岡山大農学報 (44), 47—54 (1974)

有限要素法による非定常浸透流解析

吉 武 美 孝・渡 辺 忠
(構築工学研究室)

Received July 1, 1974

Transient Seepage Analysis Through Earth Dam by Finite Element Method

Yoshitaka YOSHITAKE and Tadashi WATANABE
(*Laboratory of Construction Engineering*)

This paper describes the application of finite element method to transient seepage through an earth dam, the stress analysis of an earth dam under a rapid drawdown condition, and the SOR method that we adopted to solve simultaneous equation. We found that apertinent over-relaxation-factor was from 1.4 to 1.6 and an Euclid norm and an arithmetical average are suitable for the convergence judgment. Next, we show a method of transient seepage analysis and a typical example is analyzed here. Furthermore, by a seepage stress analysis at a rapid drawdown, we show that a upstream slope at a rapid drawdown becomes unstability to a considerable degree than that at a steady state seepage.

ま え が き

有限要素法は，ここ10年あまりの間に主として構造解析の分野で研究されてきた比較的新しい数値解法であるが，大型電子計算機の普及により飛躍的に発展した．現在では，境界値問題の一つの解法として，種々の問題に適用されている．場の問題に関しては，1965年 ZIENKIEWICZ and CHEUNG[8] が，ねじりおよび定常熱伝導問題に適用した．浸透流問題には，1966年 ZIENKIEWICZ and CHEUNG[7] が異方性地盤の confined flow 解析に初めて適用した．以来，種々の問題に適用されている．有限要素法の大きな特徴は，境界の形状が複雑である場合でも，境界条件の導入が容易であり，非等方性や非均質性を等方性，均質性と全く同一の手法により解析できることにある．また，そのプログラムには汎用性があり，同一の支配方程式に従う種々の問題は全く同じプログラムで処理することが可能となる．有限要素法では多次元連立一次方程式を解かねばならないが，筆者らは，反復法に属する SOR 法（Successive Over Relaxation の略）を用いたので数値解法で問題となる収束判定，及び加速係数について考察を加え，次に，非定常浸透流解析例，及び浸透応力解析について考察を加える．

浸透問題における有限要素法

有限要素法を用いて浸透問題の解析を行うためには，汎関数を求めねばならない．これは，有限要素法では変分原理に基づいて境界値問題を解くためである．浸透問題について言えば，運動領域内において与えられたエネルギーのもとで流量が最大となるような流れ方をする，と言う原理[3] を認め，数学的には，速度ポテンシャルに関する汎関数を運動領域内で最小にする問題，すなわち変分問題として変分原理を用いて解くことになる．unconfined flow に対する

汎関数 Ω (F) は次式となる．

$$\Omega(F)=\int_R \frac{1}{2}k_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_i}dR-\int_{A_1}(h-H)k_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_j}n_i dA+\int_{A_2}VhdA$$
$$-\int_s(h-\eta)k_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_j}n_i dA-\int_{Fs}(h-\xi)k_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_j}n_i dA-\int_{Fs}\xi In_3 dA \quad \cdots\cdots (1)$$

ただし，F{h, ξ} は水頭 h 及び datum plane から測った自由水面の位置 ξ の順序対である．k_{ij} 透水係数テンソル，R は浸透領域，A_1 は既知水頭 H を有する境界，A_2 は既知流出入量 V を有する境界，n_i は境界の外向き法線の方向余弦，η は datum plane から測った浸出水面 S の位置，F_S は自由水面，I は自由水面に上部から流入する infiltration，n_3 は自由水面の外向き法線の鉛直軸に対する方向余弦である．また，総和記号に従うものとする．confined flow の汎関数は (1) 式の自由水面上，及び浸出面上での積分を除くことにより求まる．

$$\Omega(h)=\int_R \frac{1}{2}k_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_j}\frac{\partial h}{\partial x_i}dR-\int_{A_1}(h-H)k_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_j}n_i dA+\int_{A_2}VhdA \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

