含むことがわかる。また，そのどの3線も一点では交わらない。これとP3との比較から**双対**の概念が考えられる。

πを射影平面とするとき，πの双対な平面π^{*}を次のように構成する：πの点の集合$\{P_i\}$と，線の集合$\{k_j\}$にたいし，π^{*}の線$\{p_i\}$はπの点$\{P_i\}$と，点$\{K_j\}$はπの線$\{k_j\}$とそれぞれ一対一対応があるとする。さらに，πで$P_i\in k_j$ならば，π^{*}で$K_j\in p_i$とおく。このとき，π^{*}も射影平面となり，π^{*}をπの双対という。$(\pi^{*})^{*}=\pi$となる。πについてのstatementは線と点を入れ替えることによりπ^{*}のstatementになる。これを**双対原理**という。

平面π_1がπ_2と**同形**であるとは，π_1の点$\{P_1\}$からπ_2の点$\{P_2\}$への一対一写像αと，π_1の線$\{k_1\}$

からπ_2の線$\{k_2\}$への一対一写像βが存在して，$P_1 \in k_1$ならば$\alpha(P_1)\in\beta(k_1)$であることとする。αまたは，βからそれぞれ同形が導かれる。平面の同形を**共線変換** (collineation) という。平面の共線変換の集合は群をなす。

πを射影平面とし，点X,Y,O,Iをどの3点も同一直線上にはないものとする。直線XYを無限線L_∞とよぶ。直線OIを$y=x$とよぶ。

直線OI上，点Oの座標を$(0,0)$，点Iを$(1,1)$とする。XYとOIの交点Cの座標を単に(1)とおく。OI上の他の点には，異なる記号bをもって座標(b,b)とする。L_∞上にないある点Pにたいし，XPとOIが(b,b)で交わり，YPとOIが(a,a)で交わるとする。このとき，点Pの座標を(a,b)と定める。

点$(0,0)$と$(1,m)$を結ぶ直線とL_∞の交点をMとする。この点Mの座標を単に(m)と定める。直感的には，mは直線の傾き。最後に，点Yの座標を(∞)と定めたら，すべての点に座標を与えることができた。

この座標を用いて，三項代数という代数系を定義する。**三項代数** (ternary ring) とは，空でない集合R上にある三項演算Tが定義されたもの(R,T)である。ここでは，射影平面πのL_∞以外の直線の方程式を三項演算で表現する。

点(x,y)が点$C=(1)$と$(0,b)$を結ぶ直線上の有限の点とすると，この直線の方程式

$$y=x+b$$

をもって加法を定める。また，点(x,y)が点$O=(0,0)$と(m)を結ぶ直線上の有限の点とすると，この直線の方程式

$$y=xm$$

をもって乗法を定める。一般に，点Yを通らない直線はL_∞とある点(m)で，またOYと点$(0,b)$で交わる。この直線上に点$Q=(x,y)$があるならば，この直線の方程式$y=xm+b$をもって三項演算Tを，

$$y=T(x,m,b)$$

と定義する。すると，加法と乗法はこの三項演算の特別な場合として次のように定義される：

$$x+y = T(x,1,y),$$

$$xm = T(x,m,0)。$$

0と1について，次の式が成り立つ：

$$0+a = a+0 = a,$$
$$0m = m0 = 0,$$
$$1m = m1 = m。$$

定理19　三項演算Tは次の性質をもつ：

T1.　$T(0,m,c)=T(a,0,c)=c$。

T2.　$T(1,m,0)=T(m,1,0)=m$。

T3.　$\forall a,m,c\,\exists!z\quad T(a,m,z)=c$。

T4.　$\forall m_1\neq m_2,b_1,b_2\,\exists!x\quad T(x,m_1,b_1)=T(x,m_2,b_2)$。

T5.　$\forall a_1\neq a_2,c_1,c_2\,\exists!\langle m,b\rangle\quad T(a_1,m,b)=c_1$かつ$T(a_2,m,b)=c_2$。

