

## MRIにおける画像の再構成

加藤博和, 花元克巳, 黒田昌宏<sup>1)</sup>, 澁谷光一, 川崎祥二

## 要 約

磁気共鳴は医学におけるイメージングにおいて重要なモダリティーであり, 高度な数学的手法が画像の再構成に取り入れられている。画像再構成の数学的手法および画像再構成にいたるまでの数学的な過程を理解することは, MRIを学ぶものにとって非常に重要であるが, 成書において明確な説明はなされていない。ここでは, MR画像の再構成法を, 複素関数と複素フーリエ係数を用いて導いたので報告する。

キーワード: MRI, フーリエ変換, 画像再構成, 周波数エンコード, 位相画像

## 1. はじめに

臨床診断における主要な撮像モダリティーとして, X線とMRがある。X線の撮像方法については, 多くの成書があり, その原理から撮像方法まで, 詳しく述べられている。MRはX線のように形態画像を表示できる以外に, 機能画像, 代謝画像, 術中画像を表示できることから, 重要な撮像モダリティーである。ところが, 成書にはその画像再構成法の具体的な記述はなされていない<sup>1-3)</sup>。

ここでは, 2次元平面上を回転しているスピンの分布を複素関数を用いて表現し, この複素関数とそれに関係するフーリエ係数を用いることによりMR画像の再構成を試みた。

## 2. 磁化の位相が揃っている場合のフーリエ変換

## 2.1) 実関数のフーリエ変換

実関数  $M(x)$  が区間  $[-a/2, a/2]$  (ただし  $a > 0$ ) で積分が可能であるとき,  $M(x)$  を, 総和の範囲を  $-\infty$  から  $+\infty$  に拡張したフーリエ級数で表すと,

$$M(x) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \alpha_n \cos \frac{2\pi nx}{a} + \beta_n \sin \frac{2\pi nx}{a} \right) \quad (1)$$

となる。ここで,  $\alpha_n, \beta_n$  は

$$\alpha_n = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} M(x) \cos \frac{2\pi nx}{a} dx \quad (2)$$

$$\beta_n = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} M(x) \sin \frac{2\pi nx}{a} dx \quad (3)$$

となる。

2.2) 磁化の初期位相が  $x$  軸と一致する場合の信号

MRIにおいては3次元分布するプロトンの磁化を取り扱うが, ここでは簡単のために磁化は  $x$  のみの関数とする。Fig. 1 (a) に示すように,  $z$  軸方向に磁束密度  $B_0$  の静磁場が与えられている場合, 大きさ  $M(x)$  の磁化が  $x = -a/2$  から  $x = a/2$  の FOV において分布しているとする。90°パルスに引き続き180°パルスが印加されると磁化は  $x-y$  平面上を回転し, その角速度は, プロトンの磁気回転比を  $\gamma$  とすると,

$$\omega_0 = -\gamma B_0 \quad (4)$$

となる。Fig. 1 (b) に磁化の回転の様子を示す。回転方向は  $-z$  軸方向である。  $t=0$  で磁化は全て  $+x$  方向を向いているものとする。方向が  $z$  軸を向いた勾配磁場,  $G_x$  (但し  $G_x < 0$  とする) を静磁場に重ねて印加すると, 磁束密度分布  $B(x)$  は