筆者らは三角形要素を用いて解析を行なった．各要素内で浸透領域の性状は一定とする．すなわち，透水係数は一定であり，その主軸も一定かつ，座標軸は主軸方向にとる．そして次の形の汎関数を考える．

$$\Omega(h)=\int_R \frac{1}{2}\left\{k_{xx}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+k_{yy}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right\}dR \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

この式は，x，y 座標を主軸の方向にとり，(2) 式における第 2，第 3 の積分を除いた形である．許容関数は境界で与えられた水頭値をとるものとする．そうすると，(3) 式は境界 A_1 上で $h=H$，A_2 上で $V=0$ なる境界値問題あるいは，すべての境界上で与えられた水頭値 $h=H$ をとる DIRICHLET の問題を解くのに用いられる汎関数であることがわかる．unconfined flow problem は combined boundary value problem である．すなわち，自由水面に関する境界条件二つ（①自由水面を横切る流れは存在しない．②自由水面上での圧力は 0 であり，水頭 h は datum plane からの高さに等しい）が有り，(3) 式を用いて自由水面の位置を修正，反復計算し，二つの境界条件を満足するように水頭 h を求めなければならない．これについては文献 4）を参照されたい．また，汎関数を最小化する手法に関しては ZIENKIEWICZ[6] が詳述しているので省略するが，最終的に次式の形をしたN元連立一次方程式が導かれる．

$$[k]\{h\}=\{f\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

ここで

$$[k]=\begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1i} & \cdots & k_{1N} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ k_{i1} & & k_{ii} & & k_{iN} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ k_{N1} & \cdots & k_{Ni} & \cdots & k_{NN} \end{pmatrix} \quad \{h\}=\begin{Bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_i \\ \vdots \\ h_N \end{Bmatrix} \quad \{f\}=\begin{Bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_N \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

であり，マトリックス $\{k\}$ は $k_{ij}=k_{ji}$，$k_{ii}\neq 0$，なる実対称マトリックスであり permeability matrix とも呼ばれる．ベクトル $\{h\}$ は水頭ベクトル，ベクトル $\{f\}$ は既知ベクトルであり，Nは総節点数である．

SOR 法について

SOR 法の一般式は次のごとくである．

$$h_i^{(m+1)}=h_i^{(m)}+\beta\left\{-h_i^{(m)}+\left(f_i-\sum_{j=1}^{i-1}k_{ij}h_j^{(m+1)}-\sum_{j=i+1}^{N}k_{ij}h_j^{(m)}\right)/k_{ii}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

ここに，h_i，h_j は第 i，j 点の水頭値であり，superscript (m+1，(m) は第 (m+1) 回，m 回なる反復回数を，β は加速係数，k_{ij} は permeability matrix〔k〕の第 i 行第 j 列要素である．$\beta=1$ の時は周知の Gauss-Seidel 法である．有限要素法では，マトリックス〔k〕は非常に大きなマトリックスになるが，零要素が多いという特徴がある．式(6)からわかるように $k_{ij}=0$ の場合，$h_i^{(m+1)}$ に何ら影響を及ぼさないので k_{ij} の非零要素のみを記憶しておけばよい．消去法ではこのようではない．また，マトリックス〔k〕は対称行列であるから，筆者らは対角項とその右上半分の非零要素を記憶させて記憶量を減少させた．また，この解法は節点のナンバーリングが任意にできるという利点もある．SOR 法は，Gauss-Seidel 法に比して少ない反復回数で所要の精度をもつ解を得ようとするものであるが，加速係数 β は $1<\beta<2$ なる範囲をとる．他の値では $h_i^{(m+1)}$ が発散したり振動したりする．数値計算法では最小反復回数すなわち，最小演算時間を与える β の値，及びいかなる収束判定条件を用いるのが妥当であるかということが問題になるが，SOR 法の浸透問題に対するこのような考察はいまだなされていないので，次に，まず Fig. 1 のごとき要素 71，節点数 49 のモデルで試算を行なった．