次に，sharply 2重可移群に射影平面が解釈できないか考える。まず，Gを標数が2でないsharply 2重可移群とする。群Gのinvolutionの集合をIとする。いま$\pi=I$とし，線を$C_G(jk)$とする。ただし，$j\neq k\in I$。また，点iが線$C_G(jk)$上にあるとは，次の条件のどれか（すべて）が成り立つこととする。$i\in N_G(C_G(jk)) \Leftrightarrow i$ inverts $C_G(jk) \Leftrightarrow C_G(jk)\subseteq iI$。

このとき，次が成り立つ。

補題20[7]　Gを標数が2でないsharply 2重可移群で分裂しないとする。

(1)　任意の2点を通る線はただ一本である。

(2)　任意の2線はただ一点で交わる。

2　モデル理論

置換群(G,X)のモデルを考えるとき，一般には，群Gの元を表す述語記号とGが作用する集合Xの元を表す述語記号をもった2-sortのモデルを考える。ところが，2重可移群の場合事実6より，1点固定群が定義可能であれば，Xを表す述語も群の自然な言語で定義可能となる。

定理21　(Nesin '90)[8]Gを*Morley rank*有限の*sharply* 2可移群で，Bを1点固定群とする。このとき，Bは群の自然な言語で定義可能で，GとB

は連結。

Nesinは上の定理をFrobenius群について証明したが[8]，後に田中[9]により，Bの定義可能性がsharply 2重可移群から，2点固定化群が有限な2重可移群にたいして拡張された。

次に2重可移群のモデル理論で最も大きな問題を示す。

予想22 *Morley rank* 有限な *sharply* 2重可移群は例12のタイプのみである。

問題16にあるように，我々は分裂しないsharply 2重可移群を知らない。そこで問題17に関連して，上の予想は次のように弱くしてみても重要である。

予想23 *Morley rank* 有限な *sharply* 2重可移群は分裂する。

定理24 (Cherlin, et al '91)[10] $G=A\rtimes H$ を *Morley rank* 有限な分裂 *sharply* 2重可移群とする。Gの標数が0で，しかも$Z(H)$が無限のとき，Gは例12のタイプ。

事実25 (Nesin '90) 無限の *sharply* 3重可移的超安定群は，ある代数閉体Kにたいし$PSL_2(K)$と同形となる。

この論文は，著者が文部省在外研究員としてUniversity of California Irvineに滞在中，University of Illinois at Chicagoにおいて行った講演に基づいている。

文　献

1）Wielandt H: Über den Transitivit ätsgrad von Permutationsgruppen. Math. Z. 74: 297-298, 1960
2）Huppert B and Blackburn N: Finite Groups. Springer-Verlag, New York. 1982.
3）Dixon J and Mortimer B: Permutation Groups. GTM 163. Springer-Verlag, New York. 1996.
4）Hall M: The Theory of Groups. Macmillan, New York. 1959.
5）Dickson L: On Finite Algebra. Nachr. kgl. Ges. Wiss. Göttingen. 358-393, 1905.
6）Kerby W: On infinite sharply multiply transitive groups. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen. 1974.
7）Borovik A and Nesin A: Groups of Finite Morley Rank. Clarendon Press, Oxford. 1994.
8）Nesin A: On Frobenius groups of finite Morley rank (1). in Automorphisms of First-Order Structures, ed. R Kaye and D. Macpherson. Clarendon Press, Oxford. 1994.
9）Tanaka K: On doubly transitive groups of finite Morley rank. in preparation.
10）Cherlin G, Grundhöfer T, Nesin A and Völklein H: Sharply transitive groups over algebraically closed fields. Proc Amer Math Soc 111: 541-550, 1991.

田中　克己

Model theory of doubly transitive groups

Katsumi TANAKA

Abstract

It is well known that we can interpret a near-domain in a doubly-transitive group and we can consruct a doubly-transitive group by a near-domain. This shows the equivalence of the study of doubly-transitive groups and that of near-domains. It is known that every finite near-domain is a near-field, however, it is open in infinite case. We investigate several open problems in this subject and some model theoretic approaches (in case of finite Morley rank, geometric) to them.

Key Words: permutation group, ω-stable group, Morley rank, doubly transitive group

School of Health Sciences, Okayama Universioy