$$B(x) = B_0 + G_x x \quad (5)$$

となる。磁化は位置によって異なった磁束密度を受けることから, 角速度は位置によって異なり,

$$\omega(x) = -\gamma(B_0 + G_x x) = \omega_0 - \gamma G_x x \quad (6)$$

となる。時刻  $t$  における磁化の位相分布は,  $(\omega - \gamma G_x x)t$  となり, 印加時間とともに位相差は拡

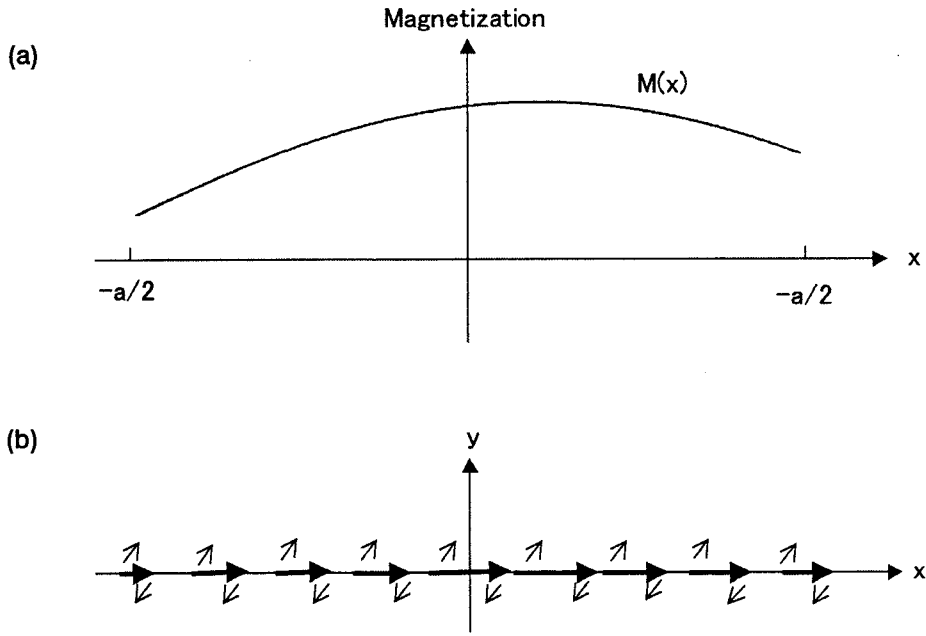


Fig. 1 (a): Spatial distribution of magnetization.  
(b): Directional distribution of magnetization.

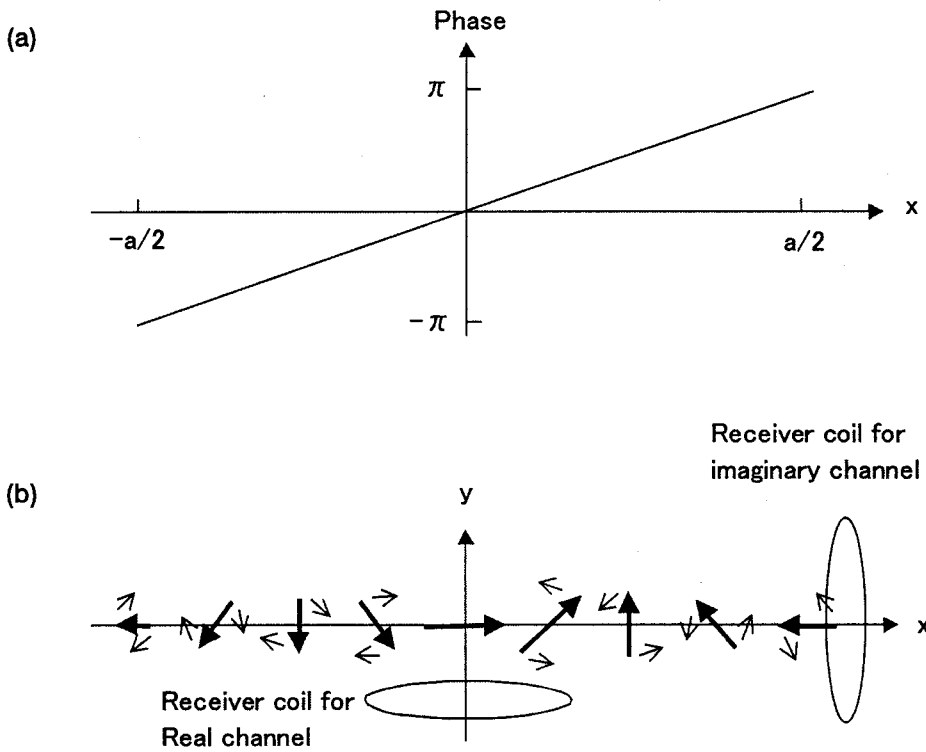


Fig. 2 (a): Spatial distribution of phase.  
(b): Directional distribution of magnetization when the phase difference of  $2\pi$  is applied to FOV.