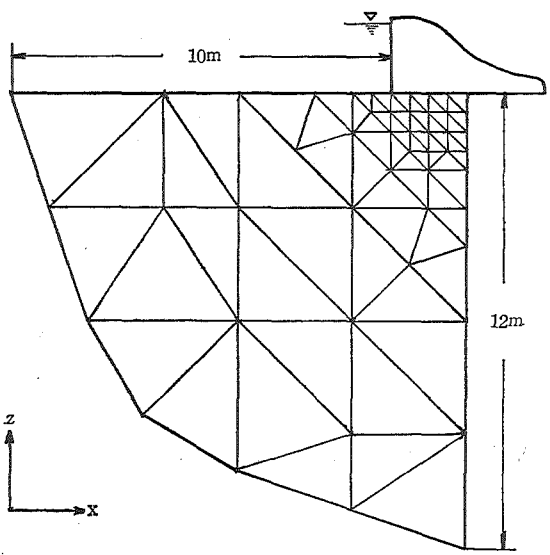

Fig. 1. Finite element representation to the examination for SOR method

この場合，初期値 $h_i^{(1)}$ は 0 とした．第 m 次近似値と (m + 1) 次近似値との相対誤差の絶対値 (SOTAI) が $\varepsilon=0.0001$ より小さくなった時，収束したものと見なして計算を打ち切った．すなわち，

$$\mathrm{SOTAI}=\left|\frac{h_i^{(m+1)}-h_i^{(m)}}{h_i^{(m+1)}}\right|\leqq\varepsilon$$
$$=0.0001 \quad \cdots\cdots\cdots (7)$$

また，同時に収束判定条件に用いられる相加平均(SOKA)，相乗平均(SOZYO)，ユークリッドノルム (NORM) を計算した．

$$\mathrm{SOKA}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{h_i^{(m+1)}-h_i^{(m)}}{h_i^{(m+1)}}\right| \quad \cdots\cdots\cdots (8)$$

$$\mathrm{SOZYO}=\frac{1}{N}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{h_i^{(m+1)}-h_i^{(m)}}{h_i^{(m+1)}}\right)^2} \quad \cdots\cdots\cdots (9)$$

$$\mathrm{NORM} = \frac{\| \{h^{(m+1)}\} - \{h^{(m)}\} \|}{\| \{h^{(m)}\} \|} \quad \cdots\cdots\cdots (10)$$

Fig. 2 に加速係数一反復回数関係を示す．図からわかるように $\beta = 1.4$ の時に 15 回の最少反復で収束した．又，三次元浸透流の場合の同関係を破線で示した．三次元の場合は，$\beta = 1.5$ が最適であった．すなわち，浸透流解析に関しては最適加速係数は 1.4～1.6 位のようである．Fig. 3 には $\beta = 1.4$ の時の二次元解析における収束状況を示した．これから，相乗平均は急激に値が小さくなり収束しているのかどうか予測がつけにくく，収束判定条件には適していないようである．又，相対誤差では解のオーダーが大きく異なる時は不必要な反復計算が続行されるので，結局，ユークリッドノルムと相加平均を組み合せて収束判定を行なうのがよいといえる．上述では，初期値を 0 としたが，だいたいの値がわかっていればその値を初期値に用いるとかなり早く収束する．

