

氏名	最 上 勲		
授与した学位	博	士	
専攻分野の名称	理	学	
学位授与番号	博 乙 第 2731 号		
学位授与の日付	平成 6 年 3 月 25 日		
学位授与の要件	博士の学位論文提出者 (学位規則第 4 条第 2 項該当)		
学位論文題目	Structure of rings satisfying certain constraints and commutativity theorems. (ある制約下における環の構造と可換性定理)		
論文審査委員	教授 永原 賢	教授 野田隆三郎	教授 中島 惇 教授 山寄比登志 教授 山口 恒夫

学 位 論 文 内 容 の 要 旨

本論文はある制約下における環の構造と可換性定理についての著者の研究をまとめたものである。主に環のうち、任意の 2 元 x, y が等式 $(x, y)^n = x^n y^n, n = n(x, y) > 1$ を満たす環を扱い、 n に関する或いは環に対する如何なる制約下でその環はどのような構造を持つか、また可換性が導かれることを考察した。

最初の環の可換性に関係の深い性質を考察し、必ずしも単位元を有しない環に対して多項式関係より局所的な関係の下で可換性定理を与え、これらの定理の応用として、元が中心元になるための条件等を明らかにした。

次に単位元を持つ環について、今迄の諸結果の普遍的な点に着目し、多項式関係を満たす場合をも包括する一般的な条件下で、環の構造を決定した。例えば次の結果を得た。

「環 R の各元 x, y に対して $\tilde{E}(x, y) = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 1, (x, y)^n = x^n y^n, (yx)^n = y^n x^n\}$ が $(e(n_1), \dots, e(n_s)) \equiv 0 \pmod{4}$ を満たす整数 n_1, \dots, n_s を含み、 $[x, y]$ が $(\frac{n_1(n_1-1)}{2}, \dots, \frac{n_s(n_s-1)}{2})$ -torsion free であるならば、 R は可換環である。」また「 n を $n \equiv 2 \pmod{4}$ である正の整数とすると、次の 1), 2) は同値である。1) 環 R の各元 x, y に対して $\tilde{E}(x, y)$ が $(e(n_1), \dots, e(n_s)) = n$ を満たす整数 n_1, \dots, n_s と m_1, \dots, m_r を含み、 $[x, y]$ が $(\frac{m_1(m_1-1)}{2}, \dots, \frac{m_r(m_r-1)}{2})$ -torsion free である。2) R は可換環と行列環 $M_r(K) = \{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in K \}$ たちの直組である。ここで K は自明でない自己同型写像 σ を持つ標

数 2 の有限体を表し、 $\frac{|K|-1}{|K^{\sigma}|-1}$ が $\frac{n}{2}$ を割るものとする。」

更に環全体ではなく、ある種の部分集合でのみ多項式関係を仮定した場合の可換性定理も得た。

論文審査の結果の要旨

環の可換性の研究はよく知られている Wedderburn の定理「有限斜体は可換体である」に始まり、それは Jacobson によって一般化され、その後も Herstein を始めとして多くの研究者によって種々の条件の下で研究されてきた。本論文は、ある制約下における環の構造と可換性定理に関しての著者の研究をまとめたものである。主として環のうち、任意の 2 元 x, y が等式 $(x y)^n = x^n y^n$, $n = n(x, y) > 1$ を満たすものを扱い、 n に関する或いは環に対する如何なる制約下でその環はどのような構造を持つか、また可換性が導かれるかなどが明らかにされている。上記の等式は従来からよく研究されており、 $n = 2$ の場合は可換環であり、 $n \geq 3$ のときは一般に可換でないことが知られている。

上記の条件を満たす環の可換性に関して、1981 年に小林及び著者が、それぞれ個別に提起した二つの予想はこれまで未解決であった。特に小林の予想は torsion-free な環に関係していて、可換性の研究においては重要なものであると思われていた。本論文ではその二つの予想がほぼ解決されている。まず、小林の予想に関しては、より一般的な形で完全な解決が得られている。即ち、ある制約下において、環の可換性が導かれるための必要十分条件を与えると共に、可換でない場合にはその環の構造が明らかにされている。また著者の予想に関しては、従来のいくつかの重要結果を統合した一般的な形の可換性定理を証明していて、ここに著者の予想はほぼ含まれる。

また、上記等式に関連したある条件を満たす環の元の特徴付けを与えた。このことから、例えば、元が環の中心に入るための条件などが明らかにされている。これをもとに、局所的に単位元を持つ環及び半原始環に対する可換性定理が得られている。これらの諸結果は必ずしも単位元を有しない環に対して論じた点、更に元に関する性質の形で論じている点にも意義がある。その他、ある多項式関係が環のすべての元に対してでなく、ある部分集合例えば根基を除いた部分集合の上で満たされれば可換性が導かれることなどが示されている。

以上の論文内容ならびに論文発表等について学位審査の結果、本研究は学術上の寄与が大であると判断される。よって、本論文は博士（理学）の学位論文に値するものと認める。