がる。角速度  $\omega_0$  に対する相対的な角速度は  $\{\omega_0 - \gamma G_x x\} - \omega_0 = -\gamma G_x x$  となるので、 $\omega_0 t$  に対する相対的な位相差  $\delta(x)$  は、

$$\delta(x) = -\gamma G_x x t \quad (7)$$

となる。時間と共に相対的な位相差は拡がり、 $x$  が大きいほど位相は進む。FOV =  $a$  において  $2\pi$  の位相差が生じる時間を  $\Delta T_s$  とすると、

$$\Delta T_s = \frac{-2\pi}{\gamma G_x a} \quad (8)$$

となる。磁化が  $x$ - $y$  平面を回転しているときに  $-y$  軸上および  $+x$  軸上にコイルをおくと、角速度  $\omega_0$  で誘導された電圧が測定されるが、その振幅は時間とともに変化する。

$\Delta T_s$  ごとにエコー信号をサンプリングすると FOV 内における磁化の位相差が  $2\pi$  ずつ増加する形で測定されることになり、 $t=n\Delta T_s$  では  $\delta(x)=-\gamma G_x x \cdot n\Delta T_s$  となる。Fig. 2 に  $n=1$  における磁化の分布を示す。Fig. 2 (a) は磁化の位相分布を示す。Fig. 2 (b) はそのときの磁化の方向分布を示す。このとき、 $-y$  軸上に実部のレシーバコイルを置くと、コイルには角速度  $\omega_0$  で歳差運動をする磁化の時間的変化に比例した電圧が誘導される。その振幅は磁化の  $x$  軸方向成分の和になり、誘導された電圧を測定している間緩和による磁化の減衰は無視できるとすると、

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} M(x) \cos(-\gamma G_x x \cdot 1 \cdot \Delta T_s) dx \\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} M(x) \cos \frac{2\pi \cdot 1 \cdot x}{a} dx \end{aligned} \quad (9)$$

となる。これは、 $n=1$  におけるフーリエ係数

$$\alpha_1 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} M(x) \cos \frac{2\pi \cdot 1 \cdot x}{a} dx \quad (10)$$

である。 $+x$  軸上に虚部のレシーバコイルを置くと、コイルには角速度  $\omega_0$  で歳差運動をする磁化の時間的変化に比例した電圧が誘導される。その振幅は磁化の  $y$  軸方向成分の和となるので、

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} M(x) \sin(-\gamma G_x x \cdot 1 \cdot \Delta T_s) dx \\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} M(x) \sin \frac{2\pi \cdot 1 \cdot x}{a} dx \end{aligned} \quad (11)$$

となる。これは、 $n=1$  におけるフーリエ係数

$$\beta_1 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} M(x) \sin \frac{2\pi \cdot 1 \cdot x}{a} dx \quad (12)$$

である。

このように、 $t=n \cdot \Delta T_s$  では、

$$\alpha_n = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} M(x) \cos \frac{2\pi n x}{a} dx \quad (13)$$

$$\beta_n = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} M(x) \sin \frac{2\pi n x}{a} dx \quad (14)$$

を測定することができる。

### 3. 磁化の初期位相が空間的に分布している場合の信号

#### 3.1) 磁化の複素関数表示

初期状態における磁化の位相が空間的に分布している場合、複素平面を用いて磁化を表す。この様子を Fig. 3 (a) に示す。 $M(x)$  は  $t=0$  で  $x$  軸に対して  $\phi(x)$  傾いているとする。この場合、 $M(x)$  は複素関数となる。 $M(x)$  の実軸方向の成分を  $R(x)$  で表わし、 $M(x)$  の虚軸方向の成分を  $I(x)$  で表すと、 $M(x)$  は、