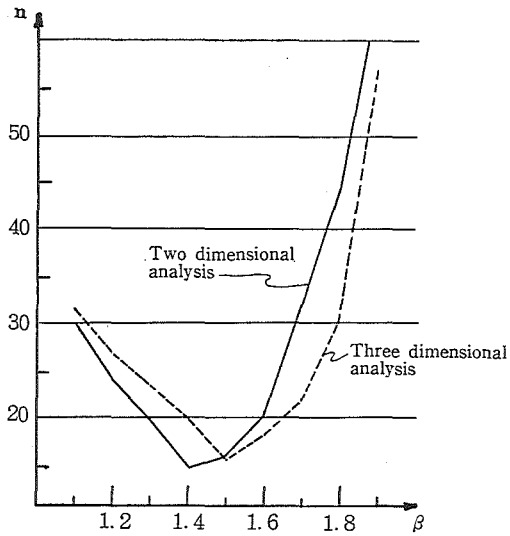

Fig. 2. Relationships between β and iteration number

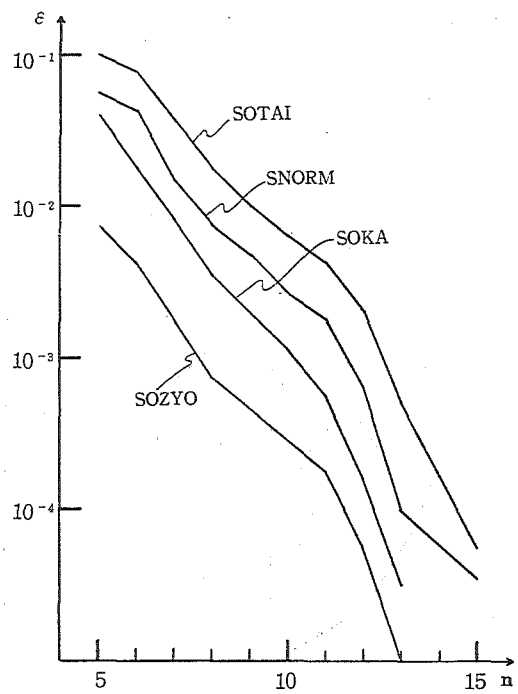

Fig. 3. Relationships between ε defined by eqs. (7)～(10) and iteration number ($\beta = 1.4$)

非定常浸透流解析

アースダムの非定常浸透流解析は，水位急降下時における上流側斜面の安定問題に対して大きな関心がもたれる．すなわち，貯水位が低下した後に堤体上流部に残留する間隙水圧の大きさと消散する速さが上流側斜面の安定性に及ぼす影響である．しかしながら，現時点においては，水位低下による間隙水圧の挙動に関する信頼できる理論解はなく，設計段階においては土の間隙は水で完全に満たされ，水圧低下は堤体内部の間隙水の流動に影響を与えない位急速に行なわれるとし，水理的境界条件の瞬間的変化がダム内部の間隙水圧の変化に直接反映し LAPLACE の方程式を適用できると仮定している[5]．したがって，間隙水圧の分布が瞬間的に水位降下時の流線網に変わることになる．この場合，土地改良事業計画設計基準では，堤体の透水係数が 1.0×10^{-3} cm/sec より小さい場合に適用でき，流線網を描いて浸透圧を求