$$M(x) = R(x) + iI(x) \quad (15)$$

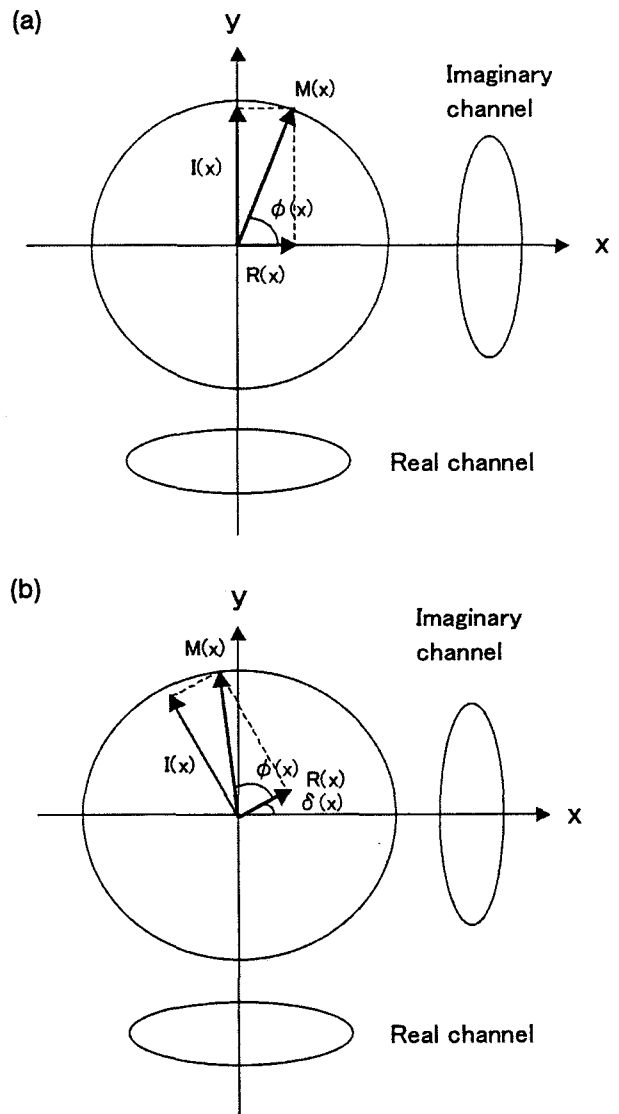


Fig. 3 (a): Real and imaginary parts of magnetization when the magnetization rotates from the  $x$ -axis.

(b): Components in the real and the imaginary channels when the phase of the magnetization is shifted by magnetic gradient.

となる。

### 3.2) 複素関数のフーリエ変換

一般的に複素フーリエ級数では直交関数系として  $\exp(i2\pi nx/a)$  が用いられるが、ここでは直交関数系として  $\exp(-i2\pi nx/a)$  を用い、複素関数のフーリエ級数を次のようにおく。

$$M(x) = R(x) + iI(x) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n) e^{-i\frac{2\pi n}{a}x} \quad (16)$$

この場合のフーリエ係数  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  は

$$\alpha_n + i\beta_n = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} M(x) e^{i\frac{2\pi n}{a}x} dx \quad (17)$$

となる。式(16), (17)を三角関数で表すと、

$$R(x) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \alpha_n \cos \frac{2\pi nx}{a} + \beta_n \sin \frac{2\pi nx}{a} \right) \quad (18)$$

$$I(x) = -\frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \alpha_n \sin \frac{2\pi nx}{a} - \beta_n \cos \frac{2\pi nx}{a} \right) \quad (19)$$

$$\alpha_n = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[ R(x) \cos \frac{2\pi nx}{a} - I(x) \sin \frac{2\pi nx}{a} \right] dx \quad (20)$$

$$\beta_n = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[ R(x) \sin \frac{2\pi nx}{a} + I(x) \cos \frac{2\pi nx}{a} \right] dx \quad (21)$$

となる。

### 3.3) フーリエ係数の測定

Fig. 3(a) のように初期状態の磁化が  $x$  軸に対して位相が  $\phi(x)$  進んでいるとすると、磁化が勾配磁場によって回転し相対的な位相が  $\delta(x)$  変化したときの磁化は Fig. 3(b) となる。この場合、 $-y$  軸におかれた実部のレシーバコイルへの磁化の成分は、

$$\begin{aligned} R(x) \cos \delta(x) + I(x) \cos \left\{ \delta(x) + \frac{\pi}{2} \right\} \\ = R(x) \cos \delta(x) - I(x) \sin \delta(x) \end{aligned} \quad (22)$$

となる。レシーバコイルには分布しているすべての磁化によって誘導された電圧が発生するので、コイルに発生する電圧の振幅は、

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \{ R(x) \cos \delta(x) - I(x) \sin \delta(x) \} dx \\ = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \{ R(x) \cos(-\gamma G_x x n \Delta T_s) \\ - I(x) \sin(-\gamma G_x x n \Delta T_s) \} dx \\ = \alpha_n \end{aligned} \quad (23)$$

となり、フーリエ係数  $\alpha_n$  を測定することになる。虚部のレシーバコイルへの磁化の成分は、

$$\begin{aligned} R(x) \sin \delta(x) + I(x) \sin \left\{ \delta(x) + \frac{\pi}{2} \right\} \\ = R(x) \sin \delta(x) + I(x) \cos \delta(x) \end{aligned} \quad (24)$$