めると規定している[2]．本論では上記のことより，水位は瞬間的に低下するものとし，また，LAPLACE 方程式が満足されるものと仮定して有限要素法を用いての自由水面の追跡法，および計算例を示す．筆者らの行なった追跡法は，HERBERT and RUSHTON[1] が Resistance Netework で行なった方法を応用したものであるが，これは非定常問題を各時間毎では定常状態にあるとして式(3)を解き，各節点水頭値および流速を求め，次に自由水面上の節点を浸透水の水の粒子と考え，DARCY 則に基づく流速を実質流速（actual particle velocity）に変換し，自由水面を移動するものである．これを具体的に説明すると次のごとくである．自由水面上の節点に関係する要素の流速を求め平均した流速をその節点の DARCY 流速とし，これを間隙率 n/100 で除して実質流速 Va を求める．次に自由水面を移動させるのであるが，時間きざみ Δt 間に節点は Va Δt だけ移動する．したがって Fig. 4 に示す如く自由水面上の節点 $i^{(m)}$，$j^{(m)}$ 等は i′，j′ 等に移動する．すなわち，破線が Δt 時間後の自由水面になるとするのである．自由水面が移動するために要素の組みかえが必要となる．普通は，ある直線（nodal line）上に節点を動かして新しい節点とする．したがって，同図に示す nodal line に沿って節点を動かす．自由水面上の節点 $i^{(m+1)}$，$j^{(m+1)}$ 等を求める為には i′．j′ 点等を用いて最小自乗法，あるいは適当な補間法で求めるとよい．筆者らはラグランジュ補間を用いた．又，浸出点は浸出点付近の自由水面上の節点を密に配置したので，浸出点に近い自由水面上の2節点の延長上にあるものとして求めた．Fig. 5 に上下流法面勾配が 1：1.5，透水係数 $k_{xx}=k_{yy}=5\times10^{-7}$ cm/sec，間隙率 n＝40，水位が 10 m から 5 m に急降下した時の自由水面形を示した．時間きざみ Δt＝1 時間，又，各回毎の自由水面上の節点の移動量は，初期水位の5％以内におさえるようにして計算した．又，Fig. 6，7 に水位降下瞬時，および5時間後の等ポテンツャル線図を示す．数値計算上問題になることは時間きざみ Δt をどのようにとるかであるが，解析領域が変化する浸透問題についてははっきりしたことはいえない．しかしながら Δt が大きすぎると自由水面形に不連続が生じて誤差が累積してくるので，各回毎の節点の移動量を規定することと，自由水面形の平滑化を行なうことが肝要である．各時間毎に浸透水圧の計算は容易であり，又，このプログラムにすべり解析のプログラムを接続す

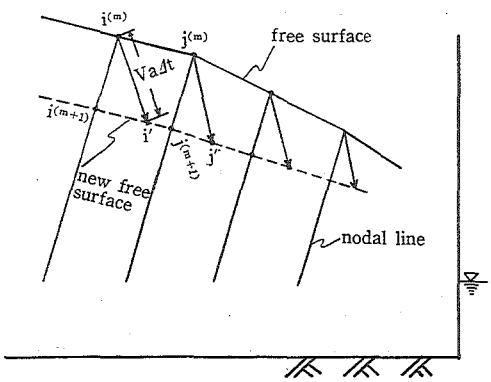

Fig. 4. Movement of particle on free surface during time Δt

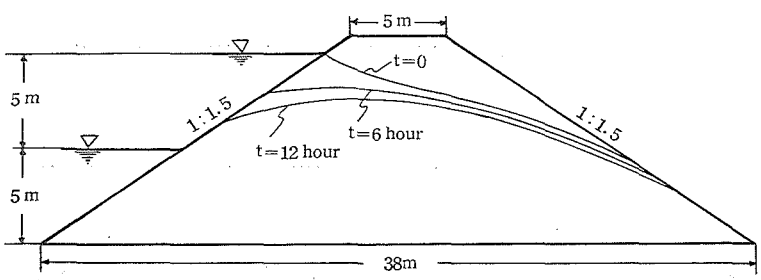

Fig. 5. Transient flow through earth dam

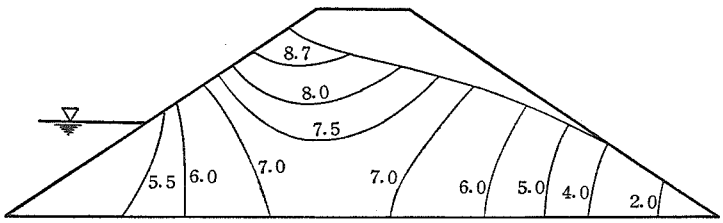

Fig. 6. Calculated results of water head (t = 0)