となり、レシーバコイルには分布しているすべての磁化によって誘導された電圧が発生するので、コイルに発生する電圧の振幅は、

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \{ R(x) \sin \delta(x) + I(x) \cos \delta(x) \} dx \\ = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \{ R(x) \sin(-\gamma G_x x n \Delta T_s) \\ + I(x) \cos(-\gamma G_x x n \Delta T_s) \} dx \\ = \beta_n \end{aligned} \quad (25)$$

となり、フーリエ係数  $\beta_n$  を測定することになる。

このように、実部および虚部のレシーバコイルに誘導される電圧の振幅を測定することにより、複素関数で示した磁化のフーリエ係数を測定することが可能となる。

### 3.4) 2次元分布する磁化のフーリエ変換

式(18), (19), (20), (21)を2次元に拡張すると、

$$\begin{aligned} R(x, y) = \frac{1}{ab} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \alpha_{mn} \cos \left( \frac{2\pi nx}{a} + \frac{2\pi my}{b} \right) \right. \\ \left. + \beta_{mn} \sin \left( \frac{2\pi nx}{a} + \frac{2\pi my}{b} \right) \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} I(x, y) = -\frac{1}{ab} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \alpha_{mn} \sin \left( \frac{2\pi nx}{a} + \frac{2\pi my}{b} \right) \right. \\ \left. - \beta_{mn} \cos \left( \frac{2\pi nx}{a} + \frac{2\pi my}{b} \right) \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{mn} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left\{ R(x, y) \cos \left( \frac{2\pi nx}{a} + \frac{2\pi my}{b} \right) \right. \\ \left. - I(x, y) \sin \left( \frac{2\pi nx}{a} + \frac{2\pi my}{b} \right) \right\} dx dy \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \beta_{mn} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left\{ R(x, y) \sin \left( \frac{2\pi nx}{a} + \frac{2\pi my}{b} \right) \right. \\ \left. + I(x, y) \cos \left( \frac{2\pi nx}{a} + \frac{2\pi my}{b} \right) \right\} dx dy \end{aligned} \quad (29)$$

となる。ここで  $b$  は FOV の  $y$  方向の大きさである。

エコー信号を  $\Delta T_s$  ごとにサンプリングすることによって得られる  $\alpha_{mn}$ ,  $\beta_{mn}$  を式(26)に代入することにより、実画像が、そして式(27)に代入することにより虚画像が得られる。絶対値画像  $|M(x, y)|$  は、

Fig. 3(a)より

$$|M(x,y)| = \sqrt{R(x,y)^2 + I(x,y)^2} \quad (30)$$

となり，位相画像  $\phi(x,y)$  は，

$$\phi(x,y) = \tan^{-1} \frac{I(x,y)}{R(x,y)} \quad (31)$$

となる。

#### 4. ま と め

磁気共鳴における画像再構成として，2次元平面上を回転しているスピンの分布を取り扱った。歳差運動している磁気モーメントのベクトルを複素関数を用いて表現し，これら磁気モーメントの分布をこ

の複素関数のフーリエ変換を用いて表した。一般的に複素フーリエ級数では直交関数系として  $\exp(i2\pi nx/a)$  が用いられるが，ここでは直交関数系として  $\exp(-i2\pi nx/a)$  を導入した。このことにより，歳差運動しているスピンの実部成分および虚部成分をフーリエ級数における実部の係数および虚部の係数に対応させることができた。

#### 引 用 文 献

- 1) Stark, D. D., Bradley, W. G.: Magnetic Resonance Imaging, Mosby Year Book, St. Louis, 1992.
- 2) NessAiver, M.: All about MRI physics, University of Maryland Medical Center, 1997.
- 3) 日本磁気共鳴医学会 教育委員会編：第22回 MR 基礎講座 テキスト，2000.

# A Study of Reconstruction of Magnetic Resonance Image

Hirokazu KATO, Katsumi HANAMOTO, Masahiro KURODA<sup>1)</sup>,  
Koichi SHIBUYA and Shoji KAWASAKI

## Abstract

Magnetic resonance is an important modality for medical imaging, and advanced mathematical techniques are introduced into the reconstruction of images. Clearly understandable explanations of the reconstruction of the MR image and of the mathematical derivation process have not been presented in the texts.

Reconstruction of MR image is presented using the complex function and its relevant Fourier coefficients.

---

**Key Words :** MRI, Fourier transform, Reconstruction, Frequency encode, Phase image

---

Department of Radiological Sciences and Technology, Faculty of Health Sciences,  
Okayama University Medical School

1) Central Division of Clinical Radiology, Okayama University Hospital