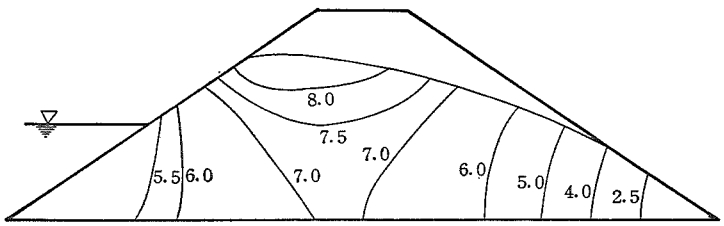

Fig. 7. Calculated results of water head distribution (t = 5 hour)

ることによって短時間にダムの安定解析を行なうことができる．次節では，この非定常時における浸透応力の計算を行ない若干の考察を加える．

アースダム堤体中に生じる浸透応力解析

土中の浸透によって浸透流が土の骨格に与える浸透力を f とする．f の CARTESIAN 座標成分を f_x, f_y, f_z とすると

$$\left.\begin{aligned} f_x &= -\gamma_w \frac{\partial h}{\partial x} \\ f_y &= -\gamma_w \frac{\partial h}{\partial y} \\ f_z &= -\gamma_w \frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (11)$$

となる．浸透力によってそれに対応する浸透応力が土中に発生する．弾性論を用いて応力を計算する場合，この浸透力は物体力とみなすことができる．したがって，平面ひずみと考えると，浸透力のみが作用する時の平衡方程式と適合条件式は

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \gamma_w \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \cdots\cdots (12)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \gamma_w \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad \cdots\cdots (13)$$

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad \cdots\cdots (14)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \cdots\cdots (15)$$

となる．(12)，(13)，(14)式を与えられた境界条件のもとで解くと浸透流によって土中に生じる浸透応力を計算することができる．浸透力は物体力とみなすことができるので，応力計算用の有限要素法のプログラムにより浸透応力を計算することができる．そのためには，各要素の水頭勾

配を求め，各要素の物体力を計算して要素の等価節点力を計算するとよい．Fig. 8 に t=0 の時の等価節点力を示す．この図は，浸透流が各節点に作用する力の合力と方向を表わしたものであるが，大まかな流れの方向をも表わしている．浸透領域，非浸透領域の弾性係数，POISSON 比，単位重量をそれぞれ 100 kg/cm^2，200 kg/cm^2，0.45，0.4，1.92 t/m^3，1.8 t/m^3，ダム底面は固定として応力解析を行なった．その結果を Fig. 9，10，11 に示す．Fig. 9 は浸透流による主応力図であり，Fig. 10 は自重と浸透流による主応力図である．Fig. 9 は定常状態における主応力図[4] に比較して全く異なった様相を呈している．すなわち，引張主応力が圧縮主応力に比してかなり大きく，主応力の流れが上下流二つの方向に別れているのがわかる．このために Fig. 10 では，引張領域がかなり生じるのである．すなわち，堤頂付近から上流側法面にかけて引張領域が発達し定常時とかなり異なった応力分布を示す．土は引張り材ではなく，引張り領域が多いということは土の降伏がおこりすべりが発生する可能性が高いことを示している．Fig. 11 には非定常時（実線）および定常時（破線）の変形図を示した．この図から非定常時の変形形態は上流側に向う変形も行なうことがわかる．この図からも非定常時の上流側斜面の不安定性がうかがわれる．

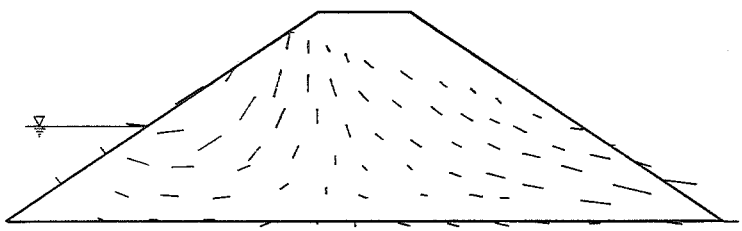

Fig. 8. Distribution of apparent nodal forces　0 2 4 ton

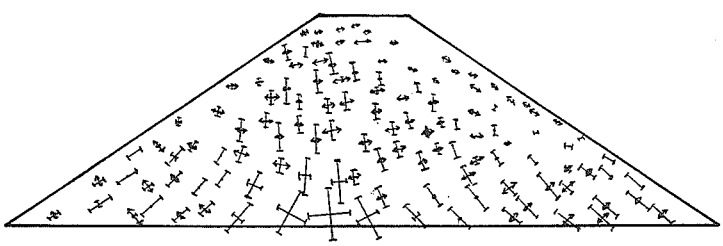

Fig. 9. Distribution of principal stresses due to seepage force　0 0.4 kg/cm^2

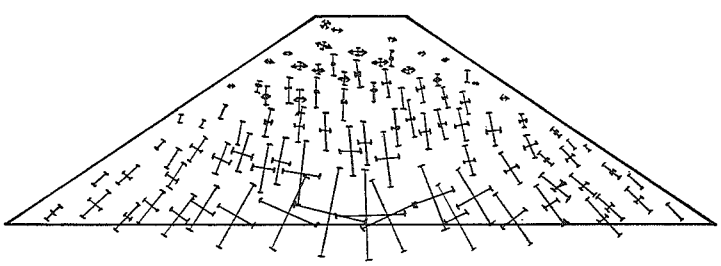

Fig. 10. Distribution of principal stresses due to seepage force and body force　4 kg/cm^2

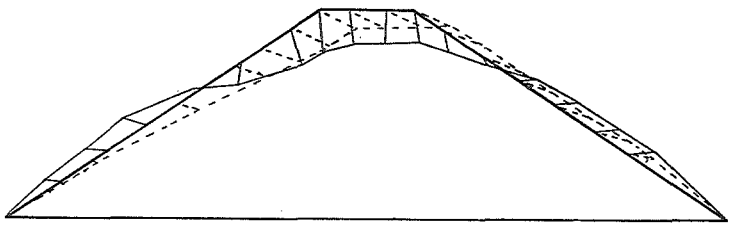

Fig. 11. Displacement due to seepage

transient 0 2 cm

steady state 0 4 cm

まとめ

有限要素法を用いてアースダムの非定常浸透流解析，応力解析，および SOR 法について若干の考察を行なった．SOR 法に用いる加速係数は 1.4～1.6 が最適であり，収束判定にはユークリッドノルムおよび相加平均を用いるのがこのましいことを示した．次に非定常浸透流解析法を示し，水位急降下にともなう自由水面形移動の計算例を示した．そして水位急降下瞬時における浸透応力解析を行ない，等価節点力図，主応力図，変位図から定常状態に比して上流側斜面が不安定になることを定性的に示した．なお，本研究には本学計算機センター NEAC シリーズ 2200 モデル 500 を使用した．

文献

1) HERBERT, R. and K. R. RUSHTON : Geotech. 16 (1), 53—75 (1966)
2) 農林省農地局：土地改良事業計画設計基準．第3部第1編，フィルダム．193—194 (1966)
3) 沢田敏男：農土研．21 (5), 5—15 (1954)
4) 沢田敏男・吉武美孝：農土論集．(47), 16—21 (1973)
5) SHERARD, J. L., R. J. WOODWARD, S. F. GIZIENSKI and W. A. CLEVENGER : Earth and Earth-Rock Dams. (1 st Ed.), 282—286 John Wiley and Sons, New York (1966)
6) ZIENKIEWICZ, O. C. : The Finite Element Method in Engineering Science. (1 st Ed.) 295—321 McGraw-Hill, New York (1971)
7) ZIENKIEWICZ, O. C., P. MAYER and Y. K. CHEUNG : ASCE. 92 (EM1), 111—120 (1966)
8) ZIENKIEWICZ, O. C. and Y. K. CHEUNG : The Engineer 24 (Sept), 507—510 (1965)